Quantenfluktuationen in Ringlaser-Gyroskopen

W. Schleich

MPQ 54 November 1981

MPQ-Report
54

MPQ

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR QUANTENOPTIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR QUANTENOPTIK

Quantenfluktuationen in Ringlaser-Gyroskopen

W. Schleich

MPQ 54

November 1981

D-8046 Garching bei München

MPQ 54 / 1981

W. Schleich

Quantenfluktuationen in Ringlaser-Gyroskopen

November 1981

Abstract

In this report, we describe the effects of quantum noise on the mean beat frequency and the spectrum of the beat signal produced by a ring laser gyro. We begin by a short review of the Sagnac-effect, which is the basic principle of a ring laser gyroscope, using both a kinematical and a general relativistic treatment. A short review of the ring laser theory is then given. The behaviour of a noise-free ring laser is analysed from a novel point of view, and the characteristic response curve, demonstrating the existence of the well-known locked region, is derived. The noise-free spectrum is calculated in both the locked and unlocked regions, and the existence of higher harmonics in the unlocked region demonstrated. The general equation for the phase of the beat signal is then derived from a quantum noise perspective and the general approach to the problem of calculating the spectrum in the presence of noise is presented from both a Fokker-Planck and Langevin equation point of view. An exact expression for the steady state distribution of the phase of the beat signal is also obtained. Approximate analytic expressions for the spectrum are derived in the locked region and well into the unlocked region. In the latter case, the usual laser spectrum is obtained, while in the former case, the spectrum is shown to separate into two parts: a "coherent" part consisting of a delta function centred at zero frequency which represents the continued effect of locking even in the presence of noise, and a weak background "incoherent" part representing the effects of noise.

Exact expressions for the spectrum and the mean beat frequency of the beat signal are then obtained in terms of infinite continued fractions. Computed forms for the spectrum and the frequency response curve are presented for parameter values appropriate to the ring laser gyro.

These results show that for laser rotation rates corresponding to the locked zone in the absence of noise, the tendency for locking as measured by the strength of the "coherent" contribution continues to predominate, but this effect rapidly becomes negligibly small outside this zone. In addition, the transition in beat frequency between the locked and unlocked zones, which is discontinous in the noise-free case ceases to be well-defined in the presence of noise. Finally, the higher harmonics predicted to occur in the unlocked zone in the absence of noise are found to re-occure in the presence of noise, except that the individual harmonics are now found to be broadened.

Zusammenfassung :

In dieser Arbeit diskutieren wir den Effect des Rauschens auf die mittlere Schwebungsfrequenz und das Spektrum des Schwebungssignals eines Ringlaser-Gyroskops. Wir beginnen mit einer kurzen Wiederholung des Sagnac-Effekts, der das Grundprinzip des Ringlaser-Gyroskops darstellt. Wir behandeln den Sagnac-Effekt sowohl heuristisch, als auch im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie und geben eine kurze Zusammenfassung der Ringlaser Theorie. Das Einrastverhalten und die charakteristische Einrastkurve eines Ringlaser-Gyroskops wird von einem neuen Standpunkt aus diskutiert. Das rauschfreie Spektrum wird sowohl im Einrast- als auch im freien Bereich berechnet und die Erzeugung von Harmonischen gezeigt. Die Bewegungsgleichung für die Phase des Schwebungssignals in Anwesenheit von Rauschen wird abgeleitet und die Berechnung des Spektrums in der Fokker-Planck- und der Langevin-Methode erläutert. Ein exakter Ausdruck für die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung der Phase des Schwebungssignals wird angegeben. Approximative, analytische Ausdrücke für das Spektrum können im Einrastbereich und weit im freien Bereich erhalten werden. Im letzteren Fall findet man das Spektrum des Einmodenlasers. Im Einrastbereich besteht das Spektrum aus zwei Anteilen: einer Deltafunktion zentriert um die Frequenz Null, die das Einrastverhalten des Lasers selbst bei Anwesenheit von Rauschen ausdrückt und einem sehr schwachen Untergrund, der den Einfluß des Rauschens beinhaltet.

Wir finden dann, exakte Ausdrücke für das Spektrum und die mittlere Schwebungsfrequenz in Form von unendlichen Kettenbrüchen. Die numerische Auswertung der Ausdrücke für das Spektrum und die Einrastkurve wird für typische Werte des Rauschens durchgeführt. Dabei zeigen die Ergebnisse, daß für Rotationsfrequenzen innerhalb des Einrastbereichs die Tendenz zum Einrasten vorherrscht, aber außerhalb davon sehr schnell verschwindend klein wird. Dabei ist der Übergang zwischen Einrast- und freien Bereich, der im rauschfreien Fall unstetig war, jetzt fließend. Im freien Bereich treten, wie im rauschfreien Fall, höhere Harmonische auf, die aber in Anwesenheit von Rauschen, zu Lorentzkurven verbreitert sind.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 4

2. Sagnac Effekt - heuristische Betrachtungen 9
   2.1 Einleitung 9
   2.2 Kreisförmiges, passives Interferometer 10
   2.3 Beliebig geformtes Interferometer 15
   2.4 Aktives Interferometer 16

3. Sagnac Effekt - relativistische Theorie 17
   3.1 Einleitung 17
   3.2 Sagnac-Frequenzverschiebung 18
   3.3 ΔL und die Synchronisation von Uhren 23
   3.4 Näherung schwacher Gravitationsfelder 24
   3.5 Festlegung der Metrik 25

4. Kleiner Exkurs in die Ringlasertheorie 29
   4.1 Einleitung 29
   4.2 Wellengleichung des elektrischen Feldes im rotierenden Ringlaser 30
   4.3 Herleitung der selbstkonsistenten Gleichungen 31
   4.4 Rückstreuung - lokale Spiegelverluste 33
   4.5 Polarisation des aktiven Mediums - Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz φ 34

5. Deterministisches Verhalten des Laser-Gyroskops 36
   5.1 Einrastverhalten 36
   5.2 Messung des Schwebungssignals 40
   5.3 Spektrum des Schwebungssignals $\cos\varphi$ ohne Rauschen 41

6. Bewegungsgleichung der Phase mit Rauschen 45

7. Spektrum des Schwebungssignals $\cos\varphi$ mit Rauschen 50
   7.1 Definition des Spektrums 50
   7.2 Berechnung der Korrelationsfunktion in der Fokker-Planck-Methode 51
   7.3 Berechnung der Korrelationsfunktion in der Langevin-Methode 52

8. Stationäre Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung 53

9. Approximative Lösungen für das Spektrum 58
9.1 Einrastbereich $0 \leq a \leq b$ 58
a) Langevin-Methode 61
b) Fokker-Planck-Methode 62
c) Das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$ 64
9.2. Der Bereich $|a| \gg b$ in der Fokker-Planck-Methode 65
9.3 Asymptotischer Bereich b = 0 in der Langevin-Methode 68

10. Exakter Ausdruck für das Spektrum in Form von Kettenbrüchen 69
10.1 Rekursionsschema für die Fokker-Planck-Gleichung 69
10.2 Laplacetransformation der rekursiven Fokker-Planck-Gleichung 70
10.3 Berechnung des Spektrums in der Kettenbruchmethode 73
10.4 Numerische Ergebnisse 77
10.5 Die mittlere Schwebungsfrequenz $\langle \dot{\varphi} \rangle_t$ in der Anwesenheit von Rauschen 80

11. Zusammenfassung 82

Anhang A: Sagnac Effekt mit Materiewellen 85
A.1 Schrödinger Gleichung im rotierenden System 85
A.2 Bestimmung der Wellenvektoren $k_\pm$ und Phasenverschiebung $\Delta\varphi_{Elektron}$ 86

Anhang B: Potentialmethode zur Gewinnung von qualitativen Aussagen über Lösungen von Differentialgleichungen der Form $\dot{\varphi} = \mathcal{F}(\varphi, c_\varphi)$ 89

Anhang C: Kurze Zusammenfassung der Theorie des Rauschens 90
C.1 Einleitung 90
C.2 Korrelationsfunktion und Markoff-Approximation 91
C.3 Quantenmechanische Langevin-Gleichung 93
C.4 Fokker-Planck-Gleichung 95
C.5 Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung aus der Langevin-Gleichung 96

Anhang D: Entwicklung der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{P}(t, \varphi \mid t_0 = 0, \varphi_0)$ nach Eigenfunktionen von Gl. (6.19). 99

Anhang E: Berechnung der stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung P_s 101

Anhang F: Mittelung über Statistik in der Langevin-Methode 103

Anhang G: Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(t, \alpha \mid t_0 = 0, \alpha_0)$ für den Fall des Kapitel 9.1 104

Anhang H: Berechnung der Korrelationsfunktionen $C_\pm(t)$ in der Fokker-Planck-Methode für den Fall des Kapitel 9.1 106

Anhang I: Berechnung der Eigenwerte λ_l 108

Anhang J: Berechnung der Entwicklungskoeffizienten $c^l_{\pm 1}$ 110

Anhang K: Asymptotischer Bereich $b=0$: Berechnung der Korrelationsfunktion $\langle\langle \cos\varphi \cos\varphi_0 \rangle\rangle$ in der Langevin-Methode (Ein- Moden Laser) 113

Anhang L: Lösung der Rekursionsformel (10.7) 114

Literatur 116

1. Einleitung

Während des ersten halben Jahrhunderts ihres "Lebens" galt die Allgemeine Relativitätstheorie, wie Misner, Thorne und Wheeler in ihrem Buch "Gravitation" schreiben [1], als "das Paradies der Theoretiker aber die Hölle der Experimentalphysiker". Auch bis heute gibt es nur wenige experimentelle Bestätigungen für Einsteins Theorie. So wurde der Lense-Thirring Effekt [2] zwar schon 1918 vorhergesagt, konnte aber, da er in der Größenordnung von 10^{-10} mal der Erdrotationsfrequenz liegt, bis heute noch nicht gemessen werden.

Lense und Thirring berechneten das Gravitationsfeld einer um die eigene Achse rotierenden Massenschale und dessen Wirkung auf ein Inertialsystem. Während das Gravitationsfeld einer ruhenden Kugelschale radialsysmmetrisch ist, entsteht durch die Rotation der Massenverteilung ein zusätzliches Feld - das Lense-Thirring-Feld. Dies ist analog zum Magnetfeld einer rotierenden homogenen geladenen Kugelschale in der Elektrodynamik. Daher wird in diesem Zusammenhang auch von "magnetischer Gravitation" gesprochen. Ein um die rotierende Erde kreisendes mechanisches Gyroskop wird auf Grund dieses zusätzlichen Gravitationsfeldes zu präzedieren beginnen. Der Lense-Thirring-Effekt wird auch oft als Mitführ-Effekt bezeichnet.

Der Bau von Ringlasern und die theoretische Entwicklung der Quantenoptik schufen neue Möglichkeiten zum Test der allgemeinen Relativitätstheorie. Ringlaser als Gyroskope verwendet, benutzen das Prinzip des Sagnac Effekts [3] [4]. Dabei wird ein von einer Lichtquelle ausgesandter Strahl über einen Strahlteiler in einen Ringresonator eingekoppelt. Dadurch erhält man zwei gegenläufige Wellen, die nach einem Umlauf ausgekoppelt und wieder vereinigt werden. Beim Drehen des Interferometers um die Achse senkrecht zu seiner Ebene ist, wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, die Laufzeit des Lichtes in Drehrichtung etwas länger als in entgegengesetzter Richtung. Hieraus ergibt sich eine Phasendifferenz zwischen den beiden Wellen, die, wie sich herausstellt, proportional zur Winkelgeschwindigkeit ist. Benutzt man ein Interferometer dessen Lichtquelle innerhalb des Resonators ist, so ergibt sich entsprechend eine zur Winkelgeschwin-

digkeit proportionale Frequenzverschiebung. Dies wird als Sagnac Effekt bezeichnet. Eine genaue Rechnung zeigt, daß bei einem Ringlaserexperiment auf der Erdoberfläche die Frequenzdifferenz nicht nur einen Term proportional zur Rotationsfrequenz des Lasers , sondern noch zusätzliche Beiträge von der Größenordnung 10^{-10}mal der Erdrotationsfrequenz enthält, die vom Lense-Thirring-Effekt und von Raumkrümmungseffekten herrühren [5].

Solche Experimente können daher prinzipiell zum Test der allgemeinen Relativitätstheorie benützt werden. Bei Verwendung von Ringlaser-Gyroskopen ist man an der Messung sehr niedriger Rotationsfrequenzen interessiert. Jedoch kommt es gerade hier auf Grund von Spiegelverlusten zu einer Kopplung der beiden gegenläufigen Wellen. Dies führt dazu, daß die Frequenzverschiebung innerhalb eines Bereiches, der Einrastbereich oder totes Band genannt wird, verschwindet [6]. Daher kann in diesem Bereich aus der Messung der Frequenzverschiebung nicht auf die Rotation des Systems geschlossen werden. Das Bestreben ist folglich das tote Band zu verkleinern oder neue Parameter zu finden, die ein Maß für die Winkelgeschwindigkeit darstellen. Wie wir sehen werden, bietet das Rauschen des Lasers, hervorgerufen durch spontane Emission der Atome, und die Linienbreite des Spektrum des Schwebungssignals dazu eine Möglichkeit.

Der Sagnac Effekt wurde schon 1913 entdeckt [3]. Die allgemein relativistische Verallgemeinerung mit Berücksichtigung der Raumkrümmungseffekte und des Lense-Thirring-Feldes der Erde wurde zum erstenmal von Scully 1977 [5] gegeben. In dieser Arbeit konnte die Sagnac-Frequenzverschiebung in Abhängigkeit von den metrischen Fundamentalkoeffizienten ausgedrückt und insbesondere für ein auf der Erde ausgeführtes Experiment angegeben werden. Scully benutzte dazu die in unserem Sonnensystem durchwegs gültige Schwachfeld-Näherung. Diese Näherung gilt nicht für starke Gravitationsfelder, wie sie z. B. in der Nähe von schwarzen Löchern vorkommen. Als Erweiterung von [5] leiten wir die Sagnac-Frequenzverschiebung in einem stationären, aber sonst beliebigen, Gravitationsfeld her. Im Falle eines schwachen Gravitationsfeldes geht unser Ergebnis in das von [5] über.

Einen ausführlichen Überblick über die nichtrelativistische Theorie des Laser-Gyroskops wurde von Aronowitz gegeben [6]. Um das Einrasten des

Ringlasers zu verhindern, werden darin verschiedene Methoden vorgeschlagen. Bei der Zitter-Methode (engl. dither) wird der niedrigen Rotationsfrequenz des Gyroskops noch eine zusätzliche, mechanische, hochfrequente Rotation überlagert. Rechnungen zeigen, daß tatsächlich das Einrastgebiet verkleinert werden kann [7]. Der Nachteil dieser Methode: das Gyroskop enthält mechanische Teile. In dieser Arbeit wird der Einfluß des Rauschen auf das Laser-Gyro im Detail untersucht, insbesondere dessen Wirkung auf das Spektrum des Schwebungssignals, um dadurch eine Möglichkeit zur Messung niedriger Rotationsgeschwindigkeiten zu gewinnen.

Im Folgenden wird eine kurze Gliederung der Arbeit gegeben. In Kapitel 2 betrachten wir den Sagnac-Effekt von einem heuristisch-geometrischen Standpunkt aus. Dabei wird sowohl der Fall des passiven Interferometers (Lichtquelle außerhalb des Resonators) in erster Ordnung im Verhältnis Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe zur Lichtgeschwindigkeit behandelt. Sowohl die Phase als auch die Frequenzverschiebung ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit des Interferometers. Außerdem zeigen wir, daß der Effekt nicht von der Geometrie des Resonators abhängt.

Da man es mít Lichtausbreitung in einem Nichtinertialsystem zu tun hat, muß der Sagnac-Effekt im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie behandelt werden. Daher leiten wir in Kapitel 3 ausgehend von der Eikonalgleichung für das Viererpotential eine Formel für die Sagnac Frequenzdifferenz in Anwesenheit eines beliebigen Gravitationsfeldes her. Dieses Ergebnis benutzen wir, um die Frequenzverschiebung für den Fall eines Sagnac-Experimentes auf der Erdoberfläche anzugeben. Dabei finden wir die eingangs erwähnten Beiträge des Lense-Thirring und der Raumkrümmungseffekte.

Da demnach Ringlaser geeignet sind Rotationen nachzuweisen, bringen wir in Kapitel 4 eine kurze Wiederholung der Ringlasertheorie und leiten die Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz zwischen den beiden gegenläufigen Wellen des Ringlasers her. Wegen der Rotation des Ringlasers gehen wir dazu von den Maxwell-Gleichungen in einem Nichtinertialsystem aus und erhalten hieraus die Wellengleichung für das elektrische Feld in einem Ringresonator. Durch Abseparation der schnell veränderlichen Größen fol-

gen die Bewegungsgleichungen für die Phase und die Envelope der beiden Wellen. Diese enthalten jedoch nicht den eingangs geschilderten Effekt der Rückstreuung. Diesen beschreiben wir durch ein dünnes Medium mit komplexer Suszeptibilität. Als Gleichung für die Phasendifferenz erhalten wir dann eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit.

Mit einer neuen Methode, der sogenannten Potentialmethode, untersuchen wir in Kapitel 5 diese Gleichung und leiten die charakteristische Kurve des Laser-Gyros (mittlere Schwebungsfrequenz als Funktion der Winkelgeschwindigkeit des Interferometers) her. Dabei finden wir, daß die mittlere Schwebungsfrequenz auf Grund der Rückstreuung an den Spiegeln für einen Bereich symmetrisch zur Frequenz Null, dem sogenannten Einrastbereich oder totes Band verschwindet. Außerhalb des toten Bandes ist der Funktionsverlauf ein Hyperbelast. Für das Spektrum des Schwebungsignals erhält man im Einrastgebiet eine Deltafunktion bei der Frequenz Null. Außerhalb erhalten wir wegen des nichtlinearen Effekts der Rückstreuung Deltafunktionen bei den Vielfachen der mittleren Schwebungsfrequenz, also die Erzeugung von Harmonischen.

Die Bewegungsgleichung für die Phase wurde aus der semiklassischen Lasertheorie gewonnen und enthält daher nicht das Rauschen des Lasers. Wegen der spontanen Emission - das Atom zerfällt unter Aussendung eines Photons mit willkürlicher Phase - sind die Phasen der beiden Wellen nicht länger deterministisch. Sie sind zu stochastischen Variablen geworden. Solche Prozesse werden in der Rauschtheorie durch die Langevin- bzw. die Fokker-Planck-Gleichung beschrieben. In Kapitel 6 leiten wir diese für die Phasendifferenz der beiden gegenläufigen Wellen im Ringlaser mit Rauschen her.

In Kapitel 7 definieren wir das Spektrum als Fouriertransformation des Schwebungsignals. Wir geben dessen Berechnung in der Langevin- und in der Fokker-Planck-Methode an. Dabei nehmen wir an, daß das Gyroskop einen stationären Zustand erreicht hat, bevor wir die Messung des Spektrums vornehmen.

Der stationären Lösung der Fokker-Planck-Gleichung kommt daher bei der Berechnung des Spektrums eine besondere Bedeutung zu. Sie wird in Kapitel 8 bestimmt.

Das Kapitel 9 ist approximativen Ausdrücken für das Spektrum gewidmet. Im toten Band benutzen wir sowohl die Langevin- als auch die Fokker-Planck-Gleichung und linearisieren um die stabile, stationäre Lösung der Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz ohne Rauschen. Für das so berechnete Spektrum finden wir im Einrastbereich eine Deltafunktion und eine Summe von Lorentzkurzen. Die Linienbreite dieser Lorentzkurven nimmt mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit des Gyroskop ab. Außerhalb des Einrastbereiches berechnen wir das Spektrum mit einer Störungstheorie erster Ordnung aus der Fokker-Planck-Gleichung. Es besteht aus einer Summe von Lorentzkurven bei den Vielfachen der mittleren Schwebungsfrequenz. Das Rauschen hat also die Deltafunktionen des rauschfreien Falls zu Lorentzkurven verbreitert. Weit außerhalb des Einrastbereiches sind die beiden gegenläufigen Wellen entkoppelt. Das Spektrum ist folglich das eines gewöhnlichen Lasers: Lorentzkurve mit einer Linienbreite in der Größe der Diffusionskonstanten.

Die Fokker-Planck-Gleichung dieses Problems läßt sich jedoch auch exakt lösen. Dies zeigen wir in Kapitel 10. Durch Fourierentwicklung und anschließende Laplacetransformation läßt sie sich auf die Form eines Dreiterm-Rekursionsschema bringen. Dieses kann durch Kettenbrüche exakt gelöst werden. Auch das Spektrum läßt sich in Kettenbrüchen angeben. Die numerische Auswertung und die Ergebnisse zeigen wir im Abschnitt 10.4.

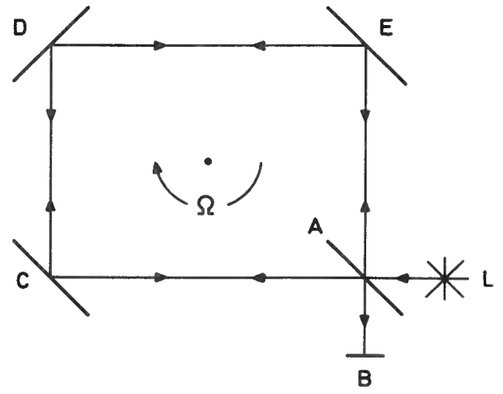
Eine Zusammenfassung der Ergebnisse bringt Kapitel 11.

2. Sagnac Effekt - heuristische Betrachtungen

2.1. Einleitung:

Die spezielle Relativitätstheorie sieht alle Inertialsysteme, d.h. alle Bezugssysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu den Fixsternen bewegen, als äquivalent an [1]. Ein in einem Kasten eingeschlossener Beobachter hat somit keine Möglichkeit durch Experimente zu entscheiden, ob er sich gleichförmig geradlinig bewegt oder ob er ruht. Erst durch Kontakt zur Außenwelt, durch Beobachtung der Bewegung des Kastens relativ zu anderen Objekten, kann er seine Relativgeschwindigkeit feststellen. Den Inertialsystemen stehen die auf irgendeine Weise beschleunigten Bezugssysteme, die sogenannten Nichtinertialsysteme, gegenüber. Im Inneren eines beschleunigten Kastens ruft die Beschleunigung ein Kraftfeld hervor. Durch Messung desselben können Rückschlüsse auf die Bewegung des Systems gezogen werden.

In früheren Experimenten geschah dies auf mechanischem Wege (Foucault Pendel, mechanisches Gyroskop). Sagnac gelang es 1913 durch Interferometrie, also durch ein optisches Experiment, die Rotation eines Bezugssystems nachzuweisen [3], [4]. Figur 1 zeigt den prinzipiellen Versuchsaufbau von Sagnac´s Experiment.



A = Strahlteiler
B = Beobachter
C,D,E = Spiegel
L = Lichtquelle

Figur 1: Schema eines Sagnac Interferometers

Ein von der Lichtquelle L ausgesandter Strahl wird in A geteilt. Die im und gegen den Uhrzeigersinn umlaufenden Lichtstrahlen ACDEA und AEDCA werden bei A wieder vereinigt und die Interferenzfigur wird in B beobachtet. Rotiert das gesamte Interferometer einschließlich Lichtquelle und Beobachter mit der Frequenz Ω, so ergibt sich, wie unten gezeigt wird, eine Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen den beiden Wellen und damit eine Verschiebung der Interferenzstreifen proportional zur Winkelgeschwindigkeit .

$$\Delta\varphi \sim \Omega$$

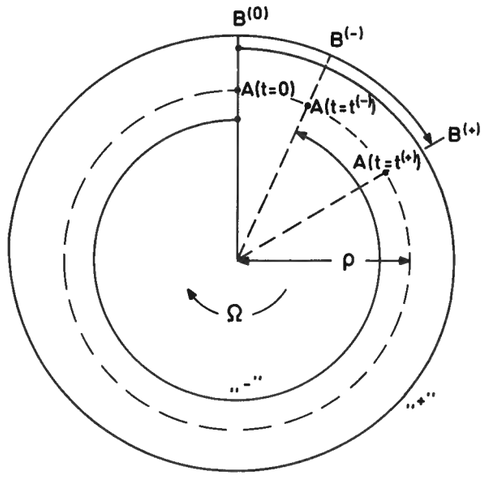
Dieser Effekt wird als Sagnac Effekt bezeichnet.
Durch Messung von $\Delta\varphi$ kann somit die Rotation des Systems bestimmt werden.
Da wir es hierbei mit Lichtausbreitung in einem Nichtinertialsystem zu tun haben, muß der Versuch im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben werden. Dies wird in Kapitel 3 ausgeführt. Wir wollen zunächst eine geometrisch-kinematische Betrachtung des Effekts geben [6]. Wir beginnen in Kapitel 2.2 mit dem einfachsten Fall eines ringförmigen passiven Interferometers, in dem sich die Lichtquelle außerhalb des Interferometers befindet. In Kapitel 2.3 werden wir zeigen, daß das Ergebnis nicht von dieser speziellen Form abhängt [4]. Schließlich diskutieren wir in Kapitel 2.4 den Fall eines aktiven Interferometers, in dem sich die Lichtquelle innerhalb des Resonators befindet.

2.2 Kreisförmiges, passives Interferometer:

Das Licht einer außerhalb des Resonators stehenden monochromatischen Lichtquelle mit der Frequenz ω_o (passives Interferometer) trete im Punkt A in das kreisförmige Interferometer mit Radius ρ ein und werde durch einen Strahlteiler in zwei Strahlen geteilt. Durch eine experimentelle Anordnung werde das Licht gezwungen, sich auf einer Kreisbahn auszubreiten. Nach einem Umlauf vereinigen sich die Strahlen wieder am Strahlteiler. Solange das Interferometer ruht, ist die Umlaufzeit t für beide Strahlen gleich groß, nämlich:

$$t = \frac{2\pi\rho}{c} ; \qquad (2.1)$$

wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist.
Rotiert das Interferometer mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω, so stellt sich für einen im Laborsystem ruhenden Beobachter folgende Situation dar (Figur 2). (Ungestrichene Größen beziehen sich im folgenden auf das Laborsystem, gestrichene auf das rotierende).



Figur 2: Vereinfachtes Sagnac Interferometer

Zum Zeitpunkt t=o gehen vom Strahlteiler A zwei Lichtstrahlen aus, die je nach Umlaufsrichtung mit "+" bzw. "-" bezeichnet werden. Der Strahlteiler befindet sich in diesem Moment, vom Laborsystem aus gesehen, im Punkt $B^{(o)}$. Nach der Zeit $t^{(-)}$ bzw. $t^{(+)}$ treffen die beiden Strahlen nacheinander wieder in A ein. Unterdessen hat sich jedoch auf Grund der Rotation der Scheibe, A von $B^{(o)}$ nach $B^{(-)}$ bzw. $B^{(+)}$, also um eine Strecke $\Delta s^{(+)}$ bzw. $\Delta s^{(-)}$ bewegt, wobei gilt:

$$\Delta s^{(\pm)} = \rho \cdot \Omega \cdot t^{(\pm)} \qquad (2.2)$$

Da der "+" Strahl in Rotationsrichtung läuft, muß er seinem Ziel, dem Strahlteiler, nacheilen. Er legt also nicht die Strecke $2\pi\rho$, sondern eine um $\Delta s^{(+)}$ längere Strecke zurück, nämlich

$$s^{(+)} = 2\pi\rho + \Delta s^{(+)} = 2\pi\rho + \rho\Omega t^{(+)} \qquad (2.3a)$$

Dagegen eilt der "-" Strahl der Rotationsrichtung und damit seinem Ziel entgegen. Der von ihm zurückgelegte Weg $s^{(-)}$ ist folglich nicht $2\pi\rho$, sondern um $\Delta s^{(-)}$ kürzer:

$$s^{(-)} = 2\pi\rho - \Delta s^{(-)} = 2\pi\rho - \rho\Omega t^{(-)} \; ; \qquad (2.3b)$$

Auf Grund der Isotropie der Lichtgeschwindigkeit breitet sich sowohl der "+" als auch der "-" Strahl mit c aus, und folglich gilt:

$$s^{(\pm)} = c\, t^{(\pm)} \qquad (2.4)$$

Insgesamt finden wir aus Gl(2.3 a,b) und Gl(2.4) für die Umlaufzeiten $t^{(\pm)}$:

$$t^{(\pm)} = \frac{2\pi\rho}{c(1 \mp \frac{\rho\Omega}{c})} \qquad (2.5)$$

Dieses Ergebnis läßt eine interessante Interpretation zu:
Das Licht legt dieselbe Strecke $2\pi\rho$ mit verschiedenen "effektiven" Geschwindigkeiten zurück. Nämlich in Richtung der Rotation mit

$$v^{(+)} = c\,(1 - \frac{\rho\Omega}{c})$$

und entgegen der Rotation mit

$$v^{(-)} = c\,(1 + \frac{\rho\Omega}{c}).$$

Die effektive Lichtgeschwindigkeit ist nicht mehr isotrop.
Für die Zeitdifferenz $\Delta t := t^{(+)} - t^{(-)}$ mit der die beiden Strahlen beim Strahlteiler eintreffen, folgt aus Gl.(2.5) für

niedrige Rotationsfrequenzen, also für $\frac{\rho\Omega}{c} \ll 1$:

$$\Delta t = \frac{2\pi\rho}{c}\left(1 + \frac{\rho\Omega}{c} - (1 - \frac{\rho\Omega}{c})\right) + O\left(\left(\frac{\rho\Omega}{c}\right)^2\right) \; ; \qquad (2.6)$$

oder $$\Delta t = \frac{4\pi\rho^2}{c^2}\Omega \; ;$$

Diese Zeitdifferenz Δt verursacht eine Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen den beiden Lichtwellen.

$$\Delta\varphi = \omega\,\Delta t$$

Die Frequenz ω ist wegen des longitudinalen Dopplereffekts bei stationärer Beobachtung um die Größenordnung $\frac{\rho\Omega}{c}$ verschoben.

$$\omega = \omega_0\left(1 + O\left(\frac{\rho\Omega}{c}\right)\right);$$

Mit Gl.(2.6) folgt also:

$$\Delta\varphi \cong \frac{4\pi\rho^2}{c^2}\omega_0\Omega\left(1 + O\left(\frac{\rho\Omega}{c}\right)\right) = \frac{4\pi\rho^2}{\lambda\cdot c}\Omega + O\left(\left(\frac{\rho\Omega}{c}\right)^2\right)$$

oder

wobei $$\Delta\varphi = \frac{4A\Omega}{\lambda\cdot c} \qquad (2.7)$$

$$A = \pi\rho^2$$

die Fläche des Interferometers
und

$$\lambda = \frac{c}{\omega_0} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

die reduzierte Wellenlänge bezeichnen.
Somit haben wir in (2.7) den Doppler-Effekt vernachlässigt.
$\Delta\varphi$ wird von einem ruhenden Beobachter aus gemessen.
Wir berechnen nun die Phasenverschiebung $\Delta\varphi'$ im rotierenden System.
Vom stationären System aus betrachtet, vergeht zwischen den Positionen $B^{(-)}$ und $B^{(+)}$ des Strahlteilers die Zeit Δt.
Führt man jedoch den Versuch mit einem mitrotierenden Beobachter aus, so muß Δt ins rotierende System transformiert werden.

Wegen $\frac{\rho\Omega}{c} \ll 1$

gilt nach Gl.(2.6)

$$\Delta t = 4\pi \left(\frac{\rho\Omega}{c}\right)^2 \frac{1}{\Omega} \ll 2\,\frac{2\pi}{\Omega} = 2T$$

wobei $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ die Umlaufsdauer der Scheibe bezeichnet. Daher kann für die Zeitdifferenz Δt das rotierende Bezugssystem als lokales Lorentzsystem angesehen werden. Die Transformation von Δt in das rotierende System mit einer Lorentztransformation

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{\rho\Omega}{c}\right)^2} \cong \Delta t + O\left(\left(\frac{\rho\Omega}{c}\right)^2\right) \qquad (2.8)$$

ergibt in niedrigster Ordnung also

$$\Delta t' \cong \Delta t$$

Damit gilt

$$\Delta\varphi \cong \Delta\varphi'$$

Im Gegensatz zum Dopplereffekt, der vom Standpunkt des Beobachters abhängt, gibt es also beim Sagnac Effekt eine Übereinstimmung erster Ordnung zwischen dem stationären und dem mitrotierenden Beobachter. Daher wird im Weiteren nicht mehr zwischen Größen im rotierenden und im stationären System unterschieden. Die Sagnac Phasenverschiebung ist, wie Gleichung (2.7) zeigt, linear von der Rotationsfrequenz Ω und der von den Lichtstrahlen eingeschlossenen Fläche $A = \pi\rho^2$ abhängig.

In diesem Zusammenhang ist es interessant, ob es einen solchen oder einen anderen Effekt gibt, wenn statt der Lichtwellen Materiewellen, z.B. Elektronen verwendet werden. Diese Frage ist in Anhang A behandelt. Wir finden eine zu Gl.(2.7) analoge Gleichung für die Phasendifferenz zwischen den Wellenfunktionen der beiden gegenläufigen Elektronenstrahlen.

2.3 Beliebig geformtes Interferometer:

Wir zeigen jetzt, daß das Ergebnis unabhängig von der Geometrie des Interferometers ist. Dabei müssen wir nur die konstante Rotationsgeschwindigkeit $\rho\cdot\Omega$ in der Ableitung durch die mittlere Rotationsgeschwindigkeit längs des Lichtweges [4]

$$v_m := \frac{1}{P}\oint_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot\vec{V}(\vec{r})$$

ersetzen, wobei P die Länge des Resonators und $\vec{V}(\vec{r})$ die Geschwindigkeit des Resonators im Punkte $\vec{r}$ bezeichnen. Das Linienintegral muß längs des Lichtweges $\mathcal{C}$ genommen werden. Mit

$$\vec{V} = \vec{\Omega}\times\vec{r}$$

und Hilfe des Stokeschen Satzes **folgt daraus:**

$$v_m = \frac{1}{P}\iint_{\mathcal{A}} \mathrm{rot}\,\vec{V}\,d\vec{A} = \frac{1}{P}\iint_{\mathcal{A}} 2\vec{\Omega}\,d\vec{A} = \frac{2\vec{\Omega}}{P}\iint_{\mathcal{A}} d\vec{A}$$

Insgesamt also

$$v_m = \frac{2\vec{A}\cdot\vec{\Omega}}{P} \qquad (2.9)$$

wobei wir ein ebenes Interferometer angenommen haben und A in Richtung der Flächennormalen zeigt.
Ersetzen wir in (2.6) $\rho\Omega$ durch v_m und $2\pi\rho$ durch P, so finden wir für die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen der "+" und der "-" Lichtwelle für ein beliebig geformtes Interferometer:

$$\Delta\varphi = \frac{4\vec{A}\cdot\vec{\Omega}}{\lambda\cdot c} = \frac{4A\Omega}{\lambda c}\cos\delta \qquad (2.10)$$

$\Delta\varphi$ ist also unabhängig von der Form des Interferometers und der Lage des Drehpunktes. Dagegen ist die Phasenverschiebung proportional zum Cosinus des Winkels δ zwischen der Rotationsachse und der Flächennormalen von A.

2.4 Aktives Interferometer:

Im Gegensatz zum passiven Interferometer, liegt beim aktiven die Lichtquelle innerhalb des Resonators. Außerdem hat man, anders als beim linearen Resonator, beim Ringlaser laufende Wellen. Die Resonanzfrequenzen für die verschiedenen Umlaufsrichtungen $\omega^{(+)}$ und $\omega^{(-)}$ sind durch die Bedingung gegeben, daß eine ganze Anzahl von Wellenlängen in den Resonator hineinpaßt. Rotiert das Interferometer, so ändert sich dessen effektive Resonatorlänge und die Randbedingungen lauten dann [8]

$$n\lambda^{(\pm)} = p^{(\pm)} = p \pm v_m t^{(\pm)} \tag{2.11}$$

Dies führt zu einer Frequenzdifferenz $\Delta\omega := \omega^{(-)} - \omega^{(+)}$, die in Form eines Schwebungssignals beobachtet werden kann.
Mit Gl.(2.11) finden wir:

$$\Delta\omega = 2\pi c\left(\frac{1}{\lambda^{(-)}} - \frac{1}{\lambda^{(+)}}\right) = 2\pi c n\left(\frac{1}{p^{(-)}} - \frac{1}{p^{(+)}}\right) \cong$$
$$\cong \frac{2\pi c}{\lambda}\cdot\frac{p^{(+)} - p^{(-)}}{p} \tag{2.12}$$
$$= \omega\,\frac{\Delta p}{p}$$

wobei $\Delta p := p^{(+)} - p^{(-)} = v_m(t^{(+)} + t^{(-)})$ ist.

Die Verallgemeinerung von Gl.(2.5) auf beliebige Interferometer

$$t^{(+)} + t^{(-)} = \frac{2p}{c} + O\left(\left(\frac{v_m}{c}\right)^2\right)$$

liefert dann zusammen mit (2.9) aus (2.12) in niedrigster Ordnung

$$\Delta\omega = \frac{4\vec{A}\cdot\vec{\Omega}}{\lambda\cdot p} = \frac{4A\cdot\Omega}{\lambda\cdot p}\cos\delta \tag{2.13}$$

Die Frequenzdifferenz $\Delta\omega$ ist, wie die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$

im passiven Interferometer, proportional zur Rotationsfrequenz Ω, d.h. die Messung von $\Delta\omega$ erlaubt die Bestimmung der Rotationsfrequenz des Systems.

Berücksichtigen wir jedoch, daß wir das Sagnac Experiment in Praxis auf der Oberfläche der rotierenden Erde ausführen, so können wir weder Gl.(2.13) noch (2.10) benutzen, da in der Herleitung dieser Gleichungen keine Trägheitseffekte, wie z.B. der Einfluß der Rotation der Erde oder des Gravitationsfeldes, enthalten sind. Unser nächstes Ziel wird daher die Herleitung einer Gleichung für die Sagnac-Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ bzw. Frequenzdifferenz $\Delta\omega$ in einem Trägheitsfeld sein. Da wir es mit Lichtausbreitung in einem Nichtinertialsystem zu tun haben, müssen wir, um einen exakten Ausdruck zu erhalten, den Vorgang im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie behandeln. Da sich $\Delta\omega$ in Form eines Schwebungssignals leichter messen läßt als die Verschiebung von Interferenzstreifen, wird dies nur für ein aktives Interferometer geschehen.

3. Sagnac-Effekt - relativistische Theorie

3.1 Einleitung:

Beim Sagnac Effekt breitet sich, wie in Kapitel 2 ausgeführt, eine Lichtwelle in Richtung und eine entgegen einer rotierenden Scheibe aus. In diesem Kapitel soll dieser Prozeß im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben werden. Dabei wird der Vorgang nicht in dem euklidischen dreidimensionalen, sondern in einem vierdimensionalen Raum

$$x^0 = ct \qquad x^1 = x \qquad x^2 = y \qquad x^3 = z$$

betrachtet, in dem die Zeitkoordinate x^0, den Raumkoordinaten x^i gleichgestellt ist. Das Linienelement ds^2 ist eine

allgemeine quadratische Form der dx^μ, d.h.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \qquad (3.1)$$

wobei die $g_{\mu\nu}$ Funktionen der Koordinaten sein können. (Dabei benutzen wir die Einsteinsche Summenkonvention und summieren über doppelt auftretende Indizis. $\mu,\nu \in \{0,1,2,3\}$; $i,k \in \{1,2,3\}$).
Anders als in der speziellen Relativitätstheorie enthält jetzt die Matrix $(g_{\mu\nu})$ im allgemeinen auch Nebendiagonalelemente. Die $g_{\mu\nu}$ stellen die sogenannte Metrik des Raumes dar, und beinhalten alle Gravitationserscheinungen, hervorgerufen durch Massen oder durch Trägheitskräfte auf Grund von Beschleunigungen des Systems.

3.2 Sagnac-Frequenzverschiebung:

Die Sagnac-Frequenzdifferenz $\Delta\omega := \omega^{(-)} - \omega^{(+)}$ in der weiter unten beschriebenen Schwachfeld-Näherung wurde in mehreren Arbeiten [5], [9], [10] abgeleitet; wir wollen jedoch eine Formel für $\Delta\omega$ angeben, die auch für starke Gravitationsfelder, wie sie z.B. in der Nähe von schwarzen Löchern auftreten, gültig ist. Dabei nehmen wir an, daß die metrischen Fundamentalkoeffizienten $g_{\mu\nu}$ keine explizite Funktion der "Zeit" x° sind. Da die Wellenlänge des Lasers klein ist gegen die Länge des Resonators, der Ausdehnung des Lichtstrahls und der Distanz, über die sich die Gravitationsfelder ändern, genügt es, von der Eikonalgleichung für das Vektorpotential $\vec{A}$ auszugehen. Sie lautet bei gegebener Metrik $g_{\mu\nu}$ [10], [11]

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \qquad (3.2)$$

wenn S das Eikonal der z-Komponente des Vektorpotentials $\vec{A}$ bezeichnet, das folgendermaßen definiert ist:

$$A_3 = A_z = A_0\, e^{iS}$$

Für den Vierwellenvektor

$$k_\mu = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right)$$

gilt die Energie-Impulserhaltung

$$g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k_\mu \cdot k^\mu = 0$$

Daher folgt aus Gl. (3.2) sofort

$$k_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}$$

woraus wir durch Multiplikation mit dx^μ das vollständige Differential von S erhalten.

$$k_\mu \cdot dx^\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}\, dx^\mu = dS$$

Die beiden Lichtstrahlen sollen zum Zeitpunkt $x^\circ = 0$ vom Raumpunkt $\vec{r}_0$ ausgehen und je nach Umlaufsrichtung mit "+" bzw. "-" bezeichnet für $X^{\circ(+)} = cT^{(+)}$ bzw. $X^{\circ(-)} = cT^{(-)}$ dorthin zurückkehren. Die Lichtausbreitung auf dem Kreis $\vec{r}_{Kreis}$ parametrisieren wir durch die Koordinatenzeiten $x^{\circ(\pm)}$. Wir finden somit

$$\begin{aligned} S^{(+)} &= \oint k_\mu^{(+)} dx^\mu = \int_0^{cT^{(+)}} k_0^{(+)}\left(\vec{r}_{Kreis}(x^{\circ(+)})\right) dx^{\circ(+)} + \int_0^{cT^{(+)}} k_i^{(+)}\left(\vec{r}_{Kreis}(x^{\circ(+)})\right) \frac{dx^i}{dx^{\circ(+)}} dx^{\circ(+)} \\ &= \int_0^{cT^{(+)}} k_0^{(+)}\left(\vec{r}_{Kreis}(x^{\circ(+)})\right) dx^{\circ(+)} + \oint k_i^{(+)}\left(\vec{r}_{Kreis}\right) dx^i \\ &= \int_0^{cT^{(+)}} k_0^{(+)} dx^{\circ(+)} + \int_0^{2\pi} k_\phi^{(+)}\, d\phi \qquad (3.3a) \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, daß sich das

Licht auf einer Kreisbahn mit Radius ρ ausbreitet und daher die Wellenvektoren k_i nur eine Azimutalkomponente haben.

$$S^{(-)} = \int_0^{cT^{(-)}} k_0^{(-)} dx^{0(-)} + \int_0^{2\pi} k_\phi^{(-)} d\phi \qquad (3.3b)$$

Da das Eikonal S ein Skalar ist, erhält man folgende Resonanzbedingung [10]

$$S^{(+)} = S^{(-)} .$$

Der Laser steht innerhalb des Resonators (aktives Interferometer). Folglich werden die Moden durch folgende Bedingung fixiert [5]

$$k_\phi^{(+)} = k_\phi^{(-)}$$

Mithin

$$\int_0^{cT^{(+)}} k_0^{(+)}\left(\vec{r}_{Kreis}(x^{0(+)})\right) dx^{0(+)} = \int_0^{cT^{(-)}} k_0^{(-)}\left(\vec{r}_{Kreis}(x^{0(-)})\right) dx^{0(-)} \qquad (3.4)$$

Mit Hilfe des Linienelements

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (3.5)$$

können wir die Parametrisierung durch die Koordinatenzeiten auf ein rein räumliches Linienintegral zurückführen. Gl.(3.5) läßt sich durch quadratische Ergänzung folgendermaßen umformen

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i\right)^2 - \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right) dx^i dx^j \qquad (3.6)$$

Den letzten Term, der wie in [11] gezeigt, nur räumliche Komponenten enthält, kürzen wir folgendermaßen ab:

$$dl^2 := \gamma_{ij}\, dx^i dx^j := \left(\frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right) dx^i dx^j$$

Da für Lichtausbreitung das Linienelement ds^2 verschwindet, folgt aus Gl.(3.6)

$$dx^{0(\pm)} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \pm \frac{|dl|}{\sqrt{g_{00}}} \qquad (3.7)$$

wobei das "±" Zeichen für die jeweilige Umlaufsrichtung genommen werden muß. Damit folgt aus Gl.(3.4)

$$-\oint \omega_w^{(+)} \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i + \int_0^L \frac{\omega_w^{(+)}}{\sqrt{g_{00}}} |dl| = -\oint \omega_w^{(-)} \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i - \int_L^0 \frac{\omega_w^{(-)}}{\sqrt{g_{00}}} |dl| \qquad (3.8)$$

wobei

$$k_0^{(\pm)} = \frac{\partial S^{(\pm)}}{\partial x^{0(\pm)}} = \frac{\omega^{(\pm)}}{c}$$

die in der Koordinatenzeit $x^{0(\pm)}$ gemessene Frequenz bezeichnet. Die im Sagnac Versuch gemessene Frequenzdifferenz $\Delta\omega_E$ ist aber die in der Eigenzeit τ gemessene Frequenzdifferenz. Für den Zusammenhang zwischen x^0 und τ gilt nach [11]

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

Damit folgt sofort

$$\omega_E = \frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial S}{\partial x^0}\frac{dx^0}{d\tau} = c\,\frac{\partial S}{\partial x^0}\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{\omega_w}{\sqrt{g_{00}}}$$

und schließlich für die Sagnac-Frequenzdifferenz $\Delta\omega_E$

$$\Delta\omega_E = \omega_E^{(-)} - \omega_E^{(+)} = \frac{\omega_w^{(-)} - \omega_w^{(+)}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{\Delta\omega_w}{\sqrt{g_{00}}}$$

Die Frequenz des Lasers in Abwesenheit von Gravitationsfeldern sei ω. Die Frequenzen $\omega_w^{(\pm)}$ drücken wir durch ω und $\Delta\omega_E$ gemäß

$$\omega_w^{(+)} = \omega - \frac{1}{2}\Delta\omega_w = \omega - \frac{1}{2}\Delta\omega_E\sqrt{g_{00}}$$
$$\omega_w^{(-)} = \omega + \frac{1}{2}\Delta\omega_w = \omega + \frac{1}{2}\Delta\omega_E\sqrt{g_{00}}$$

aus und finden so aus Gl.(3.8)

$$-\omega\oint\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i-\frac{1}{2}\Delta\omega_E\oint\frac{g_{oi}}{\sqrt{g_{oo}}}dx^i+\omega\int_0^L\frac{dl}{\sqrt{g_{oo}}}-\frac{1}{2}\Delta\omega_E\int_0^L dl=$$

$$=-\omega\oint\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i+\frac{1}{2}\Delta\omega_E\oint\frac{g_{oi}}{\sqrt{g_{oo}}}dx^i-\omega\int_L^0\frac{dl}{\sqrt{g_{oo}}}-\frac{1}{2}\Delta\omega_E\int_L^0 dl\,.$$

Wegen

$$\oint\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i=-\oint\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i$$

und

$$\int_0^L dl=-\int_L^0 dl$$

erhalten wir schließlich

$$\Delta\omega_E=-2\omega\,\frac{\oint\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i}{\int_0^L dl}\qquad(3.9)$$

In dieser Ableitung ist angenommen, daß die metrischen Fundamentalkoeffizienten $g_{\mu\nu}$ keine explizite Funktion der Zeit x° sind und somit ein stationäres Gravitationsfeld vorliegt. Anderenfalls würden beide Integrale in Gl.(3.9) davon abhängen, längs welcher Weltlinie sie zwischen zwei gegebenen räumlichen Punkten erstreckt werden. Im Fall eines stationären Gravitationsfeldes ist

$$\Delta L=-2\oint\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i\qquad(3.10)$$

zeitunabhängig und wir können auch die Integration

$$\int_0^L dl=\int\sqrt{\left(\frac{g_{oi}\,g_{oj}}{g_{oo}}-g_{ij}\right)dx^i dx^j}\equiv L$$

ausführen. Dann läßt sich Gl.(3.9) analog zu Gl.(2.12)

in die Form

$$\Delta\omega_E=\omega\,\frac{\Delta L}{L}\qquad(3.11)$$

bringen.

3.3 ΔL und die Synchronisation von Uhren:

In der speziellen Relativitätstheorie ist es global, d.h. im gesamten Raum möglich, Uhren, die sich in verschiedenen Raumpunkten befinden, in Übereinstimmung zu bringen, sie zu synchronisieren.
In der allgemeinen Relativitätstheorie dagegen kann "Gleichzeitigkeit" zunächst nur in einem unendlich kleinen Bereich des Raumes definiert werden [11]. In dem Sonderfall eines stationären Gravitationsfeldes ist Synchronisation von Uhren längs eines nichtgeschlossenen Weges $C_{P_1P_2}$ zwischen zwei Raumpunkten P_1,P_2 möglich. Zwei Ereignisse an verschiedenen Raumpunkten P_1 P_2 werden nach Landau [11] als gleichzeitig definiert, wenn für die Differenz der Weltzeit $\Delta x^\circ_{P_1P_2}$ gilt.

$$\Delta x^\circ_{P_1P_2}=-\int_{C_{P_1P_2}}\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i\qquad(3.12)$$

Beim Sagnac Effekt benutzen wir jedoch einen geschlossenen Weg, z.B. einen Kreis. Bei Rückkehr zum Ausgangspunkt P finden wir gemäß (3.12) je nach Umlaufsrichtung für Δx°_{PP}

$$\Delta x^{\circ\,(+)}_{PP}=-\oint\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i\qquad\Delta x^{\circ\,(-)}_{PP}=-\oint\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i$$

Folglich zeigen drei in ein und demselben Raumpunkt P aufgestellte, so „synchronisierte" Uhren drei verschiedene Weltzeiten an:

$$x^{\circ\,(+)}=-\oint\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i\qquad x^{\circ\,(0)}=0\qquad x^{\circ\,(-)}=-\oint\frac{g_{oi}}{g_{oo}}dx^i$$

Die Synchronisation ist somit verloren gegangen. Die Differenz $\Delta x^{(0)}$ zwischen den Anzeigen der in "+" und "-" Richtung „synchronisierten" Uhren ist

$$\Delta x^0 = -2 \oint \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i = \Delta L$$

ΔL kann somit der Verlust an Synchronisation der Zeit [11] bezeichnet werden. Eine kleine Umformung von Gl.(3.11) liefert:

$$\Delta x^0 = \frac{\Delta\omega_E \cdot L}{\omega} = \Delta L \qquad (3.13)$$

Der Sagnac Effekt stellt demnach eine Möglichkeit dar, den von Landau angegebenen "Verlust der Synchronisation der Zeit" durch Messung von $\Delta\omega_E$, L und ω zu testen.

3.4 Näherung schwacher Gravitationsfelder:

Kehren wir nun zum Ausdruck (3.9) für die Sagnac Frequenzdifferenz $\Delta\omega_E$ in einer beliebigen Metrik $g_{\mu\nu}$ zurück.
Die in unserem Sonnensystem auftretenden Gravitationsfelder sind durchweg schwache Felder. Daher genügt es für die Metrik die Form

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

anzunehmen, [1], wobei $\eta_{\mu\nu}$ die Metrik der ebenen Raum-Zeit und $h_{\mu\nu}$ eine kleine Korrektur ist, die zum Beispiel auf Grund des Gravitationsfeldes der Erde und der Rotation der Scheibe auftritt. Berücksichtigen wir nur Terme linear in h, so folgt wegen

$$g_{oi} = h_{oi}$$

$$[g_{oo}]^{-1} = (1 + h_{oo})^{-1} \cong 1 + O(h)$$

und

$$L(\eta_{ij} + h_{ij}) = L(\eta_{ij}) + O(h) = P + O(h)$$

(P Länge des Resonators in Abwesenheit von Trägheitseffekten)

aus Gl.(3.9):

$$\Delta\omega = -\frac{2c}{\lambda P} \oint h_{oi}\, dx^i + O(h^2)$$

und mit $(\vec{h})_i = h_{oi}$

$$\Delta\omega = -\frac{2c}{\lambda P} \oint \vec{h} \cdot d\vec{x} \qquad (3.14)$$

3.5 Festlegung der Metrik:

Um Gleichung (3.14) benutzen zu können, müssen wir das "Gravitationspotential" $\vec{h} = (h_{01}, h_{02}, h_{03})$ kennen. Dieses läßt sich bei gegebener Metrik aus dem Linienelement ds^2

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}\, dx^0 dx^i + g_{ij}\, dx^i dx^j$$

des speziellen Problems wegen $g_{0i} = h_{0i}$ leicht ablesen.
Im Fall des Sagnac-Versuchs, weit entfernt von rotierenden schweren Körpern, muß somit das Linienelement ds^2 in einem gleichförmig rotierenden System bekannt sein. In einem Inertialsystem lautet es unter Verwendung von Zylinderkoordinaten

$$x^0 = ct \quad , x^1 = r \qquad x^2 = \phi \qquad x^3 = z$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2$$

Hieraus finden wir durch die Transformation

$$x^{\bar{0}} = ct' = ct \quad , x^{\bar{1}} = r' = r \qquad x^{\bar{3}} = z' = z$$

$$x^{\bar{2}} = \phi' = \phi + \Omega t$$

in ein um die z-Achse gleichförmig rotierendes System sofort

$$ds^2 = \left(1 - \left(\frac{r\Omega}{c}\right)^2\right)(cdt)^2 - dr^2 - r^2(d\phi')^2 - 2\frac{r^2\Omega}{c}(cdt)d\phi' - dz^2$$

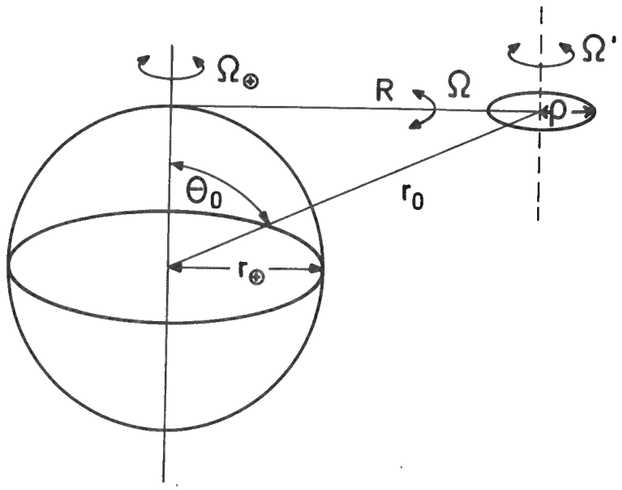
Setzen wir $r = \rho = \text{const}$, so folgt:

$$h_{02} = -\frac{\rho^2 \Omega}{c} \; ; \; h_{01} = h_{03} = 0$$

und zusammen mit (3.14) die bekannte Sagnac Frequenzdifferenz $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = \frac{4A\Omega}{\lambda P} \tag{2.11}$$

Eine Modifikation dieses Ergebnisses ist zu erwarten, wenn außer der Rotation des Interferometers auch das Gravitationsfeld und die Eigenrotation der Erde berücksichtigt werden sollen. Das Interferometer rotiere mit einer Frequenz Ω, unter dem Winkel Θ_0 zwischen Erdachse und Verbindung zum Mittelpunkt und im Abstand $R := r_0 \sin\Theta_0$ um die Erdachse. Außerdem führe es eine Eigenrotation mit der Frequenz Ω' aus, wobei die Rotationsachse parallel zur Erdachse ist (siehe Figur 3). Die Eigenrotationsfrequenz der Erde sei $\Omega_\oplus$.



Figur 3: Rotierende Erde mit doppelt rotierendem Interferometer.

(Konkret werden wir nur Experimente auf der Erde betrachten und daher $r_0 = r_\oplus$, $\Omega = \Omega_\oplus$ setzen).

Für die weiteren Rechnungen benutzen wir den sogenannten "Post Parametrized - Newtonian" -Formalismus, kurz PPN-Formalismus [1],[14]. Außer Einstein haben noch Brans und Dicke, Jordan und Ni allgemeine Gravitationstheorien entwickelt. In der Näherung für schwache Gravitationsfelder (für Tests der Theorien in unserem Sonnensystem ausreichend) gehen diese verschiedenen Feldgleichungen in eine Gleichung über, die von verschiedenen Parametern, den PPN-Parametern abhängt. Der Wert der einzelnen Parameter wird von den verschiedenen Theorien unterschiedlich vorausgesagt. Daher könnte man durch Messung dieser Parameter die einzelnen Theorien testen.
Im PPN-Formalismus lautet das Linienelement ds^2 für den Fall der als kugelförmig angenommenen Erde mit Masse $M_\oplus$, Radius $r_\oplus$ und Eigenrotationsfrequenz $\Omega_\oplus$: [5]

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1+\gamma\frac{r_s}{r}\right)\left(dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2\sin^2\Theta\, d\phi^2\right)\right] \\ &+ 2ac\,\frac{r_s}{r}\left(\frac{7}{8}\Delta_1 + \frac{1}{8}\Delta_2\right) d\phi\, dt \end{aligned} \tag{3.15}$$

dabei bezeichnen $r_s = \frac{2M_\oplus G}{c^2}$ den Schwarzschildradius und G die allgemeine Gravitationskonstante und es ist $a = 2/5\; r_\oplus^2 \Omega_\oplus \frac{\sin^2\Theta}{c}$.

Die auftretenden Parameter γ, Δ_1 und Δ_2 sind die PPN-Parameter; in der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein nehmen sie den Wert 1 an. [16]
Gleichung (3.15) setzt sich aus zwei Termen zusammen:

- Der Anteil in eckigen Klammern ist das bekannte Schwarzschildsche Linienelement einer ruhenden kugelförmigen Masse [1]. Der Krümmungsparameter γ drückt dabei die durch eine ruhende Einheitsmasse verursachte Raumkrümmung aus.
- Der zweite Term in Gl.(3.15) ist ein Kopplungsterm zwischen Raum- und Zeitkomponente. Er enthält die Wirkung der Eigenrotation der Erde ($a \div \Omega_\oplus$) auf ein Inertialsystem,

den sogenannten "Mitführ" oder Lense-Thirring Effekt [2]. Die Größen Δ_1, Δ_2 werden als Mitführ-Parameter bezeichnet. Dieses Lense-Thirring Feld ist in der Elektrodynamik dem Magnetfeld einer rotierenden homogen geladenen Kugel analog [15].

Um Gleichung (3.14) benutzen zu können, benötigen wir die metrischen Fundamentalkoeffizienten h_{oi} im rotierenden Interferometer. Dazu muß das Linienelement ds^2 (3.15) in das sowohl um die Erd- als auch um die eigene Achse rotierende System transformiert werden. Da sich dort das Licht auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius ρ ausbreitet, genügen uns zur Beschreibung die Koordinaten $x^{\bar{3}} = ct$ und $x^{\bar{1}} = \phi'$. Gemäß Ref. [5] finden wir dann:

$$g_{o1} = h_{o1} = -\frac{1}{c}\left\{(1+\gamma\frac{r_s}{r})\left[\rho^2(\Omega'+\gamma_o\Omega) + \gamma_o\Omega R\rho\cos(\Omega' t+\phi')\right]\right.$$
$$\left. - \alpha c\gamma_o\frac{r_s}{r}\left(\frac{7\Delta_1}{8}+\frac{\Delta_2}{8}\right)\left[\rho^2+R\rho\cos(\Omega' t+\phi')\right]\frac{1}{\tilde{r}^2}\right\}$$

mit
$$\gamma_o := \left[1-\left(\frac{R\Omega}{c}\right)^2\right]^{-1/2}$$

und $\tilde{r} := r_o \sin\Theta_o$.

Mithin sind diese, wie auch die anderen, metrischen Fundamentalkoeffizienten zeitabhängig. Streng genommen können wir Gleichung (3.14) nicht benützen, da sie nur für stationäre Gravitationsfelder gilt. Wegen der Periodizität von h_{o1} ist es eine sinnvolle Annahme, zunächst über eine Periode T zu mitteln

$$\langle h_{o1}\rangle_t(\phi') := \frac{1}{\pi}\int_0^\pi dt\; h_{o1}(t,\phi')$$

und mit diesen Größen Gleichung (3.14) zu benutzen. Für $\Delta\omega$ finden wir schließlich, wobei wir $R \gg \rho$ annehmen und wegen $r_s \ll r$ Terme kleiner als $\frac{r_s}{r}\Omega_\oplus$ vernachlässigen [5]

$$\Delta\omega = \frac{4A}{\lambda P}\left\{(\Omega'+\Omega) - \frac{1}{2}(1+\gamma)\frac{r_s}{r}\Omega\sin^2\Theta_o\right.$$
$$\left. - \frac{2}{5}\frac{r_s r_\oplus^2}{r_o^3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\Theta_o\right)\left(\frac{7\Delta_1}{8}+\frac{\Delta_2}{8}\right)\Omega_\oplus\right\} \qquad (3.16)$$

Der erste Term rührt offensichtlich von der zweifachen Rotation des Ringlasers her. Gleichung (2.11) zeigt, daß nicht von der Lage des Drehpunkts, sondern nur vom $\cos\delta$, wobei δ der Winkel zwischen Flächennormalen und Rotationsachse ist, abhängt. Wegen $\delta = o$, ist sofort einsichtig

$$\Delta\omega \doteq \Omega + \Omega_\oplus$$

Der nächste Term beinhaltet die Tatsache, daß wir das Experiment in einem durch eine Masse gekrümmten Raum ausführen.
Der dritte Term, linear in $\Omega_\oplus$, berücksichtigt die Rotation der Erde und ist eine Manifestation des Lense-Thirring Effekts.
Beschränken wir uns auf Experimente auf der Erde, setzen folglich

$$r_o = r_\oplus \qquad \Omega = \Omega_\oplus$$

so wird Gl. (3.16) zu:

$$\Delta\omega = \frac{4A}{\lambda P}\left\{(\Omega'+\Omega_\oplus) - \frac{1}{2}(1+\gamma)\frac{r_s}{r_\oplus}\Omega_\oplus\sin^2\Theta_o\right.$$
$$\left. - \frac{2}{5}\frac{r_s}{r_\oplus}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\Theta_o\right)\left(\frac{7\Delta_1}{8}+\frac{\Delta_2}{8}\right)\Omega_\oplus\right\} \qquad (3.17)$$

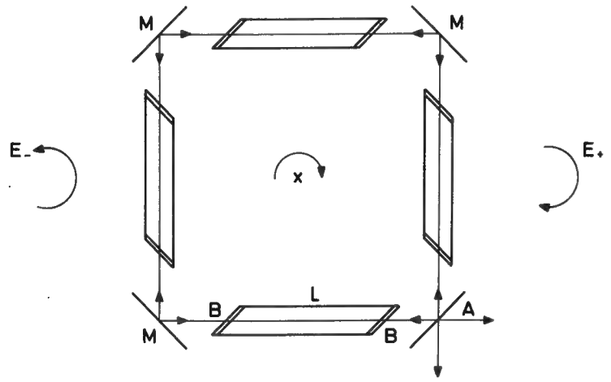
Über Gleichung (3.17) ist es im Prinzip möglich, die Parameter γ, Δ_1, Δ_2 zu messen [5], [9], [10]. Jedoch muß die Größenordnung der einzelnen Terme berücksichtigt werden. So ist der Beitrag herrührend vom γ-Term etwa $1{,}4\cdot10^{-9}\cdot\frac{1}{2}(1+\gamma)\Omega_\oplus$ und der vom Lense Thirring Effekt ungefähr $5.6\cdot10^{-10}\left(\frac{7\Delta_1}{8}+\frac{\Delta_2}{8}\right)\Omega_\oplus$ [10]. Bevor man jedoch die Frage der Meßbarkeit dieser Effekte abschätzt, muß man den Effekt der endlichen Strahlbreite [17], Terme höherer Ordnung in h und mögliche experimentelle Störeffekte berücksichtigen.

4. Kleiner Exkurs in die Ringlasertheorie

Die Überlegungen in den letzten Kapiteln haben gezeigt, daß Ringlaser geeignet sind, um Rotationen eines Systems zu messen. Es ist jedoch die Frage, ob sie empfindlich genug sind, um diese kleinen Frequenzen zu messen. Um diese Frage beantworten zu können, wiederholen wir in diesem Kapitel die Theorie des Ringlasers.

4.1 Einleitung:

W.M. Macek und D.T.M. Davis benutzten 1963 zur Messung der Rotationsfrequenz eines relativ zu einem Inertialsystem rotierenden Bezugssystems einen Ringlaser [18].



Figur 4: Ringlaser nach Macek und Davis (1963)

Beim linearen Laser setzt sich das Feld aus zwei gegenläufigen Wellen zusammen, die, da sie gleiche Amplituden und Frequenzen haben, eine stehende Welle bilden. Beim Ringlaser jedoch sind die beiden Wellen, je nach Umlaufsrichtung mit "+" bzw. "-" bezeichnet, voneinander unabhängig und können verschiedene Amplituden $\mathcal{E}_{\pm}$ und Frequenzen $\varphi_{\pm}$ haben. Das im

Resonator herrschende E-Feld ist also die Überlagerung zweier fortschreitender Wellen E_+ und E_- mit verschiedenen Amplituden und Frequenzen [8].

In Kapitel 4.2 wird die Wellengleichung für das E-Feld im rotierenden Ringlaser behandelt, in Kapitel 4.3 die selbstkonsistenten Gleichungen. Die Kopplung zwischen der E_+ und E_- Welle auf Grund von Rückstreuung an Spiegeln (backscattering) und von Spiegelverlusten wird im Abschnitt 4.4 behandelt, die Polarisation des Lasermediums in 4.5. Abschließend geben wir die Bewegungsgleichung für die Phase zwischen E_+ und E_- an.

4.2 Wellengleichung des elektrischen Feldes im rotierenden Ringlaser

In der halbklassischen Gaslasertheorie [19] wird das elektromagnetische Feld durch die Maxwellgleichungen beschrieben. Aus diesen läßt sich die Wellengleichung für das skalare elektrische Feld E = E(z,t) in einem Intertialsystem gewinnen [8]

$$c^2 \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{\partial E(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2} \qquad (4.1)$$

Hier bezeichnet z die Ortskoordinate entlang des optischen Weges des Lasers. P die Polarisation und σ die Leitfähigkeit. Wir nehmen an, daß das E-Feld linear polarisiert sei, z.B. durch Verwendung von Brewsterfenster und sich durch ebene Wellen in z-Richtung darstellen läßt. Der phänomenologische Strom

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

beinhaltet die Resonatorverluste.
Wenn jedoch der Ringlaser mit der Frequenz Ω rotiert, so geschieht die Lichtausbreitung in einem Nichtinertialsystem. Gleichung (4.1) ist somit für die Beschreibung des elektrischen Feldes nicht anwendbar. Es sollen vielmehr die Maxwellgleichungen im Formalismus der allgemeinen Relativitätstheorie verwendet werden, wie sie in Ref. [20,21] hergeleitet werden. Für unsere Zwecke ist aber nicht der gesamte kovariante Formalismus nötig. Wir sind nur am Fall niedriger Rotationsgeschwindigkeiten, d.h. $\frac{|\vec{\Omega}\times\vec{r}|}{c} \ll 1$, also an Effekten linear in $\frac{v}{c}$, interessiert. Menegozzi und Lamb [22] haben jedoch gezeigt, daß im Fall niedriger Rotationsgeschwindigkeit die Rotation des Lasers in Gl. (4.1) lediglich einen Zusatzterm schafft und die Wellengleichung für das elektrische Feld E dann lautet:

$$c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial t} + 2\left[(\vec{\Omega}\times\vec{r})\vec{e}_z\right] \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \,, \qquad (4.2)$$

Die Lösung von Gl. (4.2) muß zudem der Periodizitätsbedingung des Ringlasers

$$E(z,t) = E(z+L,t) \qquad (4.3)$$

genügen, wobei L die Länge des Resonators bezeichnet.

4.3 Herleitung der "selbstkonsistenten Gleichungen"

Für das elektrische Feld E und die durch sie induzierte Polarisation P nehmen wir die Formen

$$E(z,t) = \frac{1}{2}\left[E_+(t)U_+(z) + E_-(t)U_-(z)\right] + c.c. \qquad (4.4)$$

$$P(z,t) = \frac{1}{2}\left[P_+(t)U_+(z) + P_-(t)U_-(z)\right] + c.c. \qquad (4.5)$$

an, mit

$$E_\pm(t) = \mathcal{E}_\pm(t)\exp\left[-i(\nu_\pm t + \varphi_\pm(t))\right] \qquad (4.6)$$

$$P_\pm(t) = \mathcal{P}_\pm(t)\exp\left[-i(\nu_\pm t + \varphi_\pm(t))\right] \qquad (4.7)$$

$$U_\pm(z) = \exp\left[-i(\pm kz)\right] \qquad (4.8)$$

Durch den Ansatz (4.4.) haben wir das elektrische Feld E im Ringlaser in zwei gegenläufige Wellen E_+ und E_- zerlegt. Wir setzen Gl (4.4) - (4.8) in die Wellengleichung (4.2) ein, führen die Differentiationen aus und behalten nur die ersten Ableitungen $\dot{\mathcal{E}}_\pm$ und $\dot{\varphi}_\pm$. Diese Näherung für langsam veränderliche Envelopen und Phasen [8] liefert aus Gl. (4.2) nach Multiplikation von $\exp\left[i(\nu_\pm t + \varphi_\pm)\right]$ und Projektion auf $U_\pm(z)$ die beiden Gleichungen

$$\left\{c^2k^2 - (\nu_\pm + \dot{\varphi}_\pm)^2 - i\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\nu_\pm \mp 2k\nu_\pm \frac{1}{L}\int_0^L d\vec{z}\,(\vec{\Omega}\times\vec{r})\right\}\mathcal{E}_\pm - 2i\nu_\pm\dot{\mathcal{E}}_\pm = \frac{\nu_\pm^2}{\varepsilon_0}\mathcal{P}_\pm \,. \qquad (4.9)$$

Da sich die Frequenzen $\upsilon_\pm$ der Wellen $E_\pm$ für $\frac{|\vec{\Omega}\times\vec{r}|}{c} \ll 1$ nur wenig von der Resonanzfrequenz des stationären Resonators

$$\Omega_0 = c k = \pi \frac{c}{L}$$

unterscheiden, gilt:

$$\Omega_0^2 - \left(\nu_\pm + \dot{\varphi}_\pm\right)^2 \cong 2\nu_\pm\left(\Omega_0 - \left(\nu_\pm + \dot{\varphi}_\pm\right)\right) \qquad (4.10)$$

und wir finden mit (2.9) aus (4.9):

$$2\nu_\pm\left\{\left(\Omega_0 - \left(\nu_\pm + \dot{\varphi}_\pm\right) - i\frac{\alpha}{2\varepsilon_0} \mp \frac{2\vec{A}\cdot\vec{\Omega}}{\lambda\cdot L}\right\}\mathcal{E}_\pm - 2i\nu_\pm\dot{\mathcal{E}}_\pm \cong \varepsilon_0\nu_\pm\nu\,\mathcal{P}_\pm \qquad (4.11)$$

wobei wir noch

$$\nu_\pm^2\,\mathcal{P}_\pm \cong \nu_\pm\nu\,\mathcal{P}_\pm$$

benutzt haben.
Teilen wir noch durch $(2\nu_\pm)$ und nehmen Real- und Imaginärteil, so erhalten wir die <u>selbstkonsistenten Gleichungen</u>

$$\dot{\mathcal{E}}_\pm + \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}\mathcal{E}_\pm = -\frac{\varepsilon_0\nu}{2}\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{P}_\pm\right) \qquad (4.12)$$

$$\left(\nu_\pm + \dot{\varphi}_\pm\right) = \left(\Omega_0 \mp \frac{2\vec{A}\cdot\vec{\Omega}}{\lambda\cdot L}\right) - \frac{\nu}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{Re}\,\mathcal{P}_\pm}{\mathcal{E}_\pm} \qquad (4.13)$$

Gleichung (4.12) drückt die Enrgieerhaltung aus [8]. Nach Gl. (4.13) äußert sich die Rotation des Lasers in einer Verschiebung der Resonator-Resonanzfrequenz Ω_0 um die halbe Sagnac-Frequenz.

$$\Omega_\pm = \Omega_0 \mp \frac{2\vec{A}\cdot\vec{\Omega}}{\lambda\cdot L}$$

Dieses Ergebnis entspricht ganz den heuristischen Betrachtungen von Kapitel 2. Bei Kenntnis der Polarisationen $\mathcal{P}_\pm$ als Funktion von $\mathcal{E}_\pm$ bestimmen Gl. (4.12) und Gl. (4.13) die Feldamplituden $\mathcal{E}_\pm$ und die Frequenzen $\upsilon_\pm + \dot{\varphi}_\pm$. Daher werden wir uns im nächsten Kapitel etwas näher mit der Polarisation P befassen.

4.4. Rückstreuung - lokale Spiegelverluste

Experimente mit Ringlaser zeigen, daß es unter bestimmten Arbeitsbedingungen notwendig ist, den Effekt der Reflektion der Strahlung an den Spiegeln des Resonators oder an Schmutzteilchen - <u>Rückstreuung</u> - aber auch lokale Spiegeldefekte zu berücksichtigen [23]. Diese Effekte übertragen Strahlung von einer Ausbreitungsrichtung auf die andere, verursachen also eine Kopplung zwischen den beiden gegenläufigen Wellen. Dabei überwiegt die Wirkung der Spiegeldefekte [8]. Mathematisch kann diese Kopplung durch Addition von phänomenologischen Termen in den Amplituden und Phasengleichungen (4.12), (4.13) geschehen. Eine quantenmechanische Beschreibung, z.B. über eine Mastergleichung ist möglich [24]. Wir aber beschreiben diesen Effekt, indem wir in einer dünnen Schicht eine lineare elektrische Suszeptibilität annehmen und in die selbstkonsistenten Gleichungen einführen [25]

$$\chi(z) = \begin{cases} i|\chi_0| & \text{für } 0 \le z \le \ell \\ 0 & \text{für } \ell < z < L \end{cases} \qquad \ell \ll L \qquad (4.14)$$

D. h. wir nehmen an, daß alle Spiegelverluste an einem Punkt, der Einfachheit halber am Ursprung, auftreten sollen.

Insgesamt haben wir also für die in der Wellengleichung (4.2) als Quelle fungierende Polarisation P den Beitrag des aktiven, nichtlinearen Lasermediums $P^{nL}(z,t)$ und den der phänomenologischen, die Spiegelverluste simmulierenden, linearen Polarisation $P^L(z,t) = \varepsilon_0\,\chi(z)\,E(z,t)$ zu berücksichtigen. Wir behandeln nur P^{nL} quantenmechanisch (Kapitel 4.5) und beginnen mit der linearen Polarisation P^L. Durch Multiplikation mit $\exp\left[i(\nu_\pm t + \varphi_\pm)\right]\cdot\exp\left[\mp ikz\right]$ und Integration über z folgt aus Gl. (4.5)

$$\mathcal{P}_\pm^L(t) = \exp\left[i(\nu_\pm t + \varphi_\pm)\right]\frac{2\varepsilon_0}{L}\int_0^L dz\,\chi(z)\,E(z,t)\,e^{\mp ikz}$$

Mit Gl.(4.14) und Gl.(4.4) erhalten wir hieraus unter Verwendung von $\ell \ll L$ und Vernachlässigung der schnell veränderlichen Terme

$$\mathcal{P}_\pm^L(t) = i\varepsilon_0|\chi_0|\frac{\ell}{L}\mathcal{E}_\pm(t) + i\varepsilon_0|\chi_0|\frac{\ell}{L}\mathcal{E}_\mp\exp\left[\pm i\varphi(t)\right] \qquad (4.15)$$

wobei

$$\varphi(t) := (\nu_+ - \nu_-)t + \varphi_+(t) - \varphi_-(t) \qquad (4.16)$$

die relative Phasendifferenz zwischen den beiden Wellen bezeichnet. Aus Gleichung (4.15) ist ersichtlich. daß die Polarisation $P_\pm$ eine Kopplung zwischen E_+ und E_- verursacht. Mit Gl. (4.15) folgt schließlich aus (4.13) die Bewegungsgleichung für die relative Phase zwischen den beiden Wellen

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{4\vec{A}\cdot\vec{\Omega}}{\lambda\cdot L} + \frac{\nu|\chi_0|}{2}\frac{l}{L}\left(\frac{\mathcal{E}_+}{\mathcal{E}_-} + \frac{\mathcal{E}_-}{\mathcal{E}_+}\right)\sin\varphi(t) \qquad (4.17)$$

oder

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{4\vec{A}\cdot\vec{\Omega}}{\lambda\cdot L} + b\sin\varphi(t) \qquad (4.18)$$

wobei

$$b := \frac{\nu|\chi_0|}{2}\frac{l}{L}\left(\frac{\mathcal{E}_+^2+\mathcal{E}_-^2}{\mathcal{E}_+\mathcal{E}_-}\right) = \frac{\nu|\chi_0|}{2}\frac{l}{L}\frac{I_+ + I_-}{\sqrt{I_+\cdot I_-}} \qquad (4.19)$$

der <u>Rückstreu-Koeffizient</u> und

$$I_\pm := \frac{1}{4}\mathcal{E}_\pm^2$$

ist. Gleichung (4.18) enthält jetzt die Rotation des Lasers - Sagnac Frequenzverschiebung - und den Effekt der Rückstreuung - b - Koeffizient - , nicht aber das Lasermedium. Dies wird in Kapitel 4.5 behandelt werden.

4.5 <u>Polarisation des aktiven Mediums - Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz φ</u>

Die Polarisation des Lasermediums wird in der halbklassischen Lasertheorie in [8, 19] behandelt und wir geben hier nur die Ergebnisse an. Das aktive Medium, bestehend aus Atomen mit zwei Niveaus (a,b), wird quantenmechanisch, nämlich mit der Dichtematrix ρ, beschrieben. Dabei vernachlässigt man in dieser Ableitung den Effekt der Rotation und setzt $\Omega = o$. Für die Projektionen $\mathcal{P}_\pm$ der Polarisation P auf die einzelnen Moden "+" und "-" gilt [8]

$$\mathcal{P}_\pm(t) = 2\rho e^{i(\nu_\pm t+\varphi_\pm)}\frac{1}{L}\int_0^L dz\, e^{\mp ikz}\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, \rho_{ab}(z,\nu,t) \qquad (4.20)$$

wobei ρ die Größe des Dipolmatrixelements bezeichnet. Das Dichtematrixelement ρ_{ab} wird durch Störungstheorie gewonnen, in Gl. (4.20) eingesetzt

und sodann $\mathcal{P}_\pm$ analog dem Verfahren im Abschnitt 4.4 in die selbstkonsistenten Gleichungen (4.13) für $\Omega = o$ eingeführt, Die explizite Rechnung [8], [22], [26], ergibt für die Phasendifferenz φ die Bewegungsgleichung

$$\dot{\varphi}(t) = \sigma_+ - \sigma_- + 4\left(\tau_{-+} I_+^2 - \tau_{+-} I_-^2\right) \qquad (4.21)$$

wobei $\sigma_\pm$ und $\tau_{\pm\mp}$ die sogenannten Mode Pulling bzw. Cross-Pulling Koeffizienten bezeichnen. Fügen wir diesen Effekt zu Gl. (4.19) (also zum Sagnac - und Rückstreu - Effekt), so finden wir

$$\dot{\varphi}(t) = a + b\sin\varphi(t) \qquad (4.22)$$

wobei wir die Abkürzung

$$a := -\frac{4\vec{A}\cdot\vec{\Omega}}{\lambda\cdot L} + (\sigma_+ - \sigma_-) + 4\left(\tau_{-+} I_+^2 - \tau_{+-} I_-^2\right) \doteq \Omega \qquad (4.23)$$

benutzt haben und annehmen, daß die Intensitäten $I_\pm$ konstant sein sollen. In Kapitel 5 werden wir ausgehend von Gl.(4.22) das Einrastverhalten des Ringlaser und das Spektrum von $\cos\varphi$ behandeln.

5. Deterministisches Verhalten des Laser-Gyroskops

In diesem Kapitel untersuchen wir das deterministische Verhalten des Gyroskops, d.h. in der Bewegungsgleichung der Phasendifferenz Gl.(4.22) ist nicht die spontane Emission der Laseratome, das Rauschen des Lasers, berücksichtigt. Dieses wird in Kapitel 6 geschehen.

5.1. Einrastverhalten

Die Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz zwischen den beiden im und gegen den Uhrzeigersinn laufenden Wellen ist durch

$$\dot{\varphi} = a + b \sin\varphi \qquad (4.22)$$

gegeben. Diese Gleichung kann direkt durch Trennung der Variablen gelöst werden [8]. Hier jedoch wenden wir eine andere Methode an, um die charakteristische Einrast-Kurve des Laser-Gyroskops zu finden. Eine allgemeine Beschreibung der Methode findet sich im Anhang B. Bilden wir die 1. Ableitung nach der Zeit von Gl. (4.22)

$$\ddot{\varphi} = ab\cos\varphi + b^2\cos\varphi\sin\varphi \qquad (5.1)$$

so erhalten wir für $\varphi = \varphi(t)$ eine neue Interpretation. Gleichung (5.1) ist analog zu einer klassisch, mechanischen Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit Einheitsmasse, das sich in einem Potential $V = V(\varphi)$ bewegt. Sehen wir daher $\varphi = \varphi(t)$ als die Koordinate dieses Teilchen an, so lautet dessen Bewegungsgleichung

$$-\frac{dV}{d\varphi} = \ddot{\varphi} \qquad (5.2)$$

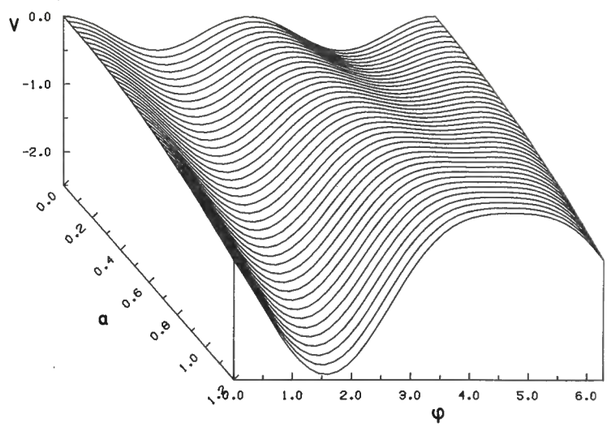
und zusammen mit Gl. (5.1) folgt:

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}(a + b\sin\varphi)^2 \qquad (5.3)$$

Hierbei haben wir die Eichung:

$$V(\varphi = 0) = -\frac{1}{2}a^2$$

benutzt. Figur 5 zeigt eine dreidimensionale Darstellung des Potentials $V = V(\varphi)$ für verschiedene a bei festem b = 1



Figur 5: Potential $V = V(\varphi)$

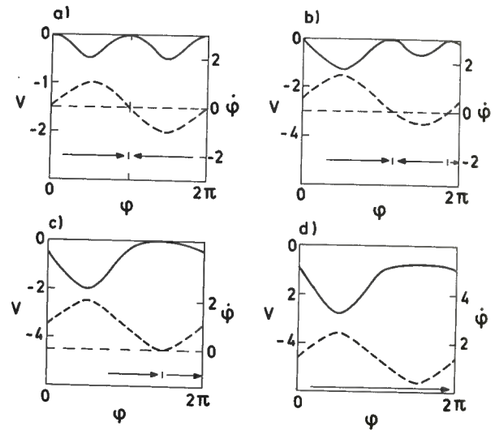
Gleichung (5.3) liefert uns den Erhaltungssatz

$$p(t) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = 0$$

der das Analogen zur gewohnten Energieerhaltung darstellt. Die Bewegung des Teilchens in $V = V(\varphi)$ ist vollständig durch die Anfangskoordinate $\varphi_0 = \varphi(t = 0)$ festgelegt. Mit Gl. (4.22) führt φ_0 zu einer "Anfangsgeschwindigkeit" $\dot{\varphi}_0$

$$\dot{\varphi}_0 = a + b\cdot\sin\varphi_0 \ .$$

Figur 6a,b,c,d zeigt das Potential V und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ in Abhängigkeit von φ für die vier Fälle a=o, a<b, a=b und a>b; b=1



Figur 6: Potential V und $\dot{\varphi}_0$ für Spezialfälle von a

Da Gleichung (4.22) periodisch in φ ist, kann φ auf den Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ eingeschränkt werden.

Betrachten wir zunächst den Fall a = o (Fig. 6a). Hier ist das Potential V vollständig symmetrisch und es gibt zwei Koordinaten $\hat{\varphi}$ mit $V(\hat{\varphi})=0$, nämlich:

$$\hat{\varphi}_1 = 0 ;$$
$$\hat{\varphi}_2 = \pi ;$$

Nehmen wir eine Anfangskoordinate φ_0 mit $\pi < \varphi_0 < 2\pi$ an, so ist die Anfangsgeschwindigkeit negativ. Daher wird das Teilchen nach links bis zu $\hat{\varphi}_2$ laufen und dort stehenbleiben, da es seine gesamte "kinetische" Energie verloren hat. Falls φ_0 zwischen o und π liegt, wird das Teilchen wegen der positiven Anfangsgeschwindigkeit nach rechts laufen, und ebenfalls bei $\hat{\varphi}_2$ stehenbleiben. Daher kann man $\hat{\varphi}_2 = \pi$ als <u>stabile</u> stationäre Lösung von (4.22) (engl. stable steady state) bezeichnen und es gilt

$$\varphi(t \to \infty) = \pi \tag{5.4}$$

Bei a < b (Fig.: 6 b) ist die Symmetrie von V verloren gegangen. $V(\hat{\varphi}) = 0$ führt nun auf zwei Lösungen

$$\hat{\varphi}_1 = 2\pi - \arcsin\frac{a}{b}$$
$$\hat{\varphi}_2 = \pi + \arcsin\frac{a}{b}$$

Die selbe Argumentation wie zuvor zeigt, daß $\hat{\varphi}_2$ stabile stationäre Lösung ist und

$$\varphi(t \to \infty) = \pi + \arcsin\frac{a}{b} \tag{5.5}$$

In Fall a = b (Fig. 6c) gibt es nur eine stationäre Lösung, die metastabil ist, und

$$\varphi(t \to \infty) = \frac{3\pi}{2} + n\,2\pi \quad , \quad n \in \{0, 1, \dots\} \tag{5.6}$$

Schließlich geht aus Figur 6d hervor, daß für a > b gilt:

$$V(\varphi) \neq 0 \qquad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

Daher wird das Teilchen oszillieren und durch Integration von (4.22) zwischen $-\pi$ und $+\pi$ erhalten wir für die Oszillationsperiode

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

Definieren wir das zeitliche Mittel von $\dot{\varphi}$ durch

$$\langle \dot{\varphi} \rangle_t := \lim_{t \to \infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t dt' \, \dot{\varphi}(t') \right\}$$

und mitteln über eine Periode T, so erhalten wir:

$$\langle \dot{\varphi} \rangle_t = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{für} \quad a \geq b \tag{5.7}$$

Dieser Bereich wird als <u>freier Bereich</u> bezeichnet.

Aus der obigen Diskussion ist außerdem offensichtlich, daß gilt:

$$\langle \dot{\varphi} \rangle_t = 0 \qquad \text{für } a \leq b \tag{5.8}$$

Diesen Bereich nennt man <u>totes Band</u> oder <u>Einrastbereich</u> und $\langle \dot{\varphi} \rangle_t$ <u>mittlere Schwebungsfrequenz</u>. Hier haben im stationären Fall ($t \to \infty$) die beiden gegenläufigen Wellen dieselbe Frequenz $\upsilon_+ = \upsilon_-$, obwohl die Rotationsfrequenz $a \neq o$ ist und somit konstante Phasenverschiebung zueinander. Rückschlüsse auf die Rotation des Lasers sind nicht möglich. Für a >> b finden wir nach Gl. (5.7)

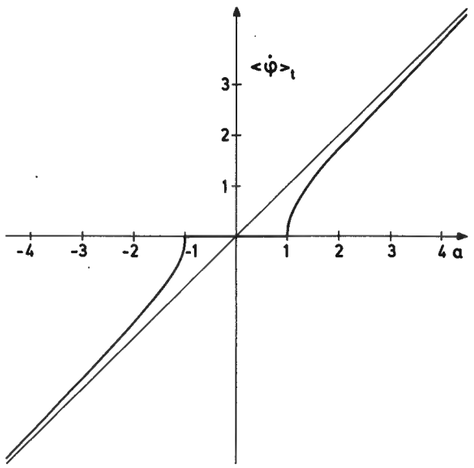
$$\langle \dot{\varphi} \rangle_t = a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cong a + O\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$$

die bekannte Proportionalität zwischen (Sagnac-) Frequenzdifferenz und Rotationsfrequenz a.

Berücksichtigen wir noch

$$\dot{\varphi}\Big|_{-a,-\varphi} = -\dot{\varphi}\Big|_{a,\varphi}$$

so erhalten wir aus Gl. (5.7) und (5.8) das bekannte Einrastverhalten eines Laser-Gyroskops [27]



Figur 7: Einrastverhalten des Laser-Gyros

Als nächstes untersuchen wir die Frage, wie man $\langle\dot{\varphi}\rangle_t$ und $\langle\varphi\rangle_t$ experimentell bestimmt.

5.2 Messung des Schwebungssignals

An einem der Spiegel des Laserresonators wird ein geringer Prozentsatz der Energie der beiden gegenläufigen Wellen E_+, E_- ausgeblendet und die durchgelassenen Strahlen zur Überlagerung gebracht.[6] Ein fest montierter Detektor mißt die sich zeitlich ändernde Intensität dieses Interferenzsignals. Der von E_+ bzw. E_- zwischen Spiegel und Detektor zurückgelegte Weg sei mit z_+ bzw. z_- bezeichnet, so daß die am Detektor gemessene Intensität I_D unter Verwendung von Gln. (4.4), (4.6) und Vernachlässigung der schnell veränderlichen Terme dann lautet:

$$I_D = E^2 = \frac{1}{4}\left[E_+ U_+(z_+) + E_- U_-(z_-) + c.c.\right]^2$$
$$= \frac{1}{4}\mathcal{E}_+^2 + \frac{1}{4}\mathcal{E}_-^2 + \frac{1}{2}\mathcal{E}_+\mathcal{E}_- \cos\left[(\nu_+ - \nu_-)t + (\varphi_+ - \varphi_-) + k(z_+ - z_-)\right]$$

Mit

$$I_\pm := \frac{1}{4}\mathcal{E}_\pm^2$$
$$\varphi_D := k(z_- - z_+)$$

und Gleichung (4.16) folgt hieraus:

$$I_D(t) = I_+ + I_- + 2\sqrt{I_+ I_-}\cos(\varphi(t) + \varphi_D) \qquad (5.9)$$

Wählen wir die experimentelle Anordnung so, daß φ_D = o ist, so ist die zeitliche Abhängigkeit des Schwebungssignals durch cos φ (t) gegeben.

5.3 Spektrum des Schwebungssignals cosφ ohne Rauschen

In diesem Kapitel wollen wir das Spektrum des Schwebungssignals cosφ angeben, nachdem sich der stationäre Zustand eingestellt hat. Da cosφ nicht quadratintegrabel ist, kann man die Fouriertransformation nicht direkt berechnen. Dann ist nach [28] das Spektrum durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\alpha(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T} dt\,\cos\varphi(t)\,e^{-i\omega t}\right|^2 \qquad (5.10)$$

a) Totes Band: a < b

Aus Kapitel 5.1 wissen wir, daß für $t\to\infty$, d.h. im stationären Fall, die beiden gegenläufigen Wellen den konstanten Phasenunterschied $\hat{\varphi}_o$

$$\varphi(t\to\infty) = \hat{\varphi}_o = \pi + \arcsin\frac{a}{b} \qquad (5.11)$$

haben. Daher kann das Spektrum nur eine δ-Funktion sein und mit Gl.(5.11) folgt

$$\alpha(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T} dt\,\cos\hat{\varphi}_o\,e^{-i\omega t}\right|^2 = \left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]4\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\cdot\frac{\sin^2(\omega T)}{\omega^2}\right]$$

und bei Benutzung der Beziehung [28]

$$\frac{\pi}{2}\delta(x) = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\cdot\frac{\sin^2(xT)}{x^2}\right\} \qquad (5.12)$$

schließlich

$$\alpha(\omega) = 2\pi\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)\delta(\omega) \qquad (5.13)$$

In Kapitel 9.1 werden wir zeigen, daß diese δ-Funktion, die offensichtlich vom Einrastverhalten des Lasers herrührt, auch in Anwesenheit von Rauschen auftritt, aber gedämpft ist.

b) Freier Bereich: a > b

Im Fall a $\geq$ b finden wir ausgehend von der Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz φ zwischen den beiden Wellen

$$\dot{\varphi} = a + b\sin\varphi \qquad (4.22)$$

durch die Substitution #

$$e^{i\varphi(t)} = -\frac{2}{b}\cdot\frac{\dot{s}(t)}{s(t)} \qquad (5.14)$$

die lineare Differentialgleichung

$$\ddot{s}(t) - ia\dot{s}(t) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 s(t) = 0 \qquad (5.15)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$s(t) = A e^{\mu_+ t} + B e^{\mu_- t} \qquad (5.16)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\mu_\pm := \frac{i}{2}(a \pm \Gamma) \qquad \Gamma := \sqrt{a^2 - b^2} \qquad (5.17)$$

benutzt haben. Die Integrationskonstanten A, B sind durch die Anfangsbedingung $\varphi(t = o) = \varphi_o$ und Gl. (5.14)

$$e^{i\varphi_o} = -\frac{2}{b}\,\frac{\dot{s}(0)}{s(0)} = \frac{\mu_+ A + \mu_- B}{A + B}\left(-\frac{2}{b}\right)$$

Diese Substitution ist sehr allgemein. Auf die nichtlineare Differentialgleichung (Dgl)

$$\dot{\varphi}(t) = a + b\sin\varphi + \mathcal{F}(t)$$

angewendet, führt sie auf die lineare Dgl

$$\ddot{s}(t) - i\left(a + \mathcal{F}(t)\right)\dot{s}(t) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 s(t) = 0$$

Dabei muß $\mathcal{F}$ nur stetig sein.

festgelegt. Daraus findet man für das Verhältnis $\frac{A}{B}$ unter Benutzung von Gl. (5.17)

$$\left|\frac{A}{B}\right|^2 = \left| -\frac{\mu_- + \frac{b}{2}e^{i\varphi_o}}{\mu_+ + \frac{b}{2}e^{i\varphi_o}}\right|^2 = \frac{a-\Gamma}{a+\Gamma} = \left(\frac{a-\Gamma}{b}\right)^2 < 1 \text{ für } a > b \qquad (5.18)$$

Mit Gl. (5.16) folgt aus Gl (5.14) für $e^{i\varphi}$

$$e^{i\varphi} = \left(-\frac{2}{b}\right)\frac{\mu_+ A e^{i\mu_+ t} + \mu_- B e^{i\mu_- t}}{A e^{i\mu_+ t} + B e^{i\mu_- t}} = \left(-\frac{2}{b}\right)\frac{\mu_- + \frac{A}{B}\mu_+ e^{i\Gamma t}}{1 + \frac{A}{B}e^{i\Gamma t}}$$

Da wir wegen $\left|\frac{A}{B}\right| < 1$ eine Entwicklung von $\frac{1}{1+\frac{A}{B}e^{i\Gamma t}}$ vornehmen können, folgt hieraus

$$e^{i\varphi} = -\frac{2}{b}\left(\mu_- - \mu_+\left(-\frac{A}{B}\right)e^{i\Gamma t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{A}{B}\right)^n e^{in\Gamma t}$$
$$= -\frac{2}{b}\left[\mu_- + (\mu_- - \mu_+)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{A}{B}\right)^n e^{in\Gamma t}\right]$$

und mit Gl. (5.17) schließlich

$$e^{i\varphi} = -i\,\frac{a-\Gamma}{b} + \frac{2i\Gamma}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{A}{B}\right)^n e^{in\Gamma t}$$

Das Schwebungssignal $\cos\varphi$ lautet somit

$$\cos\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi(t)} + c.c.\right) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n e^{in\Gamma t} \qquad (5.19)$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten c_n wegen Gl. (5.18) durch

$$c_n = \frac{i\Gamma}{b}\left(-\frac{A}{B}\right)^n = \frac{i\Gamma}{b}\left[\frac{\mu_- + \frac{b}{2}e^{i\varphi_o}}{\mu_+ + \frac{b}{2}e^{i\varphi_o}}\right]^n \quad \text{für} \quad n > 0 \qquad (5.20a)$$

und

$$c_{-n} = c_n^* \qquad (5.20b)$$

gegeben sind. Einsetzen der Entwicklung (5.19) in das Spektrum (5.10) liefert

$$\alpha(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n \int_{-T}^{T} dt\, e^{in\Gamma t}\, e^{-i\omega t}\right|^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} 2c_n\,\frac{\sin[(\omega - n\Gamma)T]}{\omega - n\Gamma}\right|^2$$

$$= 4\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}|c_n|^2 \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\,\frac{\sin^2[(\omega-n\Gamma)T]}{(\omega - n\Gamma)^2}\right\}$$

mithin

$$\alpha(\omega) = 2\pi\left(\frac{\Gamma}{b}\right)^2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left[\frac{a-\Gamma}{b}\right]^{|2n|} \delta(\omega - n\Gamma) \qquad (5.21)$$

wobei wir Gl. (5.15) und Gl. (5.12) benutzt haben.

Das Spektrum von $\cos\varphi$ besteht also für $a \geq b$ aus einer Summe von δ-Funktionen, die um die ganzzahligen Vielfachen der mittleren Schwebungsfrequenz $\omega = \langle\dot{\varphi}\rangle_t = \Gamma$ (siehe Gln. (5.7) und (5.17)) zentriert und mit dem Faktor $\left[\frac{a-\Gamma}{b}\right]^{|2n|}$ gewichtet sind. Man erhält also Harmonischen-Erzeugung. Dies rührt von dem nichtlinearen Rückstreuterm $b\sin\varphi$ her. Die δ-Funktion bei $\omega = 0$, die im toten Band auftritt, ist verschwunden. In Kapitel 9.2 werden wir zeigen, daß die Harmonischen auch noch auftreten, wenn zusätzlich das Rauschen berücksichtigt wird, aus den δ-Funktionen jedoch Lorentzkurven werden.

6. Bewegungsgleichung der Phase φ mit Rauschen *)

In diesem Kapitel wollen wir die Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz φ zwischen den beiden gegenläufigen Wellen unter Berücksichtigung des Rauschens, d.h. die Langevin-Gleichung, herleiten und die zugehörige Fokker-Planck-Gleichung angeben. Eine kurze Zusammenfassung der Theorie des Rauschens findet sich im Anhang C. In der semiklassischen Theorie sind die Rauschoperatoren durch klassische Rauschterme (c - Zahlen) ersetzt [8]. Außerdem nehmen wir für die beiden Wellen dieselbe Intensität an und vernachlässigen zunächst die Rotation des Lasers und die Rückstreuung - beides deterministische Effekte. Die Bewegungsgleichungen für die Phasen $\varphi_\pm$ der beiden Wellen sind dann die des Ein-Moden Lasers. Sie sind in Ref. [8] abgeleitet und lauten

$$\dot{\varphi}_+(t) = \frac{1}{2i\sqrt{n_s}}\left\{e^{-i\varphi_+(t)} G_+^*(t) - e^{+i\varphi_+(t)} G_+(t)\right\} + c_+ \qquad (6.1a)$$

$$\dot{\varphi}_-(t) = \frac{1}{2i\sqrt{n_s}}\left\{e^{-i\varphi_-(t)} G_-^*(t) - e^{+i\varphi_-(t)} G_-(t)\right\} + c_- \qquad (6.1b)$$

wobei c_+, c_- Konstanten sind und n_s die stationäre mittlere Photonenzahl ist. Für die Rauschterme $G_\pm$ gilt [8] (Anhang C) : (weißes Rauschen)

$$\langle G_\pm(t)\rangle = \langle G_\pm^*(t)\rangle = 0 \qquad (6.2)$$

$$\langle G_\pm^*(t)\, G_\pm(t')\rangle + \langle G_\pm(t)\, G_\pm^*(t')\rangle = 4 n_s D\,\delta(t-t') \qquad (6.3)$$

wobei die Diffusionskonstante D durch

$$D = \frac{n_s \cdot \nu}{2Q}$$

gegeben ist und Q den Qualitätsfaktor des Resonators bezeichnet. Zusätzlich machen wir die Näherung, daß die $G_\pm$, obwohl von derselben Rauschquelle, nämlich demselben Medium herrührend, voneinander unabhängig sind, d.h.

$$\langle G_+(t)\, G_-(t')\rangle = 0 .$$

Obwohl die rechte Seite von Gl. (6.1) noch von φ_+ abhängt, führt dies, wie wir zeigen werden, auf keine Schwierigkeiten. Wir definieren zunächst folgende folgende Rauschterme.

$$F_+(t,\varphi_+) = \frac{1}{2i\sqrt{n_s}}\left\{e^{-i\varphi_+(t)} G_+^*(t) - e^{+i\varphi_+(t)} G_+(t)\right\}$$

$$F_-(t,\varphi_-) = \frac{1}{2i\sqrt{n_s}}\left\{e^{-i\varphi_-(t)} G_-^*(t) - e^{+i\varphi_-(t)} G_-(t)\right\}$$

*) Die Darstellung dieses und der nächsten Kapitel wird in Ref. [36] und [40] veröffentlicht werden.

Wir nehmen weiter an, daß wegen der endlichen Reaktionszeit des Systems, die Phasen $\varphi_\pm$ zum Zeitpunkt t völlig unkorreliert zum Rauschterm $G_\pm$ im Zeitpunkt t ist. Dann folgt wegen Gl.(6.2)

$$\langle F_\pm(t,\varphi_\pm)\rangle = \frac{1}{2i\sqrt{n_s}}\left\{\langle e^{-i\varphi_\pm(t)}\rangle\langle G_\pm^*(t)\rangle - \langle e^{i\varphi_\pm(t)}\rangle\langle G_\pm(t)\rangle\right\} = 0 \quad (6.4)$$

und zusammen mit Gl.(6.3)

$$\langle F_\pm(t,\varphi_\pm)\, F_\pm(t',\varphi_\pm)\rangle =$$

$$\left(\frac{1}{2i n_s^{1/2}}\right)^2\Big\{\langle\exp[i(\varphi_\pm(t)+\varphi_\pm(t'))]\rangle\langle G_\pm^*(t)G_\pm^*(t')\rangle - \langle\exp[-i(\varphi_\pm(t)-\varphi_\pm(t'))]\rangle\langle G_\pm^*(t)G_\pm(t')\rangle$$

$$-\langle\exp[i(\varphi_\pm(t)-\varphi_\pm(t'))]\rangle\langle G_\pm(t)G_\pm^*(t')\rangle + \langle\exp[i(\varphi_\pm(t)+\varphi_\pm(t'))]\rangle\langle G_\pm(t)G_\pm(t')\rangle\Big\} =$$

$$= D\,\delta(t-t') \quad (6.5)$$

Die statistischen Eigenschaften von F_+ und F_- sind somit unabhängig von $\varphi_\pm$, so daß wir $F_\pm = F_\pm(t, \varphi_\pm)$ durch die nur zeitabhängigen Rauschterme $\tilde{F}_\pm = \tilde{F}_\pm(t)$ mit den Eigenschaften (6.4) und (6.5) ersetzen und Gl. (6.1a) und (6.1b) als

$$\dot{\varphi}_+(t) = \tilde{F}_+(t) + c_+$$

$$\dot{\varphi}_-(t) = \tilde{F}_-(t) + c_-$$

schreiben können. Eine genauere Rechtfertigung für dieses Ergebnis ist in Ref. [31] gegeben.

Mit der Setzung

$$F(t) := \tilde{F}_+(t) - \tilde{F}_-(t) \quad (6.6)$$

finden wir schließlich

$$\frac{d}{dt}\left((\nu_+-\nu_-)t + \varphi_+(t) - \varphi_-(t)\right) = F(t) + c_+ - c_- + \nu_+ - \nu_-$$

oder mit Gl. (4.16)

$$\dot{\varphi}(t) = F(t) + \text{const.} \quad (6.7)$$

wobei F wegen Gl.(6.4) und (6.5) den statistischen Eigenschaften

$$\langle F(t)\rangle = 0 \quad (6.8)$$

$$\langle F(t)F(t')\rangle = 2D\,\delta(t-t') \quad (6.9)$$

genügt. Fügen wir zu Gl. (6.7) nun die deterministischen Terme (4.22), die Sagnac- und Rückstreu-Effekt beinhalten, so erhalten wir endlich die Langevin-Gleichung

$$\dot{\varphi}(t) = a + b\sin\varphi(t) + F(t) \quad (6.10)$$

wobei F die statistischen Eigenschaften (6.8) und (6.9) besitzt. Die Konstante a enthält sowohl den Beitrag des Sagnac Effekt als auch die konstanten Beiträge des Lasermediums und schließlich die Konstante aus Gl.(6.7)

Fokker-Planck-Gleichung

Im Anhang C.5 ist gezeigt, daß die zur Langevin-Gleichung

$$\dot{\varphi}(t) = A[\varphi(t)] + F(t) \quad (C.23)$$

gehörige Fokker-Planck-Gleichung durch

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A(\varphi)P\right) + D\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2} \quad (C.27)$$

gegeben ist, wobei $P(t,\varphi|t_0,\varphi_0)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit angibt, d.h. die Wahrscheinlichkeit, die Phase φ zum Zeitpunkt t anzutreffen, wenn sie zum Zeitpunkt t_0 den Wert φ_0 hatte. Somit lautet die der Gl. (6.10) zugeordnete Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(a+b\sin\varphi)P\right] + D\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2} \quad (6.11a)$$

Da φ die relative Phase zwischen den beiden gegenläufigen Wellen ist, ist es physikalisch notwendig, periodische Randbedingungen

$$P(t,\varphi+2\pi|t_0,\varphi_0) = P(t,\varphi|t_0,\varphi_0) \quad (6.12)$$

und die Anfangsbedingung

$$P(t\to t_0,\varphi|t_0,\varphi_0) = \sum_n \delta(\varphi-\varphi_0+2n\pi) \quad (6.13)$$

zu fordern.

Durch den Separationsansatz

$$P(t,\varphi) = e^{-\lambda t} P(\varphi) \tag{6.14}$$

führen wir die Fokker-Planck-Gleichung (6.11)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = L P \tag{6.11b}$$

mit

$$L = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[a+b\sin\varphi\right] + D\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{6.15}$$

in das Eigenwertproblem

$$L P(\varphi) = -\lambda P(\varphi) \tag{6.16}$$

über. Aus Gl. (6.14) sehen wir, daß die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung P_s durch die zum Eigenwert $\lambda = o$ gehörige Eigenfunktion gegeben ist. Diese wird in Kapitel 8 in Form von Integralen angegeben.

Zur Lösung des Eigenwertproblems (6.16) machen wir den Ansatz [31]

$$P(\varphi) = e^{\chi(\varphi)} Q(\varphi) \tag{6.17}$$

mit

$$\chi(\varphi) = \frac{1}{2D}\left(a\varphi - b\cos\varphi\right) \tag{6.18}$$

und finden für Q eine Gleichung vom Typ einer Schrödinger Gleichung

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} Q(\varphi) + \left\{\frac{\lambda}{D} - V(\varphi; a, b, D)\right\} Q(\varphi) = 0 \tag{6.19}$$

Dabei haben wir das Potential

$$V(\varphi; a, b, D) = \frac{b}{2D}\cos\varphi + \left(\frac{1}{2D}\right)^2 \left(a + b\sin\varphi\right)^2 \tag{6.20}$$

eingeführt.

Die Eigenwerte λ seien mit λ_ℓ und die zugehörigen Eigenfunktionen mit Q_ℓ bezeichnet. Es läßt sich zeigen, daß die Eigenfunktionen Q_ℓ ein vollständiges Orthonormalsystem bilden. Daher läßt sich die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(t,\varphi|t_o,\varphi_o)$ nach den Q_ℓ entwickeln. Die explizite Rechnung ist im Anhang D ausgeführt und wir finden

$$P(t,\varphi \mid t_o=0,\varphi_o) = \sum_\ell e^{-\lambda_\ell t} \frac{P_\ell^*(\varphi_o) P_\ell(\varphi)}{P_s(\varphi_o)} \tag{6.21}$$

wobei

$$P_\ell(\varphi) = e^{\chi(\varphi)} Q_\ell(\varphi)$$

und P_s die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnet.

Bevor wir in Kapitel 8 die Eigenwertgleichung (6.19) für $\lambda = o$ exakt und in Kapitel 9 approximativ lösen, wollen wir im nächsten Kapitel die Berechnung des Spektrums des Schwebungssignals mit Rauschen in der Fokker-Planck und Langevin-Methode besprechen.

7. Spektrum des Schwebungssignals $\cos\varphi$ mit Rauschen

7.1 Definition des Spektrums

Um Schwierigkeiten, die mit der Definition eines Spektrums für nichtstationäre Prozesse verbunden sind [34] zu vermeiden, nehmen wir an, daß das Gyroskop den stationären Zustand erreicht hat, bevor die Messung ausgeführt wird. In diesem Fall kann das Schwebungssignal $\cos\varphi$ durch einen stationären, stochastischen Prozeß dargestellt werden, so daß wir das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$ nach dem Wiener-Khintchine-Theorem [31], [32] durch die Fouriertransformation der Korrelationsfunktion

$$\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} \ll \cos\varphi(t)\cos\varphi_0 \gg \qquad (7.1)$$

definieren können, wobei $\varphi(t=0) \equiv \varphi_0$. $\ll \gg$ bezeichnet eine doppelte Mittelung, die im Abschnitt 7.2 und 7.3 erklärt wird.

In einigen Fällen ist es für die Berechnung günstiger, die Korrelationsfunktion $K(t) = \ll\cos\varphi(t)\cos\varphi_0\gg$ in die Form

$$\ll\cos\varphi\cos\varphi_0\gg = \frac{1}{4}\left[C_+(t) + C_-(t) + c.c.\right] \qquad (7.2)$$

zu bringen, wobei gilt

$$C_+(t) = \ll e^{-i(\varphi+\varphi_0)} \gg \qquad (7.3a)$$

$$C_-(t) = \ll e^{-i(\varphi-\varphi_0)} \gg \qquad (7.3b)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir die Berechnung der Korrelationsfunktionen in der Fokker-Planck-und in 7.3 in der Langevin-Methode behandeln.

7.2 Berechnung der Korrelationsfunktion in der Fokker-Planck-Methode

Die Korrelationsfunktion $K(t_1, t_2) = \ll\cos\varphi(t_1)\cos\varphi(t_2)\gg$ ist durch

$$\ll\cos\varphi(t_1)\cos\varphi(t_2)\gg = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 P(t_1,\varphi_1; t_2,\varphi_2) \qquad (7.4)$$

gegeben, wobei $P(t_1,\varphi_1;t_2,\varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß die Phase φ zum Zeitpunkt t_1 im Intervall $\varphi_1 + d\varphi_1$ und zum Zeitpunkt t_2 im Intervall $\varphi_2 + d\varphi_2$ zu finden ist. Diese Wahrscheinlichkeit läßt sich als

$$P(t_1,\varphi_1; t_2,\varphi_2) = P(t_1,\varphi_1 \mid t_2,\varphi_2)\, P(t_2,\varphi_2) \qquad (7.5)$$

schreiben [34]. Dabei ist $P(t_1,\varphi_1|t_2,\varphi_2)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t_1 die Phase φ_1 anzutreffen, wenn sie zum Zeitpunkt t_2 den Wert φ_2 hatte. $P(t_1,\varphi_1|t_2,\varphi_2)$ ist Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (6.11). $P(t_2,\varphi_2)\,d\varphi_2$ ist die absolute Wahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t_2 die Phase φ_2 im Intervall $\varphi_2 + d\varphi_2$ zu finden. Mithin

$$\ll\cos\varphi(t_1)\cos\varphi(t_2)\gg = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 P(t_1,\varphi_1 \mid t_2,\varphi_2) P(t_2,\varphi_2) \qquad (7.6)$$

Da es sich um einen stationären Prozeß handelt, hängt $P(t_1,\varphi_1|t_2,\varphi_2)$ nur von der Zeitdifferenz $t := t_1 - t_2$ ab, also

$$P(t_1,\varphi_1 \mid t_2,\varphi_2) = P(t,\varphi \mid t_0=0,\varphi_0) \qquad (7.7)$$

Im stationären Zustand ist die absolute Wahrscheinlichkeit durch die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung P_s $\left(\frac{\partial P}{\partial t} \equiv 0\right)$

$$P_s(\varphi) = \lim_{t\to\infty} P(t,\varphi \mid t_0=0,\varphi_0) \qquad (7.8)$$

gegeben. In Kapitel 9 werden wir zeigen, daß P_s in der Tat von φ_0 unabhängig ist.

Insgesamt finden wir also

$$\ll \cos\varphi \cos\varphi_0 \gg = \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \cos\varphi_0 P_s(\varphi_0) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi P(t, \varphi | t_0 = 0, \varphi_0) \qquad (7.9)$$

oder für $C_\pm = C_\pm(t)$

$$C_\pm(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \, e^{\mp i\varphi_0} P_s(\varphi_0) \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{-i\varphi} P(t, \varphi | t_0 = 0, \varphi_0) \qquad (7.10)$$

7.3 Berechnung der Korrelationsfunktion in der Langevin-Methode

Wir benutzen zur Berechnung eine formale Lösung der Langevin-Gleichung (6.10) als Funktional der stochastischen Variablen F(t). Bei Gl.(6.10) handelt es sich um eine Differentialgleichung 1. Ordnung. Somit muß die Lösung φ stetig von der (statistischen) Anfangsbedingung $\varphi(t_0 = 0) = \varphi_0$ abhängen.

$$\varphi = \varphi(t, \varphi_0, F(t)) \qquad (7.11)$$

Dann ist $\cos\varphi\cos\varphi_0$ bzw. $e^{-i(\varphi \pm \varphi_0)}$ festgelegt. Nun muß die Mittelung $\ll \quad \gg$ durchgeführt werden. In der Fokker-Planck-Methode geschieht dies gemäß Gl.(7.9) in zwei Schritten. Wir mitteln
1. bei festem φ_0 über φ mit $P(t, \varphi | t_0 = 0, \varphi_0)$
2. über φ_0 mit $P_s(\varphi_0)$.

In der Langevin-Methode sind jedoch die Wahrscheinlichkeitsdichten nicht definiert. Uns stehen nur die statistischen Eigenschaften von F

$$\langle F(t) \rangle = 0 \qquad (6.8)$$

$$\langle F(t') F(t'') \rangle = 2D\delta(t' - t'') \qquad (6.9)$$

zur Verfügung. Diese Eigenschaften benutzen wir zur Berechnung von $\langle \cos\varphi\cos\varphi_0 \rangle_F$ bzw. $\langle e^{-i(\varphi \pm \varphi_0)} \rangle_F$, wobei $\langle \rangle_F$ den zu 1 analogen Schritt bedeutet, nämlich die Mittelung über die statistischen Eigenschaften von F. Wir finden dann eine Funktion $f = f(t, \varphi_0)$, die jetzt im allgemeinen noch von φ_0 abhängt.

Daher muß jetzt über die Verteilung von φ_0 gemittelt werden. Völlig analog zur Fokker-Planck-Methode ist die Mittelung über φ_0 in der Langevin-Methode durch

$$\langle f(t, \varphi_0) \rangle_{\varphi_0} = \lim_{t' \to \infty} \langle f(t, \varphi(t')) \rangle_F \qquad (7.12)$$

gegeben, wobei φ Lösung der Langevin-Gleichung (6.10) ist. Dabei wird zunächst die Mittelung über F mit den Eigenschaften (6.8) und (6.9) und dann der Grenzprozeß $t' \to \infty$ vollzogen.

In Kapitel 8 werden wir zunächst die stationäre Lösung P_s in Form von Integralen und in Kap. 9 approximative Lösungen sowohl der Fokker-Planck als auch der Langevin-Gleichung berechnen. Hieraus finden wir die Korrelationsfunktionen $C_\pm$ und das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$.

8. Stationäre Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung

Die Kenntnis der stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_s(\varphi)$ ist sowohl zur exakten Berechnung des Spektrums als auch für analytische Näherungsausdrücke des Spektrums wichtig. In diesem Kapitel geben wir einen exakten Ausdruck für $P_s(\varphi)$ in Form von Integralen an.
Die Eigenwertgleichung für $Q_L(\varphi)$ zum Eigenwert $\lambda = 0$, die somit P_s beschreibt, ist nach Gl.(6.19) und Gl.(6.20) durch ($L = 0$)

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} Q_0(\varphi) - \left[\left(\frac{b}{2D} \right) \cos\varphi + \left(\frac{1}{2D} \right)^2 (a + b\sin\varphi)^2 \right] Q_0(\varphi) = 0 \qquad (8.1)$$

gegeben. Der Lösungsansatz

$$Q_0(\varphi) = e^{\frac{1}{2D}(a\varphi - b\cos\varphi)} u(\varphi) \qquad (8.2)$$

führt Gl.(8.1) in

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}u(\varphi) + \frac{1}{D}(a+b\sin\varphi)\frac{du}{d\varphi} = 0 \qquad (8.3)$$

über. Durch elementare Integration dieser und der Gl.(6.18) mit Berücksichtigung der periodischen Randbedingung

$$P_s(\varphi+2\pi) = P_s(\varphi) \qquad (6.12)$$

und der Normierung von P_s auf 1

$$1 = \int_0^{2\pi} d\varphi\, P_s(\varphi) \qquad (8.4)$$

folgt schließlich mit Gl.(8.2) (6.17) und (6.18)

$$P_s(\varphi) = P_s(0)\, e^{\frac{1}{D}(a\varphi - b\cos\varphi)}\left(1 + \frac{e^{-2\pi\frac{a}{D}} - 1}{u(2\pi)}\, u(\varphi)\right) \qquad (8.5)$$

mit

$$P_s(0) = \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{\frac{1}{D}(a\varphi - b\cos\varphi)}\left(1 + \frac{e^{-2\pi\frac{a}{D}} - 1}{u(2\pi)}\, u(\varphi)\right)\right\}^{-1} \qquad (8.6)$$

$$u(\varphi) = \int_0^{\varphi} d\tilde{\varphi}\, e^{-\frac{1}{D}(a\tilde{\varphi} - b\cos\tilde{\varphi})} \qquad (8.7)$$

Die explizite Rechnung ist im Anhang E ausgeführt. Für zwei Fälle nimmt Gl.(8.5) eine einfache Form an, nämlich für

1. <u>b = o:</u>

   Dann wird Gl.(8.7) zu

$$u(\varphi) = \frac{e^{-\frac{a}{D}\varphi} - 1}{-(a/D)}$$

$$u(2\pi) = \frac{e^{-2\pi\frac{a}{D}} - 1}{-a/D}$$

   und für Gl.(8.5) folgt mit der Normierungsbedingung (8.4)

$$P_s(\varphi) = P_s(0) = \frac{1}{2\pi} \qquad (8.8)$$

d.h. jede Phase φ ist, genau wie beim gewöhnlichen Laser, gleich wahrscheinlich. Dies ist auch sofort einsichtig, denn im Fall b = o ist die Kopplung, herrührend von der Rückstreuung an den Spiegeln, entfallen. Die beiden Wellen sind entkoppelt und voneinander unabhängig. Folglich muß sich das System wie zwei voneinander unabhängige Ein-Moden Laser verhalten.

2. <u>a = o:</u>

In diesem Fall reduziert sich die Rechnung aus Anhang E auf

$$u(\varphi) = 1$$

und damit Gl.(8.5) auf

$$P_s(\varphi) = P_s(0)\, e^{-\frac{b}{D}\cos\varphi}$$

$$P_s(0) = \left\{ \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}\, e^{-\frac{b}{D}\cos\tilde{\varphi}}\right\}^{-1} = \left[2\pi I_0\left(\frac{b}{D}\right)\right]^{-1}$$

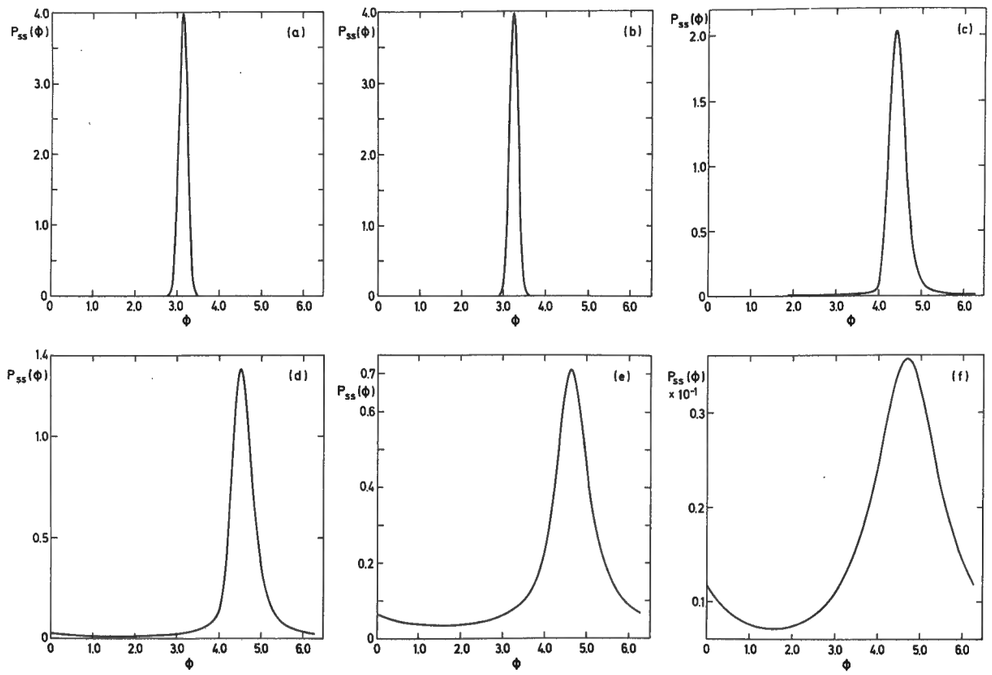
wobei

$$I_0(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}\, e^{-z\cos\tilde{\varphi}}$$

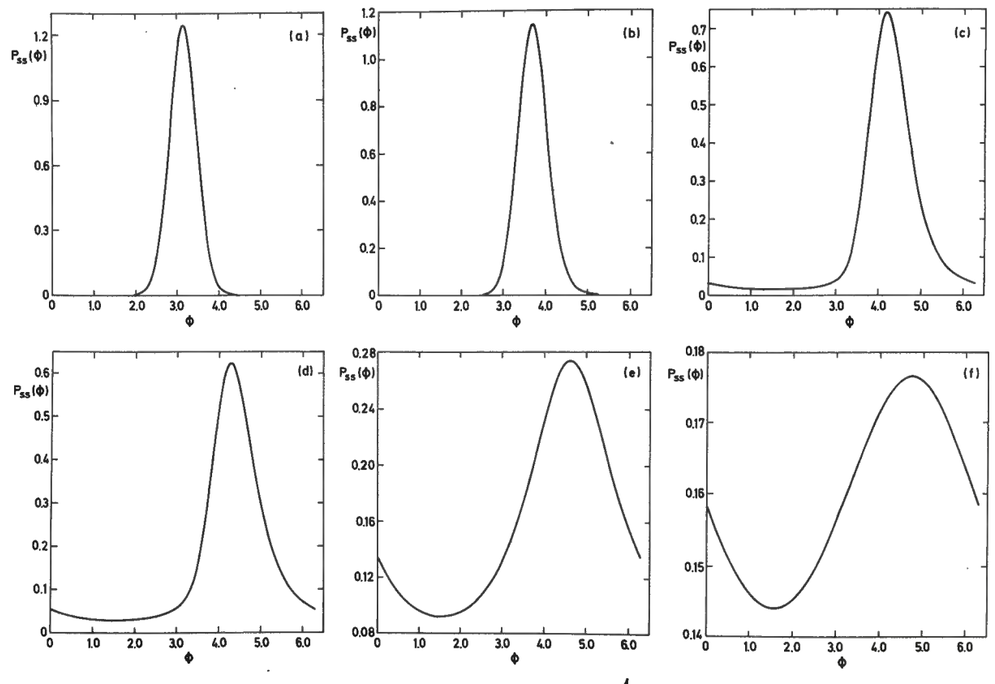
die modifizierte Besselfunktion der Ordnung Null bezeichnet [37]. Insgesamt also

$$P_s(\varphi) = \frac{e^{-\frac{b}{D}\cos\varphi}}{2\pi\, I_0\left(\frac{b}{D}\right)} \qquad (8.9)$$

Figuren 8 und 9 zeigen numerische Lösungen der stationären Fokker-Planck-Gleichung für zwei verschiedene Größen des Rauschens.
Die numerische Auswertung geschieht allerdings nicht mit den Ausdrücken 8.6, sondern mit der in Kapitel 10 beschriebenen Kettenbruchmethode.



Figur 8: $P_S \equiv P_{ss}$ für $D = 10^{-2}$
a) a = o b) a = 0.1 c) a = 0.95
d) a = 1.0 e) a = 1.1 f) a = 1.5
(a in Einheiten von b)



Figur 9: $P_S \equiv P_{SS}$ für $D = 10^{-1}$
a) a = o b) a = 0.5 c) a = 0.9
d) a = 1.0 e) a = 2.0 f) a = 10.0
(a in Einheiten von b)

Ohne Rauschen haben die beiden gegenläufigen Wellen des Gyroskops im stationären Zustand wegen der Erscheinung der Rückstreuung für $a \leqslant b$ den konstanten Phasenunterschied

$$\hat{\varphi}_o = \pi + \arcsin \frac{a}{b}$$

Zumindest für schwaches Rauschen, $D \ll b$, ist zu erwarten, daß sich die Phase φ nicht weit von dieser stabilen Lage $\hat{\varphi}_o$ entfernt. Dies bestätigen die Figuren 8a,b und 9a,b. Die stationären Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_s sind scharfe Funktionen um einen Wert, der, wie man sich leicht überzeugen kann, identisch mit $\hat{\varphi}_o$ ist. Diese Tatsache ist die Grundlage für die approximativen Lösungen von Abschnitt 9.1 im toten Band.

Da zur Berechnung des Spektrums über $P_s(\varphi)$ nochmals integriert werden muß, werden wir dazu nicht die komplizierte Integraldarstellung (8.5) benutzen, sondern in Kapitel 9 approximative Ausdrücke dafür herleiten.

9. Approximative Lösungen für das Spektrum

Die Langevin-und die Fokker-Planck-Gleichung Gln.(6.10) und (6.11a) sind nicht geschlossen lösbar. Daher werden wir in diesem Kapitel approximative Lösungen angeben und damit das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$ in drei Teilbereichen des Parameters a behandeln und zwar im

1. Einrastbereich | $0 \leq a \leq b$

2. Freien Bereich für $a \gg b$
   wobei die Rückstreuung $b \sin\varphi$ in 1. Ordnung behandelt wird

3. Asymptotischen Bereich $b = 0$:
   d.h. $b \sin\varphi$ wird gegen a vernachlässigt

Im Fall 1 benutzen wir dazu sowohl die Fokker-Planck- als auch die Langevin-Methode, bei 2 die Fokker-Planck-, bei 3 die Langevin-Methode. In allen Fällen nehmen wir kleines Rauschen d.h.

$$D \ll b$$

an. Diese Bedingung ist bei sehr guten Laser-Gyroskopen auch erfüllt [6].

9.1 Einrastbereich $0 \leq a \leq b$:

Aus der Potentialbetrachtung in Kapitel 5.1 wissen wir, daß für diesen Bereich ohne Rauschen im stationären Fall die beiden gegenläufigen Wellen den konstanten Phasenunterschied

$$\varphi(t \to \infty) = \hat{\varphi}_0 = \pi + \arcsin\left(\frac{a}{b}\right) \qquad (5.11)$$

haben und daß $\hat{\varphi}_0$ eine stabile stationäre Lösung ist.
Dies bedeutet für die Phase φ, daß sie sich bei einer kleinen Störung von außen, z.B. schwachem Rauschen, nicht weit von diesem stabilen Punkt $\hat{\varphi}_0$ entfernen kann und immer dorthin

zurückkehren muß. Aus Figur 6b sehen wir außerdem sofort, daß dies für $a \cong b$ nicht mehr richtig sein kann. Denn dann kommen die beiden Lösungen, die stabile Lösung $\hat{\varphi}_0$ und die instabile $\hat{\varphi}_1 := 2\pi - \arcsin\frac{a}{b}$ einander beliebig nahe. Die Phase geht, hat sie sich einmal von $\hat{\varphi}_0$ zu großen Werten entfernt, über $\hat{\varphi}_1$ weg und kehrt nicht mehr zurück. Diese Potential-Überlegungen legen für die Phase φ den Ansatz

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}_0 + \Theta(t) = \pi + \arcsin\left(\frac{a}{b}\right) + \Theta(t) \qquad (9.1)$$

nahe, wobei $\Theta = \Theta(t)$ die Abweichung von der stationären Lösung $\hat{\varphi}_0$ bezeichnet. Solange a nicht zu nahe bei b liegt, können wir außerdem unter Voraussetzung von schwachem Rauschen

$$D \ll b$$

die Annahme

$$|\Theta(t)| \ll 1 \qquad (9.2)$$

machen.
In diesem Zusammenhang ist eine Analogie zum "Laser mit eingestrahltem Signal" [39] interessant. Dort wird in einen Laser, parallel zu dessen Achse, ein klassisches Signal eingestrahlt. Das Signal ist in Resonanz mit dem Laser. Die Phasenfluktuationen des Lasers, die ohne Signal ganz willkürlich verteilt sind, werden dadurch auf einen kleinen Bereich um die Phase des eingestrahlten Signals eingeschränkt. Dies ist genauer in Ref. [8] und [39] gezeigt. Für die Phase Φ des Lasers läßt sich eine Langevin-Gleichung angeben, die ähnlich der Langevin-Gleichung für die Phasendifferenz zwischen den beiden gegenläufigen Wellen des Ringlasers ist. Der "Rotationsterm" a der Ringlasergleichung tritt nicht auf, jedoch wie die Ringlasergleichung ein nichtlinearer Kopplungsterm $\sin\Phi$. Dieser rührt von der Polarisation des Lasermediums her, der durch das klassische Signal verursacht wird und mit dem Laserfeld koppelt. Die Rückstreuung von den Spiegeln entspricht dem eingestrahlten Signal. Der Rauschterm ist in beiden Fällen derselbe.

Daß die Annahme (9.2) gerechtfertigt ist, läßt sich für Fall a =o auch aus der exakten Lösung für P_s

$$P_s(\varphi) = \frac{e^{-\frac{b}{D}\cos\varphi}}{2\pi\, I_o\left(\frac{b}{D}\right)} \tag{8.9}$$

sehen. Die Figur 8a zeigt die exakte stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_s(\varphi)$ für den Fall a = o , b = 1 , und $D = 10^{-2}$, Mit der asymptotischen Entwicklung der modifizierten Besselfunktion I_o für große Argumente [37]

$$I_o(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

folgt für $z = \frac{b}{D} >> 1$ aus Gl.(8.9)

$$P_s(\varphi) = \sqrt{\frac{b}{2\pi D}}\; e^{-\frac{2b}{D}\cos^2(\varphi/2)} \tag{9.3}$$

Die statistische Verteilung ist also eine scharfe Funktion um $\hat{\varphi}_o = \pi$ mit einer Halbwertsbreite $\sqrt{\frac{D}{b}}$. Daher ist die Phase φ auf einen sehr kleinen Winkelbereich um $\hat{\varphi}_o = \pi$ beschränkt. Da $P_s(\varphi)$ sehr scharf ist, kann auch $P(t,\varphi|t_o=0,\varphi_o)$ nur von einer Anfangsbreite o monoton zu der Breite von $P_s(\varphi)$ anwachsen. Somit muß $P(t,\varphi|t_o=o,\varphi_o)$ zu allen Zeiten ebenfalls eine scharfe Funktion um $\hat{\varphi}_o = \pi$ mit einer Breite $\sqrt{\frac{D}{b}}$ sein.

Mit dem Ansatz (9.1) transformiert sich die Langevin-Gleichung (6.10) zu

$$\dot{\Theta} = a(1-\cos\Theta) - \sqrt{b^2-a^2}\,\sin\Theta + F(t)$$

woraus wir wegen (9.2) mit den Näherungen

$$\cos \cong 1 \qquad \sin\Theta \cong \Theta$$

die linearisierte Langevin-Gleichung

$$\dot{\Theta}(t) = -\gamma\,\Theta(t) + F(t) \tag{9.4}$$

erhalten. Dabei haben wir als Abkürzung

$$\gamma := \sqrt{b^2-a^2}$$

eingeführt. Ausgehend von der approximierten Gl.(9.4) werden wir nun sowohl mit der Fokker-Planck- als auch mit der Langevin-Methode approximative Ausdrücke für das Spektrum des Schwebungssignals angeben.

a) Langevin-Methode

Eine formale Lösung der genäherten Langevin-Gleichung (9.4) in Abhängigkeit der stochastischen Variablen F(t) ist

$$\Theta(t) = \Theta_o e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t}\int_0^t dt'\, F(t') e^{\gamma t'} \tag{9.5}$$

Mit der Substitution (9.1) und der Lösung (9.5) folgt für $C_\pm$ mit Gl.(7.13)

$$C_\pm(t) = e^{-i(\hat{\varphi}_o \mp \hat{\varphi}_o)} \ll e^{-i(\Theta \pm \Theta_o)} \gg_{\Theta_o} \gg_F = \tag{9.6}$$

$$= e^{-i(\hat{\varphi}_o \pm \hat{\varphi}_o)} \left\langle \exp\left[-i\Theta_o\left(e^{-\gamma t} \pm 1\right)\right]\right\rangle_{\Theta_o} \left\langle \exp\left[-ie^{-\gamma t}\int_0^t dt' F(t') e^{\gamma t'}\right]\right\rangle_F$$

Die Mittelung über die Statistik von F ist im Anhang F ausgeführt und ergibt

$$\left\langle \exp\left[-ie^{-\gamma t}\int_0^t dt' F(t') e^{\gamma t'}\right]\right\rangle_F = \exp\left[-\frac{D}{2\gamma}\left(1 - e^{-2\gamma t}\right)\right] \tag{9.7}$$

Die Mittelung $\langle\ \rangle_{\Theta_o}$ entspricht der Mittelung über

$P_s(\varphi) = \lim_{t\to\infty} P(t,\varphi|t_o=o,\varphi_o)$

in der Fokker-Planck-Methode. Nach Kapitel 7.3 läßt sich der Grenzprozeß

$$\left\langle \exp\left[-i\left(e^{-\gamma t} \pm 1\right)\Theta_o\right]\right\rangle_{\Theta_o} = \lim_{t'\to\infty}\left\{\left\langle \exp\left[-\left(e^{-\gamma t} \pm 1\right)\Theta(t')\right]\right\rangle_F\right\}$$

berechnen, d.h. die Mittelung über Θ_o läßt sich auf die statistischen Eigenschaften von F zurückführen [36]. Mit (9.6) und Anhang F folgt nach kurzer Rechnung

$$\left\langle \exp\left[-i\left(e^{-\gamma t} \pm 1\right)\Theta_o\right]\right\rangle_{\Theta_o} = \exp\left[-\frac{D}{2\gamma}\left(e^{-\gamma t} \pm 1\right)^2\right] \tag{9.8}$$

somit erhält man

$$C_\pm(t) = e^{-i(\hat{\varphi}_o \pm \hat{\varphi}_o)} \exp\left[-\frac{D}{\gamma}\left(1 \pm e^{-\gamma t}\right)\right] \tag{9.9}$$

b) Fokker-Planck-Methode :

In der Fokker-Planck-Methode ist zur Berechnung der Korrelationsfunktionen $C_{\pm}$ nach Gl.(7.10) die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(t,\varphi|t_0=0,\varphi_0)$ notwendig.
In diesem Abschnitt wollen wir das Eigenwertproblem (6.16) mit der gleichen Näherung $|\Theta| \ll 1$ lösen.
Mit dem Ansatz (9.1) und der Annahme $|\Theta| \ll 1$ geht wegen

$$a + b \sin\varphi \;\widehat{=}\; -\gamma\Theta \tag{9.10}$$

die Eigenwertgleichung (6.16) mit der Definition

$$p(\Theta) := P(\hat{\varphi}_0+\pi+\Theta) \tag{9.11}$$

in

$$\frac{d^2p}{d\Theta^2} + \frac{\gamma}{D}\Theta\frac{dp}{d\Theta} + \left(\frac{\lambda}{D}+\frac{\gamma}{D}\right)p = 0$$

über. Da wir wissen, daß P_s eine scharfe Funktion ist, können wir die periodischen Randbedingungen (6.12) durch die äquivalenten, aber bequemeren Bedingungen

$$P\ (t,\Theta\to\pm\infty)\longrightarrow 0$$

ersetzen.
Der Ansatz, der in der Näherung (9.10) der Gl.(6.17) entspricht,

$$p(\Theta) = e^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{2D}\Theta^2} q(\Theta) \tag{9.12}$$

schließlich liefert die Gleichung

$$\frac{d^2q}{d\Theta^2} + \left[\frac{\lambda}{D} + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{D} - \left(\frac{1}{2}\frac{\gamma}{D}\right)^2\Theta^2\right]\cdot q = 0 \tag{9.13}$$

Diese Schrödingerartige Gleichung entspricht in der Näherung $|\Theta| \ll 1$ der Gleichung (6.19) und zeigt, daß wir das Potential V aus Gl.(6.20) in der Näherung kleiner Amplituden durch das eines harmonischen Oszillators genähert haben.

$$V(\Theta;a,b,D) \;\widehat{=}\; -\frac{\gamma}{2D} + \left(\frac{\gamma}{2D}\Theta\right)^2$$

Als Eigenfunktionen erwarten wir daher wie beim quantenmechanischen harmonischen Oszillator die Hermitefunktionen und als Eigenwerte λ die Beziehung

$$\lambda_L = L\gamma \qquad L = 0,1,2,\ldots$$

Dies sieht man genauer mit der Variablentransformation

$$\alpha := \sqrt{\frac{\gamma}{2D}}\,\Theta \tag{9.14}$$

mit

$$Q(\alpha) = q\left(\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\,\alpha\right) \tag{9.15}$$

die auf die Hermitegleichung

$$\frac{d^2Q}{d\alpha^2} + \left\{\frac{2\lambda}{D} + 1 - \alpha^2\right\}Q = 0 \tag{9.16}$$

führt. Die Gleichung hat für die Eigenwerte

$$\lambda_L = L\gamma \qquad L = 0,1,2,\ldots \tag{9.17}$$

als normierbare Lösungen die Hermitefunktionen

$$Q_L(\alpha) = \mathcal{N}_L\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} H_L(\alpha) \tag{9.18}$$

als Lösung, wobei H_L die Hermite Polynome und

$$\mathcal{N}_L^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ 2^L L!} \tag{9.19}$$

die Normierungsfaktoren bezeichnet. [31]
Damit findet man für die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(t,\varphi|t_0=0,\varphi_0)$, die wir als Funktion von α mit dem Symbol $\mathcal{P}(t,\alpha|t_0=0,\alpha_0)$ bezeichnen,

$$\mathcal{P}(t,\alpha|t_0=0,\alpha_0) = \sqrt{\frac{\gamma}{2D}}\sum_{L=0}^{\infty} e^{-L\gamma t}\,\mathcal{N}_L^2\, e^{-\alpha^2} H_L(\alpha) H_L(\alpha_0) \tag{9.20}$$

und $\mathcal{P}_s$

$$\mathcal{P}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}}\ e^{-\alpha^2}. \tag{9.21}$$

Die Rechnung ist im Anhang G ausgeführt.
Mit den Substitutionen (9.11) (9.12) (9.14) und (9.15) erhält

man schließlich die Korrelationsfunktionen $C_{\pm}(t)$

$$C_{\pm}(t) = e^{-i(\hat{\varphi}_0 \pm \hat{\varphi}_0)}\, e^{-\frac{D}{\gamma}\left(1 \pm e^{-\gamma t}\right)} \tag{9.9}$$

Die Rechnung ist dem Anhang H zu entnehmen. Dies ist das gleiche Resultat wie in der Langevin-Methode.

c) Das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$

Mit Gl.(7.2) und Gl.(5.11) folgt für die Korrelationsfunktion $\ll \cos\varphi \cos\varphi_0 \gg$ schließlich

$$\ll \cos\varphi \cos\varphi_0 \gg = e^{-D/\gamma}\left\{\cosh\left(\frac{D}{\gamma}e^{-\gamma t}\right) - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \exp\left[-\frac{D}{\gamma}e^{-\gamma t}\right]\right\} \tag{9.22}$$

Hieraus finden wir nach dem Wiener-Khintchine-Theorem [31] [32] und Gl.(7.1) durch Fouriertransformation das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$. Durch Entwicklung des cosh und der Exponentialfunktion und anschließender Fouriertransformation folgt:

$$\alpha(\omega) = e^{-D/\gamma}\left\{2\pi\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)\delta(\omega) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(D/\gamma)^{2l}}{(2l)!}\,\frac{4l\gamma}{\omega^2 + (2l\gamma)^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-D/\gamma)^l}{l!}\,\frac{2l\gamma}{\omega^2 + (l\gamma)^2}\right\} \tag{9.23}$$

Man kann dieses Spektrum mit dem eingangs erwähnten Analogon des Lasers mit eingestrahltem Signal vergleichen. Es unterscheidet sich im Grenzfall $a = o$ von dem in Ref. [39] dadurch, daß dort für das Spektrum des eingestrahlten Signals eine Lorentzkurve mit endlicher Linienbreite angenommen wurde. Im Grenzfall eines unendlich schmalen „eingestrahlten Signals " stimmen beide Spektren überein.

Für $\frac{D}{\gamma} = \frac{D}{b}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{a}{b})^2}} \ll 1$, was dem hier betrachteten Grenzfall entspricht, wird aus Gl.(9.23) näherungsweise

$$\alpha(\omega) = e^{-D/\gamma}\left\{2\pi\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)\delta(\omega) + 2\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{D}{\gamma}\right)\frac{\gamma}{\omega^2+\gamma^2} + 2\left(\frac{D}{\gamma}\right)^2 \frac{2\gamma}{\omega^2 + (2\gamma)^2} + \ldots\right\} \tag{9.24}$$

und im Grenzfall $D \longrightarrow o$ geht das Spektrum in das des deterministischen Falles Gl.(5.13) über.
Die δ-Funktion, die auch im rausch-freien Fall auftritt, erscheint wieder.*) Sie ist ein Maß für die Tendenz des Lasers zum Einrasten, selbst bei Anwesenheit von Rauschquellen. Die Größe dieses Beitrages nimmt mit wachsendem a , d.h. mit wachsendem Abstand vom Zentrum des Einrastbereichs, ab.
Anders als im deterministischen Fall treten zusätzlich zur δ-Funktion noch weitere Lorentzkurven bei $\omega = o$ auf, wobei in dieser Näherung nur die ersten beiden zu betrachten sind. Für a=o erscheint nur eine mit der Linienbreite 2γ = b. Für wachsenden Wert von a aber dominiert die Lorentzkurve mit der Linienbreite γ , so daß insgesamt für wachsendes a die Linienbreite von 2γ schnell auf γ abfällt. Dies wird noch verstärkt dadurch, daß der Parameter $\gamma = \sqrt{b^2 - a^2}$ selbst abnimmt.

9.2 Der Bereich $|a| \gg b$ in der Fokker-Planck-Methode

In Kapitel 5.3 haben wir gezeigt, daß für a>b das Spektrum des Schwebungssignals cosφ aus einer Summe von δ-Funktionen bei den Frequenzen

$$n\Gamma = n\sqrt{a^2 - b^2} \qquad n \in \{\ \ldots -1, +1, +2, \ldots\}$$

besteht, daß also Erzeugung von Harmonischen vorliegt. Da dies ein nichtlinearer Effekt ist, herrührend von dem sinφ-Term in Gl.(4.22), hat es keinen Sinn, eine Linearisierung von Gl.(6.10) zu versuchen, wenn man das Spektrum einschließlich der Harmonischen in Anwesenheit des Rauschens erhalten will. Statt dessen gehen wir nochmals auf die Eigenwertgleichung (6.16) zurück.
Der Fourieransatz

$$P_L(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^L\, e^{in\varphi} \tag{9.25}$$

*) Der mathematische Grund für das Auftreten der δ-Funktion ist, daß die Korrelationsfunktion nicht quadratintegrabel ist.

führt auf ein Drei-Term Rekursionsschema der Form

$$c_n^l\left(\lambda_l - n^2 D - ina\right) - \frac{b}{2}n\left(c_{n+1}^l - c_{n-1}^l\right) = 0 \qquad (9.26)$$

das sich exakt in Form von Kettenbrüchen lösen läßt (siehe Kapitel 10). Es ist jedoch von Interesse, eine geschlossene Näherungslösung zu berechnen, die man mit dem rauschfreien Fall vergleichen kann.
Für den Fall $a \gg b$ können wir die Eigenwerte λ_l in 1. Ordnung in $(\frac{b}{a})$ berechnen. Diese Rechnung ist in Anhang I dargestellt. Wir finden

$$\lambda_l = l^2\Delta + il\alpha \qquad (9.27)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\Delta := D\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right] \qquad (9.27a)$$

und

$$\alpha := a\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right] \qquad (9.27b)$$

benutzt haben.

Mit Gl.(6.21)

$$P(t,\varphi\,|\,t_0=0,\varphi_0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_l t}\,\frac{P_l^*(\varphi_0)P_l(\varphi)}{P_s(\varphi_0)} \qquad (6.21)$$

und der Entwicklung (9.25) reduzieren sich die $C_\pm$

$$C_\pm(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi_0\, e^{\mp i\varphi_0} P_s(\varphi_0) \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-i\varphi} P(t,\varphi\,|\,t_0=0,\varphi_0) =$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_l t} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 e^{\mp i\varphi_0} P_l^*(\varphi_0) \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-i\varphi} P_l(\varphi)$$

zu

$$C_\pm(t) = (2\pi)^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_l t}\; {}^{*l}_{c_{+1}^{-1}}\; {}^{l}_{c_{+1}^{+1}} \qquad (9.28)$$

Daher genügt es, die Koeffizienten $c_{\pm 1}^l$ zu kennen. Diese sind

im Anhang J berechnet. Dort wird weiter gezeigt, daß man zusammen mit Gl.(9.28) und Gl.(7.2) folgende Korrelationsfunktion erhält

$$\ll \cos\varphi(t)\cos\varphi_0 \gg = \left(\frac{b}{2a}\right)^2\left(\frac{D}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{\Gamma}{b}\right)^2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{b}{2a}\right)^{2|l|} e^{-l^2\Delta t}\cos(l\alpha t) \qquad (9.29)$$

Da für die Korrelationsfunktion $\mathcal{C}(t)$ eines stationären Prozesses

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}(-t)$$

gilt, folgt bei der Fouriertransformation von Gl.(9.29) durch einfache Rechnung für das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$

$$\alpha(\omega) = 2\pi\left(\frac{b}{2a}\right)^2\left(\frac{D}{a}\right)^2\delta(\omega) + \left(\frac{\Gamma}{b}\right)^2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{b}{2a}\right)^{2|l|} \frac{2l^2\Delta}{(\omega - l\alpha)^2 + (l^2\Delta)^2} \qquad (9.30)$$

Das Spektrum setzt sich aus einer Summe von Lorentzkurven mit Zentrum bei $\omega = \pm l\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$ und der Linienbreite $l^2 D\left(1 + \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$ zusammen. Bei $\omega = 0$ ist eine δ-Funktion vorhanden.
Benutzen wir die Beziehung [28]

$$\pi\,\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$$

so geht für $\Delta \doteq D \to 0$ das Spektrum in das des rauschfreien Falles Gl.(5.21) über und die δ-Funktion bei $\omega = 0$ verschwindet. Das Rauschen hat somit, wie erwartet, die δ-Funktionen verbreitert.

Man findet, daß eine gute Übereinstimmung zwischen diesen approximativen Lösungen und den numerischen aus Kapitel 10 für $a \gg b$ besteht. Für $a \gtrsim b$ jedoch werden Zusatzterme notwendig. J. Cresser [38] hat für diesen Bereich, ausgehend von der Langevingleichung und der Annahme $\frac{bD}{2\Gamma^2} \ll 1$, ein Spektrum der Form

$$\alpha(\omega) = 2\pi\left(\frac{a-\Gamma}{2b}D\right)^2\left[\frac{a-\Gamma}{\Gamma^2+4d^2} - \frac{2a}{\Gamma^2+d^2}\right]^2\delta(\omega) +$$
$$+ \left(\frac{\Gamma}{b}\right)^2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{a-\Gamma}{b}\right)^{|l|} \frac{2l^2 d}{(\omega - n\Gamma)^2 + (l^2 d)^2} \qquad (9.31)$$

mit

$$\alpha = \frac{D}{r^2}\left(a^2 + \frac{1}{2}b^2\right) \qquad (3.32)$$

hergeleitet.
Es läßt sich leicht zeigen, daß dieses im Grenzfall a≫b in das von Gl.(9.30) übergeht.

9.3 Asymptotischer Bereich b = o in der Langevin-Methode

Für a⋙b können wir den nichtlinearen Term $b\cdot\sin\varphi$ in Gl.(7.10) gegen a vernachlässigen und betrachten also den Fall b = o. Dann ist die Kopplung zwischen den beiden gegenläufigen Wellen, herrührend von der Rückstreuung der Spiegel, entfallen. Die Wellen sind vollständig entkoppelt und voneinander unabhängig. Folglich muß sich das System wie zwei entkoppelte Ein-Moden Laser verhalten,dessen Lösung wohlbekannt ist. [8] [31] Das Spektrum hat daher eine Lorentzform; die Linienbreite ist durch die Diffusionskonstante D gegeben. Dieses Ergebnis soll noch einmal, ausgehend von unserer Formulierung in der Langevin-Gleichung, hergeleitet werden. Die Bewegungsgleichung (7.10) für die Phasendifferenz reduziert sich wegen b = o zu

$$\dot{\varphi}(t) = a + F(t) \qquad (9.33)$$

Die Integration dieser Differentialgleichung und die anschließende Berechnung der Korrelationsfunktion $\ll\cos\varphi\cos\varphi_0\gg$ ist im Anhang K ausgeführt und wir finden nach kurzer Rechnung

$$\ll\cos\varphi\cos\varphi_0\gg = \frac{1}{2}e^{-D|t|}\cdot\cos(at) \qquad (9.34)$$

Die Fouriertransformation davon liefert

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{D}{(\omega-a)^2+D^2} + \frac{D}{(\omega+a)^2+D^2}\right] \qquad (9.35)$$

Das Spektrum ist in der Tat das zweier Ein-Moden Laser mit Lorentzkurven bei $\omega = \pm a$ der Linienbreite D.

10. Exakter Ausdruck für das Spektrum in Form von Kettenbrüchen

In Kapitel 8 konnte ein geschlossener Ausdruck für die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung P_s angegeben werden. In Kapitel 9 haben wir das qualitative Verhalten des Laser-Gyroskops durch Näherungsausdrücke für die Fokker-Planck und die Langevin-Gleichung in bestimmten Teilbereichen qualitativ diskutieren können. Die exakte numerische Berechnung dagegen geschieht mit der von J. Cresser und Mitarbeitern [40] für dieses Problem entwickelten Kettenbruchmethode, die in diesem Kapitel dargestellt werden soll. Mit diesem Verfahren wurden die numerischen Lösungen gewonnen, die in dieser Arbeit dargestellt sind. Die Beweise sind stark verkürzt. Fragen der Konvergenz von Kettenbrüchen sind in Ref. [41] behandelt.

10.1 Rekursionsschema für die Fokker-Planck-Gleichung

Den Ausgangspunkt für das Lösungsverfahren bildet die Fokker-Planck-Gleichung in der Form

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -(a+b\sin\varphi)\frac{\partial P}{\partial\varphi} - b\cos\varphi P + D\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2} \qquad (10.1)$$

Als Lösungsansatz benutzen wir eine Entwicklung in eine Fourierreihe bezgl. φ

$$P(t,\varphi\,|\,t=0,\varphi_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t,\varphi_0)\,e^{in\varphi} \qquad (10.2)$$

wodurch wir auch die Periodizitätsbedingung

$$P(\varphi+2\pi) = P(\varphi)$$

gewährleistet haben. Damit und auf Grund der linearen Unabhängigkeit der $e^{in\varphi}$ reduziert sich Gl.(10.1) zu:

$$-n\frac{b}{2}c_{n-1}(t,\varphi_0) - (n^2D+ina)c_n(t,\varphi_0) + n\frac{b}{2}c_{n+1}(t,\varphi_0) = \frac{\partial c_n(t,\varphi_0)}{\partial t} \qquad (10.3)$$

woraus sofort für n = o

$$\dot{c}_o(t, \varphi_o) = o$$

folgt. Wegen der Normierung von P auf 1

$$1 = \int_0^{2\pi} d\varphi\, P(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t,\varphi_o) \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi} = c_o(t,\varphi_o)\, 2\pi$$

gilt somit

$$c_o(t, \varphi_o) = c_o = \frac{1}{2\pi} \tag{10.4}$$

Durch Anpassen von Gl.(10.2) an die Anfangsverteilung

$$P(t=o, \varphi | t=o, \varphi_o) = \delta(\varphi - \varphi_o)$$

finden wir

$$c_n(o, \varphi_o) = \frac{1}{2\pi} e^{-in\varphi_o} \tag{10.4a}$$

Abschließend notieren wir noch die nützliche Beziehung

$$c_n(t, \varphi_o) = c^*_{-n}(t, \varphi_o) \ , \tag{10.5}$$

die aus Gl.(10.2) und der Reellwertigkeit von P folgt.

10.2 Laplacetransformation der rekursiven Fokker-Planck-Gleichung

Statt Gl.(10.3) direkt zu lösen, ist es günstiger, sie durch Laplacetransformation

$$\tilde{c}_n(s, \varphi_o) = \int_0^{\infty} dt\, e^{-st} c_n(t, \varphi_o) \tag{10.6}$$

auf eine rein algebraische Rekursionsformel zurückzuführen. Durch Multiplikation mit e^{-st}, Integration über t von o bis ∞ und partieller Integration folgt aus (10.3)

$$n\frac{b}{2}\tilde{c}_{n-1}(s,\varphi_o) + (s + n^2 D + in\alpha)\tilde{c}_n(s,\varphi_o) - n\frac{b}{2}\tilde{c}_{n+1}(s,\varphi_o) = c_n(t=o, \varphi_o) \tag{10.7}$$

Die Lösung dieses Rekursionsschemas ist im Anhang L ausgeführt. Wir finden

$$\tilde{c}_o(s) = \frac{1}{2\pi s} \tag{10.8}$$

$$\tilde{c}_n(s, \varphi_o) = \mathcal{S}_n(s)\tilde{c}_{n-1}(s,\varphi_o) + a_n(s,\varphi_o) \tag{10.9}$$

wobei

$$\mathcal{S}_n(s) = \frac{n\frac{b}{2}}{-(s + n^2 D + in\alpha) + n\frac{b}{2}\mathcal{S}_{n+1}(s)} \tag{10.10}$$

und

$$a_n(s,\varphi_o) = \frac{c_n(t=o,\varphi_o) + n\frac{b}{2}a_{n+1}(s,\varphi_o)}{(s + n^2 D + in\alpha) - n\frac{b}{2}\mathcal{S}_{n+1}(s)} \tag{10.11}$$

so daß wir jetzt die Koeffizienten $\tilde{c}_n$ in Form von unendlichen Kettenbrüchen darstellen können. Zur Berechnung muß man so vorgehen, daß man sich zunächst gemäß Gl.(10.10) alle $S_n(s)$ berechnet. Diese sind von der Form

$$\mathcal{S}_n(s) = \cfrac{\alpha_n}{\beta_n + \alpha_n \cfrac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} \cfrac{\alpha_{n+2}}{\ddots}}}$$

mit

$$\alpha_n := n\frac{b}{2}$$

$$\beta_n := -(s + n^2 D + in\alpha)$$

Die Koeffizienten $c_n(t=o, \varphi_o)$ sind aus Gl.(10.4a) bekannt und hängen von φ_o ab. Daher hängen die Kettenbrüche a_n nach Gl.(10.11) ebenfalls von φ_o ab. Mit den aus (10.10) berechneten $S_n(s)$ und den c_n aus Gl.(10.4a) kann man a_n berechnen. Diese sind von der Form

$$a_n(s, \varphi_o) = \frac{c_n + \alpha_n \cfrac{c_{n+1} + \alpha_{n+1} \cfrac{c_{n+2} + \alpha_{n+2} \cfrac{\ddots}{\beta_{n+2} - \alpha_{n+2}\mathcal{S}_{n+3}}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}\mathcal{S}_{n+2}}}{\beta_n - \alpha_n \mathcal{S}_{n+1}}$$

Die Konvergenz solcher unendlichen Kettenbrüche ist in Ref. [41] behandelt. Es erweist sich im nächsten Abschnitt als nicht notwendig, die Laplacetransformation zu invertieren, da sich das Spektrum von $\cos\varphi$ durch diese Laplacetransformierten Koeffizienten ausdrücken läßt.

Zuvor wollen wir jedoch noch die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung P_s in Form von Kettenbrüchen angeben. Dies ist leicht möglich, da, wie wir sehen werden, dessen Rekursionsschema dieselbe Struktur wie Gleichung (10.7) hat.
Die stationäre Lösung P_s erhalten wir für

$$\frac{\partial P}{\partial t} \equiv 0$$

Wegen des Ansatzes (10.2) ist dies äquivalent mit

$$\dot{c}_n(t,\varphi_0) = 0$$

Gl. (10.3) geht dadurch über in

$$-n\frac{b}{2}c_{n-1}^{(s)}(\varphi_0) - (n^2D + ina)c_n^{(s)}(\varphi_0) + n\frac{b}{2}c_{n+1}^{(s)}(\varphi_0) = 0 \qquad (10.12)$$

wobei wir

$$c_n^{(s)}(\varphi_0) \equiv c_n(t\longrightarrow\infty, \varphi_0)$$

gesetzt haben. Das Schema (10.12) hat dieselbe Struktur wie die homogene Gleichung (10.7), wenn wir dort s = o setzen. Diese ist im Anhang L gelöst worden und wir können die Koeffizienten sofort angeben, nämlich

$$c_0^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \qquad (10.4)$$

und

$$c_n^{(s)} = S_n(0)\,c_{n-1}^{(s)} = c_{-n}^{(s)*} \qquad (10.13)$$

mit

$$S_n(0) = \frac{n\frac{b}{2}}{-n^2D - ina + n\frac{b}{2}S_{n+1}(0)} \qquad (10.10a)$$

Da sowohl die $S_n(o)$ auf Grund von Gl. (10.10a), als auch $c_o^{(s)} = \frac{1}{2\pi}$ von der Anfangskoordinate φ_0 unabhängig sind, sind es wegen Gl. (10.13) auch die $c_n^{(s)}$.
Daher folgt für die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung P_s

$$P_s(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(s)}\, e^{in\varphi} \qquad (10.14)$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten $c_n^{(s)}$ rekursiv durch Gl. (10.13) definiert sind und durch unendliche Kettenbrüche $S_n(o)$ ausgedrückt werden.

10.3 Berechnung des Spektrums in der Kettenbruchmethode

Da für die Korrelationsfunktion $\mathcal{C} = \mathcal{C}(t)$ eines stationären Prozesses

$$\mathcal{C}(-t) = \mathcal{C}(t)$$

gilt, läßt sich das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$ auf

$$\alpha(\omega) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^t dt \ll \cos\varphi(t)\cos\varphi_0 \gg e^{i\omega t}\right\}$$

zurückführen. Mit der Fourierreihe für die Wahrscheinlichkeitsverteilung P Gl. (10.2) finden wir

$$\ll\cos\varphi\cos\varphi_0\gg = \int_0^{2\pi}d\varphi_0 P_s(\varphi_0)\cos\varphi_0 \int_0^{2\pi}d\varphi\, P(\varphi)\cos\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi_0 P_s(\varphi_0)\cos\varphi_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}d\varphi\,(c_n(t,\varphi_0)e^{i(n+1)\varphi} + c_{-n}e^{i(n-1)\varphi}) =$$

$$= \pi\int_0^{2\pi}d\varphi_0 P_s(\varphi_0)\cos\varphi_0\,(c_1(t,\varphi_0) + c_{-1}(t,\varphi_0))$$

und damit für das Spektrum α

$$\alpha(\omega) = 2\pi\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi}d\varphi_0 P_s(\varphi_0)\cos\varphi_0 \int_0^{\infty}dt\, e^{i\omega t}\left[c_1(t,\varphi_0) + c_{-1}(t,\varphi_0)\right]\right\} \qquad (10.15)$$

Die Fouriertransformation bzgl. t ist eng mit den Laplacetransformierten $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_{-1}$ verknüpft, die sich vermöge Gl. (10.9) durch $\tilde{c}_o = \frac{1}{2\pi s}$ ausdrücken lassen. Um die Singularität von $\tilde{c}_o$ bei s = o zu vermeiden, benutzen wir die Integraltransformation für komplexes Argument.

$$\mathcal{J}(\omega) := \lim_{\varepsilon\to o}\left\{\int_0^{\infty}dt\, e^{i(\omega+i\varepsilon)t}\left[c_1(t,\varphi_0) + c_{-1}(t,\varphi_0)\right]\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to o}\left\{\tilde{c}_1(\varepsilon - i\omega,\varphi_0) + \tilde{c}_{-1}(\varepsilon - i\omega,\varphi_0)\right\}$$

Mit Gl. (10.5) folgt aus Gl. (10.6)

$$\tilde{c}_1^{\,*}(\varepsilon+i\omega,\varphi_0) = \tilde{c}_{-1}(\varepsilon-i\omega,\varphi_0)$$

und mit Gl. (10.8) und (10.9)

$$\tilde{c}_1(s,\varphi_0) = \frac{S_1(s)}{2\pi s} + a_1(s,\varphi_0)$$

also insgesamt

$$J(\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{S_1(-i\omega+\varepsilon)}{2\pi(-i\omega+\varepsilon)} + \frac{S_1^*(i\omega+\varepsilon)}{2\pi(i\omega+\varepsilon)} + a_1(-i\omega+\varepsilon,\varphi_0) + a_1^*(i\omega+\varepsilon,\varphi_0)\right\}$$

oder

$$J(\omega) = \frac{S_1(-i\omega)+S_1^*(i\omega)}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon-i\omega}\right) + a_1(-i\omega,\varphi_0) + a_1^*(i\omega,\varphi_0) \qquad (10.16)$$

wobei wir noch verwendet haben, daß $S_1(s)$ und $a_1(s)$ gemäß Gl. (10.10a) und (10.11) bei $s = \pm i\omega$ keine offensichtlichen Singularitäten besitzen.
Wegen

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon-i\omega} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^2} + i\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2} = \pi\delta(\omega) + i\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}$$

folgt aus (10.16)

$$J(\omega) = \frac{S_1(-i\omega)+S_1^*(i\omega)}{2}\delta(\omega) + \frac{i}{2\pi}\left[S_1(-i\omega)-S_1(0)\right]\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2} +$$
$$+ \frac{i}{2\pi}\left[S_1(i\omega)-S_1(0)\right]^*\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2} + \frac{i}{2\pi}\left[S_1(0)+S_1^*(0)\right]\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}$$
$$+ a_1(-i\omega,\varphi_0) + a_1^*(i\omega,\varphi_0) =$$
$$= \mathrm{Re}\left[S_1(0)\right]\delta(\omega) + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{S_1(-i\omega)-S_1(0)}{(-i\omega)} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{S_1(+i\omega)-S_1(0)}{i\omega}\right]^* \qquad (10.17)$$
$$+ \frac{i}{\pi}\mathrm{Re}\left[S_1(0)\right]\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2} + a_1(-i\omega,\varphi_0) + a_1^*(i\omega,\varphi_0)\,.$$

Für die durch

$$T_n(s) := \frac{S_n(s) - S_n(0)}{s} \qquad (10.18)$$

definierten Größen läßt sich unter Benutzung von Gl. (10.10a) leicht ein Rekursionsschema ableiten

$$1 - \tfrac{1}{2}nbT_{n+1}(s) = \frac{-\left[-(s+n^2D+ina)+\tfrac{1}{2}nbS_{n+1}(s)\right]-(n^2D+ina)+\tfrac{1}{2}nbS_{n+1}(0)}{s}$$
$$= \frac{nb}{2S_n(s)S_n(0)}T_n(s)$$

also

$$T_n(s) = \frac{2S_n(s)S_n(0)}{nb}\left[1 - \tfrac{1}{2}nbT_{n+1}(s)\right] \qquad (10.19)$$

Damit wird Gl. (10.17) zu

$$J(\omega) = \mathrm{Re}\left[S_1(0)\right]\delta(\omega) + \frac{1}{2\pi}\left[T_1(-i\omega) + T_1^*(i\omega)\right]$$
$$+ \frac{i}{\pi}\mathrm{Re}\left[S_1(0)\right]\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2} + a_1(-i\omega,\varphi_0) + a_1^*(i\omega,\varphi_0) \qquad (10.20)$$

Für das Integral über $P_s(\varphi_0)$ finden wir mit Gl. (10.8), (10.4) und (10.14)

$$\int_0^{2\pi}d\varphi_0 P_s(\varphi_0)\cos\varphi_0 = \pi\left(c_1^{(s)} + c_{-1}^{(s)}\right) = \pi\left(c_1^{(s)} + c_1^{(s)*}\right) =$$
$$= 2\pi\,\mathrm{Re}\left[c_1^{(s)}\right] = 2\pi\,\mathrm{Re}\left[S_1(0)c_0^{(s)}\right] \qquad (10.21)$$
$$= \mathrm{Re}\left[S_1(0)\right]$$

und zusammen mit Gl. (10.15) schließlich für das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$

$$\alpha(\omega) = 2\pi\left(\mathrm{Re}\left[S_1(0)\right]\right)^2\delta(\omega) + \mathrm{Re}\left[S_1(0)\right]\mathrm{Re}\left[T_1(-i\omega) + T_1^*(i\omega)\right]$$
$$+ 2\pi\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi}d\varphi_0 P_s(\varphi_0)\left[a_1(-i\omega,\varphi_0) + a_1^*(i\omega,\varphi_0)\right]\right\} \qquad (10.22)$$

Zur Berechnung von S_1, a_1 und T_1 sind hierbei die Gleichungen

(10.10), (10.11) und (10.19) zu benutzen. Sämtliche numerische Spektren wurden mit Gleichung (10.22) gewonnen.
Das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$ besteht somit aus zwei Anteilen

der δ-Funktion

einem später diskutierten breiten Spektrum.

Es ist nützlich, das über ω integrierte Spektrum mit dem Beitrag der δ-Funktion, der den Effekt des Einrastens beinhaltet, zu vergleichen. Aus Gl.(10.22) erhält man den Beitrag der δ-Funktion
als

$$\alpha_D = 2\pi \left\{ Re \left[S_1(0) \right] \right\}^2 \qquad (10.23)$$

Für das integrierte Spektrum α_I folgt mit

$$\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} \ll \cos\varphi \cos\varphi_0 \gg = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t}\, \mathcal{C}(t)$$

$$\alpha_I = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t}\, \mathcal{C}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \mathcal{C}(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}$$

also

$$\alpha_I = 2\pi\, \mathcal{C}(0) = 2\pi \langle \cos^2 \varphi_0 \rangle \qquad (10.24)$$

Wenn der Laser im stationären Zustand ist, folgt hieraus mit der Entwicklung (10.14) für P_s unter Verwendung von

$$\cos^2\delta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\delta\right)$$

und Gl.(10.5)

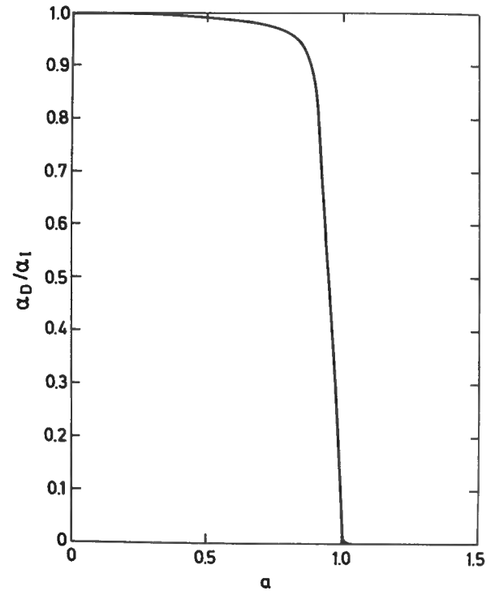
$$\alpha_I = 2\pi \int_0^{2\pi} d\varphi_0\, P_s(\varphi_0) \cos^2\varphi_0 = \pi + \pi^2 \left(c_{+2}^{(s)} + c_{-2}^{(s)} \right) = \pi + 2\pi^2\, Re\left[c_{+2}^{(s)} \right]$$

also mit Gl.(10.13)

$$\alpha_I = \pi + \pi\, Re\left[S_1(0)\, S_2(0) \right] \qquad (10.25)$$

In Figur 10 ist das Verhältnis $\frac{\alpha_D}{\alpha_I}$, d.h. der relative Anteil

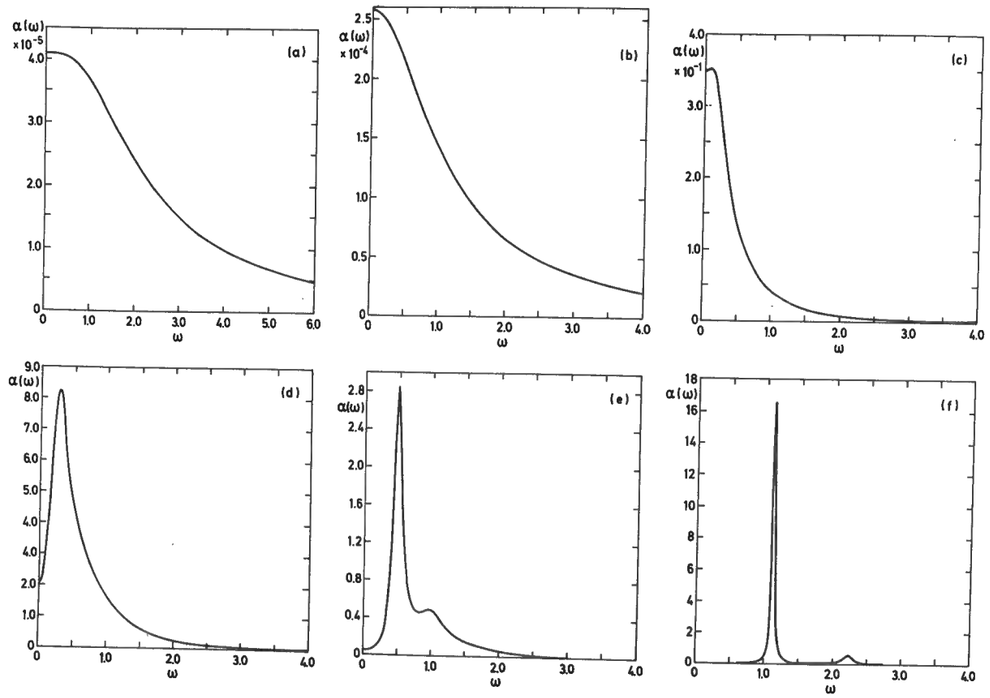
der δ-Funktion am Gesamtspektrum oder die relative Tendenz des Ringlasers zum Einrasten gegen die Rotationsfrequenz a aus der numerischen Rechnung aufgetragen. Innerhalb des toten Bandes $|a| < b$ ist das Spektrum zum größten Teil in der δ-Funktion konzentriert, während außerhalb a>b dieser Beitrag vernachlässigbar klein wird.



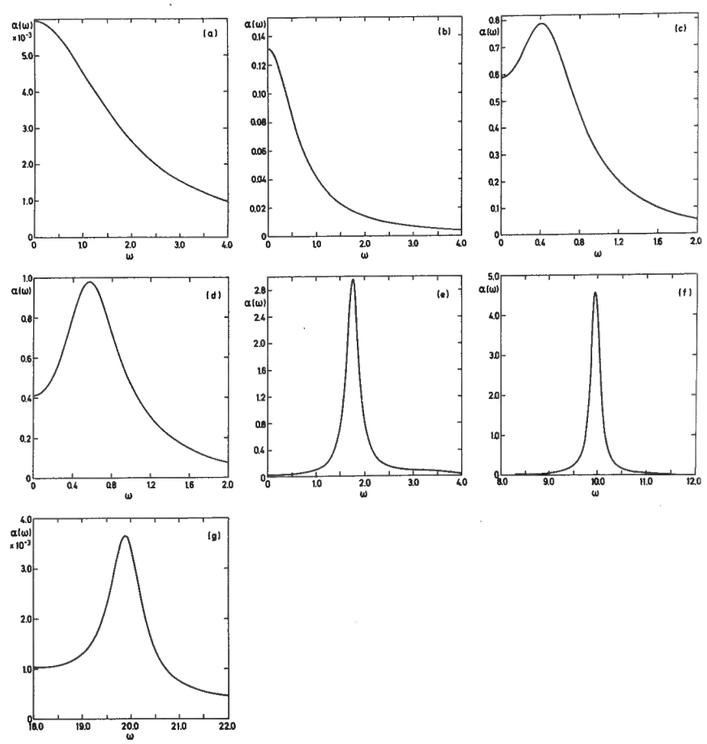
Figur 10: $\frac{\alpha_D}{\alpha_I}$ gegen a ($D = 10^{-2}$)

10.4 Numerische Ergebnisse

Die Figuren 11 und 12 zeigen das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$ für verschiedene Werte von a bei zwei unterschiedlichen Diffusionskonstanten D. Sowohl a als auch D sind in Einheiten des Rückstreu Koeffizienten b gegeben.



Figur 11: Das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$ für $D = 10^{-2}$ in Abhängigkeit von a in Einheiten von b
a) a = o b) a = 0.1 c) a = 0.95
d) a = 1.0 e) a = 1.1 f) a = 1.5
Es ist jeweils bei ω = o eine δ-Funktion vorhanden, deren relatives Gewicht durch Figur 10 gegeben ist.



Figur 12: Das Spektrum $\alpha = \alpha(\omega)$ entsprechend Fig. 11 für $D = 10^{-1}$
a) a = 0.0 b) a = 0.5 c) a = 0.9
d) a = 1.0 e) a = 2.0 f) a = 10
g) zweite Harmonische zu a = 10.

Innerhalb des toten Bandes (Figuren 11 a-c, 12 a-c) bestehen die Spektra im wesentlichen aus einer δ-Funktion bei ω=o und einem sehr schwachen, breiten Beitrag zentriert um ω=o. Die relative Größe dieses Beitrags ist aus Figur 10 ersichtlich. Erst für $a \simeq b$ wird der Beitrag des breiten Spektrums, dessen Linienbreite nach Gl. (9.24) proportional zu $\sqrt{b^2-a^2}$ ist,

bedeutend. Ebenfalls stellen wir fest, daß auf Grund des Rauschens, der freie Bereich schon innerhalb des toten Bands (z.B. Fig. 11, 12) auftritt, was sich in einem Maximum um eine von Null verschiedene Frequenz äußert.

Für $a \gtrsim b$ ist das Zentrum des Spektrums nicht mehr bei $\omega=o$, wie es im Einrastbereich war, sondern bei einem Wert, der für große Werte von a gegen $\sqrt{a^2-b^2}$ geht. Wie in Kapitel 5.1 gezeigt, ist dies die mittlere Schwebungsfrequenz und daher ist das Spektrum für große Werte von a um die mittlere Schwebungsfrequenz $\langle\dot{\varphi}\rangle_t$ zentriert. Für größer werdendes a stellen wir eine Abnahme der Linienbreite des inkoherenten Anteils des Spektrums, und das Auftreten der höheren Harmonischen fest. (Der Anteil der δ-Funktion wird dabei vernachlässigbar klein). Die Harmonischen, die auch schon im deterministischen Fall auftraten, sind auch im Fall $a \cong b$ vorhanden, überlappen sich aber wegen deren großen Breiten.

Für sehr große a geht die Linienbreite gegen D und die höheren Harmonischen werden vernachlässigbar klein. Alle diese Aussagen stimmen mit den Rechnungen aus Kapitel 9 überein.

10.5 Die mittlere Schwebungsfrequenz in der Anwesenheit von Rauschen

Abschließend betrachten wir den Einfluß des Rauschens auf das Schwebungssignal $\langle\dot{\varphi}\rangle_t$

Aus der Langevin-Gleichung (6.10) finden wir mit

$$\langle F(t)\rangle = o \qquad (6.8)$$

$$\langle\dot{\varphi}\rangle = a + b\langle\sin\varphi\rangle$$

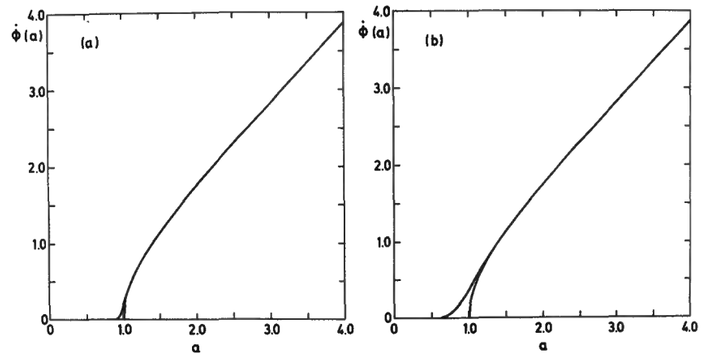
Wenn der Laser im stationären Zustand ist, folgt

$$\langle\dot{\varphi}\rangle = a + b\int_0^{2\pi} d\varphi\, P_s(\varphi)\sin\varphi$$

und mit der Entwicklung Gl.(10.8) für P_s und (10.13)

$$\langle\dot{\varphi}\rangle = a - b\,\mathrm{Im}\left[S_1(o)\right] \qquad (10.26)$$

Figur 13 zeigt das Einrast-Verhalten des Laser-Gyros unter Einfluß des Rauschens. Dabei sind jeweils die Vergleichskurven für den Fall ohne Rauschen aufgetragen.



Figur 13: Einrast-Kurve für a) $D = 10^{-2}$
b) $D = 10^{-1}$

(Die Kurve, die bei a = 1 die Abszisse trifft, ist die Kurve im Fall ohne Rauschen)

Wir stellen fest, daß der freie Bereich schon für kleinere Werte von a als im deterministischen Fall auftritt. Weit entfernt vom toten Band ($a \gg b$) stimmen die beiden Kurven wieder überein.

Dies stimmt qualitativ mit einer Arbeit von Kruglik und Mitarbeitern [42] überein, die zum Ergebnis kommt, daß durch "künstliches" Rauschen, z.B. durch Vibrieren eines der Laserspiegel, die Breite des toten Bands verkleinert werden kann.

11. ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wurde untersucht, inwieweit man durch Messung des Sagnac Effekts, d.h. durch Messung der Phasenverschiebung zweier gegenläufiger Wellen in einem rotierenden Interferometer, in der Lage ist, sehr kleine Rotationsfrequenzen zu bestimmen. Wie in der Einleitung näher erläutert, ist dies für experimentelle Tests der allgemeinen Relativitätstheorie anhand des Lense-Thirring Effekts von Interesse.

In Kapitel 2 dieser Arbeit haben wir den Sagnac Effekt zunächst noch einmal klassisch abgeleitet. Da jedoch beim Sagnac-Effekt die Lichtausbreitung in einem rotierenden System, also in einem Nichtinertialsystem vonstatten geht, ist es konsistenter den Sagnac-Effekt im Formalismus der allgemeinen Relativitätstheorie zu behandeln. Dabei haben wir in Kapitel 3 gefunden, daß die Frequenzdifferenz zwischen den gegenläufigen Wellen für ein auf der Erde ausgeführtes Experiment nicht nur einen Term proportional zur Rotationsfrequenz des Lasers, sondern noch zusätzliche Beiträge von der Größenordnung 10^{-10} mal der Erdrotationsfrequenz enthält, die vom Lense-Thirring und von Raumkrümmungseffekten herrühren. Es zeigt sich also, daß Ringlaser Experimente prinzipiell zum Test der allgemeinen Relativitätstheorie benutzt werden können. Bei dem von Scully vorgeschlagenen Experiment [5] werden die Beiträge der Erdrotation und der allgemeinen relativistischen Effekte zur Sagnacverschiebung durch eine zusätzliche Rotation des Gyroskops kompensiert, also eine Nullmessung durchgeführt. Dazu muß die Rotationsfrequenz Null genau gemessen werden, d.h. man muß sehr niedrige Rotationsfrequenzen messen können.

Bei einer detailierten Untersuchung eines Gyroskops in Kapitel 4 zeigt sich jedoch, daß es auf Grund von Spiegelverlusten zu einer Kopplung der beiden gegenläufigen Wellen kommt. Dies führt dazu, daß die mittlere Schwebungsfrequenz, wie in Kapitel 5 gezeigt, innerhalb eines Bereichs, dem toten Band oder Einrastbereich, verschwindet. Kleine Rotationsgeschwindigkeiten können also gerade nicht gemessen werden. Um Tests der allgemeinen Relativitätstheorie durchführen zu können, müssen folglich der Einrastbereich verkleinert oder neue Parameter gefunden werden, die ein Maß für die Winkelgeschwindigkeit darstellen.

Zu diesem Zweck haben wir den Einfluß des Laserrauschens, hervorgerufen durch spontane Emission der Atome, auf die mittlere Schwebungsfrequenz und das Spektrum des Schwebungssignals eines Laser Gyroskops untersucht. Diese Untersuchungen, die zusammen mit Scully und Mitarbeiter durchgeführt wurden, stellen die wesentlich neuen Ergebnisse dieser Arbeit dar und sind im folgenden nochmals zusammengefaßt.

Durch das Rauschen verschwindet die scharfe Trennung zwischen Einrast- und freien Bereich. Das Verhalten des Gyroskops wird im wesentlichen durch zwei Parameter bestimmt, der Größe a, die proportional zur Rotationsgeschwindigkeit des Gyroskops und in Gl.(4.23) definiert ist, und der Größe b, die die Kopplung der beiden gegenläufigen Wellen durch die Rückstreuung an den Spiegeln beschreibt. Diese ist in Gl.(4.19) definiert worden. In dieser Arbeit konnte das Verhalten des Gyroskops auf Grund von Näherungslösungen der Fokker-Planck bzw Langevin-Gleichung für verschiedene Grenzfälle diskutiert werden, sowie auf Grund von numerischen Lösungen auch für beliebige Fälle. Die Meßgröße, die im folgenden diskutiert wird, ist das Spektrum des Schwebungssignals des Gyroskops.

Für den Fall sehr großer Rotationsgeschwindigkeiten des Laser Gyroskops, d.h. $|a| \ggg b$, ist der Effekt der Rückstreuung praktisch zu vernachlässigen. Die beiden gegenläufigen Wellen sind entkoppelt. Das Spektrum des Schwebungssignals ist folglich das des herkömmlichen Ein-Moden Lasers, nämlich eine Lorentzkurve deren Linienbreite durch die Diffusionskonstante gegeben ist.

Für kleiner werdende Rotationsgeschwindigkeit des Gyroskops $|a| > b \neq 0$ wird der Effekt der Rückstreuung und damit die Nichtlinearität der Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz der beiden gegenläufigen Wellen wichtig. Hieraus resultiert die Erzeugung von Harmonischen bei Vielfachen der mittleren Schwebungsfrequenz.

Im Zusammenhang mit Tests der allgemeinen Relativitätstheorie ist das Verhalten des Spektrums für Winkelgeschwindigkeiten $|a| \cong b$ interessant. Hier ist die Rückstreuung der vorherschende Effekt und die beiden Wellen neigen zum Einrasten. Im Spektrum äußert sich dies durch das Auftreten

einer Deltafunktion bei der Frequenz $\omega=o$, deren relativer Anteil am über ω integriertem Gesamtspektrum jedoch sehr gering ist. Während das Gyroskop im rauschfreien Fall für $|a| \leqslant b$ eingerastet ist und somit das Spektrum nur aus einer Deltafunktion bei der Frequenz $\omega = o$ besteht, liegt in Anwesenheit von Rauschen das Zentrum der Lorentzkurven bei einer von Null verschiedenen Frequenz. Der Laser ist somit nicht eingerastet. Das Rauschen des Ringlasers hilft das Einrasten des Lasers zu verhindern und die Breite des toten Bandes zu verringern. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit russischen Arbeiten auf diesem Gebiet [42].

Ein weiterer interessanter Bereich ist der Einrastbereich der mit Rauschen etwa der Bereich $|a| \lesssim b/2$ umfaßt. Hier besteht das Spektrum aus zwei Anteilen jeweils um die Frequenz $\omega = o$ zentriert. Der erste Beitrag ist die Deltafunktion, die den deterministischen Einrasteffekt darstellt. Im Vergleich zum rauschfreien Fall ist deren Amplitude aber gedämpft. Der zweite Beitrag besteht aus einer Summe von Lorentzkurven, deren Linienbreite mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit abnimmt. Die Messung dieses Anteils des Spektrums und insbesondere der Linienbreite der Lorentzkurven stellt also eine prinzipielle Möglichkeit dar, niedrige Rotationsgeschwindigkeiten selbst innerhalb des toten Bandes anzugeben. Die numerischen Rechnungen in Kapitel 10 haben jedoch gezeigt, daß der relative Anteil der Lorentzkurven an dem über ω integrierten Gesamtspektrum verschwindend gering ist. Vom experimentellen Standpunkt wird es daher sehr schwer sein, die vom Rauschen des Lasers verursachten Lorentzkurven und speziell deren Breiten zu messen.

Obwohl das Rauschen, wie wir gesehen haben, eine Möglichkeit bietet, die Neigung des Ringlasers zum Einrasten zu verringern, ist es vermutlich nicht ausreichend, um die in Kapitel 3 dargestellten Effekte zu Tests der allgemeinen Relativitätstheorie meßbar zu machen. An anderen Methoden, wie der in der Einleitung erwähnten Zittermethode, arbeiten wir augenblicklich und es erscheint möglich, daß für eine bestimmte Wahl der Parameter der gesamte Einrastbereich verschwindet.

ANHANG A: Sagnac Effekt mit Materiewellen

Durch das Sagnac Experiment motiviert, kann man analog daran denken, statt der gegenläufigen Lichtwellen, Materiewellen z.B. Elektronen [12] oder Neutronen [13], zu benutzen - also den Sagnac Effekt mit Teilchen durchzuführen. In die Ableitung der Phasenverschiebung $\Delta\varphi_{Licht}$ der Lichtwellen geht entscheidend die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ein. Ein Analogon gibt es jedoch nicht für die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit von Materiewellen. Daher würde man keinen, oder jedenfalls nicht den gleichen Effekt erwarten. Dennoch kann man eine zu Gl. (2.10) völlig analoge Gleichung für Materiewellen angeben.

Im Abschnitt A1 leiten wir die Schrödinger Gleichung für ein freies Teilchen in einem rotierenden, passiven Interferometer ab und bestimmen im Abschnitt A2 die daraus resultierenden Wellenvektoren $k_{\pm}$ und die Phasenverschiebung $\Delta\varphi_{Elektron}$ der beiden gegenläufigen Materiewellen.

A1: Schrödinger Gleichung im rotierenden System

Die nicht relativistische Schrödinger Gleichung des freien Elektrons ist durch

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi \qquad (A.1)$$

gegeben. In dieser Form ist sie jedoch nur in einem Inertialsystem gültig, nicht aber in einem mit der Frequenz Ω um die z-Achse rotierenden System. Dort können wir, zumindest für kleine Rotationsgeschwindigkeiten, d.h. für

$$|\vec{v}| = |\vec{\Omega}\times\vec{r}| \ll c \qquad (A.2)$$

durch die Transformation der Differentialoperatoren [22]

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[(\vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{r})\right]$$

$$\vec{\nabla} \longrightarrow \vec{\nabla}$$

eine Gleichung im System erhalten. Gl. (A.1) geht dann in

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\hbar}{2i}\left((\vec{\Omega}\times\vec{r})\vec{\nabla}\Psi+\vec{\nabla}\left[(\vec{\Omega}\times\vec{r})\Psi\right]\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi \qquad (A.3)$$

über. Der Einfachheit halber stellen wir uns, wie in Kapitel 2, ein kreisförmiges ebenes Interferometer mit festem Radius ρ und der Länge P vor. Daher genügen uns zur Beschreibung die Zeitkoordinate t und der Azimutalwinkel ϕ. Mit der Beziehung

$$\vec{\nabla}\cdot\left[(\vec{\Omega}\times\vec{r})\Psi\right]=\vec{\nabla}\cdot(\rho\Omega\vec{e}_\phi\cdot\Psi)=\Psi\,\vec{\nabla}\cdot(\rho\Omega\vec{e}_\phi)+\rho\Omega\vec{e}_\phi\vec{\nabla}\Psi$$

wird Gl. (A.3) zu

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\hbar}{i}\rho\frac{\Omega}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$

oder

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\hbar}{i}\rho\Omega\frac{\partial\Psi}{\partial s}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2} \qquad (A.4)$$

wobei

$$s=\rho\phi$$

die Bogenlänge bezeichnet.

Die Lösung von Gl. (A.4) muß zudem noch die Periodizitätsbedingung

$$\Psi(s+P,t)=\Psi(s,t)$$

befriedigen.

A2: Bestimmung der Wellenvektoren $k_\pm$ und Phasenverschiebung $\Delta\varphi_{Elektron}$

Zur Lösung von Gl. (A.4) machen wir den Ansatz

$$\Psi(t,s)=\Psi_\pm(t)\,e^{-i(\nu_\pm t\pm k_\pm s+\varphi_\pm(t))} \qquad (A.5)$$

mit

$\Psi_\pm$, $\varphi_\pm$ reell

und finden

$$e^{-i(\nu_\pm t+\varphi_\pm(t))}\,e^{\mp ik_\pm s}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi_\pm}{\partial t}+\hbar(\nu_\pm+\dot{\varphi}_\pm)\Psi_\pm\right.$$
$$\left.\mp\hbar\rho\Omega k_\pm\Psi_\pm\right)=e^{-i(\nu_\pm t+\varphi_\pm(t))}\,e^{\mp ik_\pm s}\,\frac{\hbar^2}{2m}k_\pm^2\Psi_\pm(t) \qquad (A.6)$$

oder

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi_\pm}{\partial t}+\hbar(\nu_\pm+\dot{\varphi}_\pm)\Psi_\pm\mp\hbar k_\pm\rho\Omega\Psi_\pm=\frac{\hbar^2}{2m}k_\pm^2\Psi_\pm$$

Trennung in Real- bzw. Imaginärteil gibt

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi_\pm}{\partial t}=0 \qquad (A.7a)$$

$$\nu_\pm+\dot{\varphi}_\pm=\frac{\hbar^2}{2m}k_\pm^2\pm k_\pm\frac{2A\Omega}{P} \qquad (A.7b)$$

wobei wir außerdem $A=\pi\rho^2$ und $P=2\pi\rho$ benutzt haben.

Die Gl. (A.7a) zeigt, daß die reellen Amplituden $\Psi_\pm$ Konstante sind, die durch die Normierung von Ψ festgelegt sind.

Die Gleichung (A.8b) dagegen liefert die Phasenverschiebung $\Delta\varphi_{Elektron}$ zwischen den beiden gegenläufigen Materiewellen.

Durch Benutzung der Comptonwellenlänge

$$\lambda_e=\frac{\hbar}{mc} \qquad (A.8)$$

folgt aus (A.7b)

$$k_\pm^2\pm k_\pm\cdot\frac{\frac{4A\Omega}{\lambda_e\cdot c}}{P}-\frac{2(\nu_\pm+\dot{\varphi}_\pm)}{\lambda_e\cdot c}=0$$

dessen Lösung sich sofort mit

$$k_\pm=\mp\frac{1}{2}\,\frac{\frac{4A\Omega}{\lambda_e\cdot c}}{P}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2P}\right)^2\left(\frac{4A\Omega}{\lambda_e\cdot c}\right)^2+2\,\frac{\nu_\pm+\dot{\varphi}_\pm}{\lambda_e\cdot c}} \qquad (A.9)$$

angeben läßt. Dieses Ergebnis vereinfacht sich in erster Ordnung in Ω zu

$$k_\pm=\sqrt{2\,\frac{\nu_\pm+\dot{\varphi}_\pm}{\lambda_e\cdot c}}\mp\frac{1}{2P}\,\frac{4A\Omega}{\lambda_e\cdot c} \qquad (A.10)$$

Wegen $\nu_+ +\varphi_+\cong\nu_-+\varphi_-=:\nu$ gilt (passives Interferometer)

$$k_\pm=\sqrt{2\,\frac{\nu}{\lambda_e\cdot c}}\mp\frac{1}{2P}\,\frac{4A\Omega}{\lambda_e c} \qquad (A.11)$$

Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi_{Elektron}$ der beiden gegenläufigen Elektronen-Materiewellen ist durch

$$\Delta\varphi_{Elektron} = |k_+ - k_-|P$$

gegeben und mit Gl. (A.11) folgt schließlich

$$\Delta\varphi_{Elektron} = \frac{4A\Omega}{\lambda_c \cdot c} \qquad (A.12)$$

Diese Beziehung ist formal die gleiche wie für Lichtwellen, jedoch ist die Wellenlänge des Lichts durch die Comptonwellenlänge des Elektrons ersetzt.

ANHANG B: Potentialmethode zur Gewinnung von qualitativen Aussagen über Lösungen von Differentialgleichungen der Form $\dot{\varphi} = \mathfrak{F}(\varphi, c_\rho)$

Vorgelegt sei die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{\varphi}(t) = \mathfrak{F}(\varphi, c_\rho) \qquad (B.1)$$

wobei $\mathfrak{F}$ eine in φ mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion mit den Parametern c_ρ sei. $\mathfrak{F}$ enthalte die Zeit t nicht explizit. Durch Differentiation von Gl. (B.1) nach der Zeit finden wir

$$\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt}\mathfrak{F}(\varphi, c_\rho) = \frac{d}{d\varphi}\mathfrak{F}(\varphi, c_\rho)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{F}(\varphi, c_\rho)}{\partial\varphi}\mathfrak{F}(\varphi, c_\rho) \qquad (B.2)$$

Mit der Setzung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{dV}{d\varphi} \qquad (B.3)$$

wird daraus sofort

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varphi}$$

also

$$V(\varphi, c_\rho) = -\frac{1}{2}\left[\mathfrak{F}(\varphi, c_\rho)\right]^2 = -\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \qquad (B.4)$$

wobei wir die "Eichung"

$$V(\varphi_0, c_\rho) = -\frac{1}{2}\left[\mathfrak{F}(\varphi_0, c_\rho)\right]^2$$

benutzt haben.
Damit folgt der einer formalen Energieerhaltung eines Teilchens mit Einheitsmasse, der Koordinate φ in einem Potential V analoge Erhaltungssatz

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi, c_\rho) = 0 \,. \qquad (B.5)$$

Aus dieser klassisch mechanischen Analogie lassen sich nun qualitative Aussagen über φ durch Darstellung des "Potential" $V = -\frac{1}{2}\mathfrak{F}^2$ und der Anfangsgeschwindigkeitsverteilung $\dot{\varphi}_0 = \mathfrak{F}(\varphi_0, c_\rho)$ gewinnen.

Anhang-C: Kurze Zusammenfassung der Theorie des Rauschens

C.1 Einleitung

In Kapitel 5 haben wir das Einrastverhalten des Ringlasers und das Spektrum des Schwebungssignals diskutiert. Diese Ergebnisse basieren auf der Bewegungsgleichung für die relative Phase zwischen den beiden Wellen

$$\dot{\varphi} = a + b \sin\varphi \qquad (4.22)$$

zu deren Ableitung wir die halbklassische Lasertheorie [19] benutzt haben, die das aktive Medium quantenmechanisch, die elektrische Feldstärke E innerhalb des Resonators jedoch als klassische Variable behandelt. Das elektrische Feld kann durch die kanonische Quantisierung [29] ebenfalls zum Operator werden. In dieser Betrachtungsweise ist das elektromagnetische Feld eine Überlagerung von unendlich vielen, voneinander unabhängigen harmonischen Oszillatoren, charakterisiert durch deren Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren a_j^+ bzw. a_j mit den bekannten Kommutatoren [8] [29]

$$\left[a_j, a_k^+\right] = \delta_{jk} \qquad \left[a_j, a_k\right] = \left[a_j^+, a_k^+\right] = 0$$

Der Hamiltonoperator H des Feldes ist die Summe der Einzelhamiltonoperatoren H_j

$$H = \sum_j H_j = \hbar \sum_j \omega_j \left(a_j^+ a_j + \frac{1}{2}\right)$$

Eine Folge der Quantisierung des Feldes ist das Auftreten von spontaner Emission, bei der ein angeregtes Atom spontan ein Photon aussendet [8]. Dieses elektrische Feld mit statistisch verteilter Phase überlagert sich mit dem im Resonator vorhandenen Feld, so daß das elektrische Feld zu einer stochastischen Größe wird. Seine Phase unterliegt ständigen Schwankungen, d.h. es tritt Rauschen auf. Somit ist die Phase φ zwischen den beiden gegenläufigen Wellen nicht länger deterministisch, sie ist ebenfalls eine stochastische Variable. Das Rauschen, in der halbklassischen Theorie [19] gewissermaßen herausgemittelt, ist ein Effekt der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes.

Bisher haben wir das Feld im Resonator zusammen mit den Atomen betrachtet. Wir sind jedoch nicht so sehr am Verhalten der Atome interessiert, als an dem des Feldes, insbesondere dessen Phase. Daher werden wir in den weiteren Betrachtungen das System der Atome von dem des Feldes trennen. Letzteres sei kurz mit System, das der Atome mit Reservoir bezeichnet, da es aus vielen Quantensystemen, die anfänglich im thermischen Gleichgewicht sind, besteht. Das System ist schwach an das Reservoir gekoppelt und gibt daran ständig Energie ab. Der Weg ist nun, aus den Bewegungsgleichungen die Reservoiroperatoren zu eliminieren, so daß nur noch Systemoperatoren vorkommen. Dazu gibt es im wesentlichen drei Methoden, die auf der Master-Gleichung [30] der Langevin-Gleichung und der Fokker-Planck-Gleichung [30] beruhen. Im folgenden werden wir diese Methoden kurz referieren. Ausführlichere Darstellungen finden sich in Ref. [31] [34].

C.2 Klassische Korrelationsfunktion und Markoff-Approximation

Die klassische Theorie des Rauschens läßt sich am besten an einem Teilchen der Masse m illustrieren, das sich in einer viskosen Flüssigkeit gemäß der Gleichung

$$m \frac{dv}{dt} = -m\gamma v + F(t) \qquad (C.1)$$

bewegt. Hierbei bedeuten v die Geschwindigkeit, γ die Dämpfungskonstante.

Die stochastische, sich schnell ändernde Kraft F(t) ist durch den Scharmittelwert

$$\langle F(t)\rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} F_j(t) = 0 \qquad (C.2)$$

gegeben [32]. In diesem Zusammenhang wird der Begriff der durch

$$K(s,t) = \langle F(t+s)\, F(t)\rangle \qquad (C.3)$$

definierten Korrelationsfunktion verwendet. Ist K nur eine Funktion von s, also unabhängig von t und damit von der Wahl des Zeitursprungs, so wird der Prozeß als stationär bezeichnet. Im weiteren werden wir nur noch stationäre Prozesse betrachten. Aus Gl. (C.2) und Gl. (C.3) lassen sich einige Eigenschaften von K = K(s) angeben.

Für $s \longrightarrow \infty$ sind die beiden Kräfte F(t + s) und F(t) völlig unkorreliert, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß zum Zeitpunkt t + s der Wert F(t + s) angetroffen wird, muß unabhängig sein von der, zur Zeit t den Wert F(t) zu finden,

$$\lim_{s\to\infty} K(s) = \lim_{s\to\infty} \langle F(t+s)F(t)\rangle \cong \langle F(t+s)\rangle\langle F(t)\rangle = 0 \qquad (C.4)$$

Außerdem folgt aus der Stationarität mit $t_1 := t - s$

$$K(s) = \langle F(t+s)F(t)\rangle = \langle F(t_1+s)F(t_1)\rangle = \langle F(t)F(t-s)\rangle = K(-s) \qquad (C.5)$$

Das Zeitintervall τ_c , innerhalb der die Korrelationsfunktion abklingt, wird als Reservoir-Korrelationszeit bezeichnet.
Ein System heißt Markoff-System, wenn seine Zukunft nur durch die Gegenwart und nicht durch die Vergangenheit bestimmt wird, wenn es also sein gesamtes "Gedächtnis" verloren hat. Damit ist sichergestellt, daß die ins Reservoir abgeflossene Energie nicht mehr ins System zurückkehrt. Die statistische Kraft F verursacht eine Dämpfung des Systems mit der Dämpfungskonstante γ und Fluktuationen um einen Mittelwert. Gilt für die Korrelationszeit τ_c und die Dämpfungszeit γ^{-1} die Beziehung

$$\tau_c \ll \gamma^{-1}$$

d.h. wird das Reservoir unkorreliert lange, bevor das System eine Chance hat, sich zu ändern, so kann das System durch die Wechselwirkung mit dem Reservoir kein Erinnerungsvermögen an die Vergangenheit entwickeln und ist somit ein Markoff-System. Da in dieser Zeitskala $\tau_c \cong 0$ gilt, ist es naheliegend für die Korrelationsfunktion eines Markoff-Prozesses

$$\langle F(t+s)\,F(t)\rangle = 2D\,\delta(s) \qquad (C.6)$$

zu schreiben, wobei D die Diffusionskonstante bezeichnet. Nach dem Wiener-Khintchine-Theorem [31] ist das Spektrum eines stationären Prozesses durch die Fouriertransformation der Korrelationsfunktion gegeben. Aus Gl. (C.6) finden wir für das Spektrum

$$\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-i\omega s} \langle F(t+s)F(t)\rangle = 2D = \text{const},$$

Ein Rauschterm der (C.6) genügt, wird daher als weißes Rauschen bezeichnet.

C.3 Quantenmechanische Langevin-Gleichung

In der Langevin-Methode werden für die Systemoperatoren $\{a_1, a_2, \ldots a_n\} \equiv \{a_j\}$ Bewegungsgleichungen der Form

$$\frac{da_j}{dt} = A_j(a_1, \ldots a_n; t) + F_j(t) \qquad (C.7)$$

hergeleitet, die keine Reservoir Operatoren enthalten dürfen, und die analog der klassischen Langevin Gleichung (C.1) für die Bewegung eines Teilchens in einer Flüssigkeit sind. Wie in Abschnitt C.2 sollen für den Rauschoperator F die Beziehungen

$$\langle F(t)\rangle = 0 \qquad (C.8)$$

und

$$\langle F_i^+(t+s)\cdot F_j(t)\rangle = 2\langle D_{ij}\rangle\,\delta(s) \qquad (C.9)$$

gelten, wobei die Mittelung über die Zustände des Reservoirs vollzogen wird. [30] [31]. Mit Gl. (C.8) folgt sofort aus Gl. (C.7)

$$\frac{d}{dt}\langle a_j\rangle = \langle A_j\rangle \qquad (C.10)$$

d.h. der Operator A_j bestimmt die zeitliche Entwicklung von $\langle a_j\rangle$. Er heißt Driftoperator.
Im Fall eines einfachen harmonischen Oszillators, charakterisiert durch a, a^+ der mit einem Reservoir von harmonischen Oszillatoren b_j , b_j^+ wechselwirkt, können wir durch eine formale Lösung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung der b_j und Einsetzen in die Bewegungsgleichung der a, a^+, die Reservoiroperatoren b_j eliminieren und finden in der Markoff-Approximation [31]

$$\dot{A}(t) = -\frac{\gamma}{2}A(t) + F(t) \qquad (C.11)$$

wobei

$$A(t) = a(t)\,e^{i\omega t} \qquad (C.12)$$

den langsam veränderlichen Vernichtungsoperator des System-Oszillators und

$$F(t) = -i\sum_j \varkappa_j\, b_j(0)\, e^{-i(\omega_j-\omega)t} \qquad (C.13)$$

den Rauschoperator bezeichnet. $\varkappa_j$ sind Kopplungskonstanten zwischen System und Reservoir. Man kann zeigen, daß dieser Operator F die statistischen Eigenschaften Gl. (C.8) und (C.9) besitzt [31].
Die Dämpfungskonstante γ ist durch die Beziehung

$$\gamma = \frac{1}{\bar{n}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \, \langle F^{+}(s) F(0) \rangle = \frac{1}{\bar{n}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \, K(s) \qquad \text{(C.14)}$$

gegeben, wobei

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right] - 1}$$

die mittlere Photonenzahl der Mode mit Energie $\hbar\omega$ angibt. Die Dämpfung des Systems wird also durch die schnell veränderliche Kraft F hervorgerufen, die auch das Rauschen verursacht. Vernachlässigen wir zunächst in Gl. (C.11) das Rauschen, so erhält man die Lösung

$$A(t) = A(0)\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} = a(0)\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} \qquad \text{(C.15)}$$

und den Kommutator

$$\left[A(t), A^{+}(t)\right] = \left[a(0), a^{+}(0)\right] e^{-\gamma t} = e^{-\gamma t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \qquad \text{(C.16)}$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur bekannten Oszillatorbeziehung

$$\left[A(t), A^{+}(t)\right] = 1 \qquad \text{(C.17)}$$

und verletzt somit die Heisenbergsche Unschärferelation. Löst man dagegen die vollständige Gleichung (C.11) und berechnet erneut den Kommutator, so ist (C.17) in der Tat erfüllt. Das Rauschen gewährleistet somit die Einhaltung der Unschärfebeziehung.
Die Methode der Elimination der Reservoiroperatoren ist unglücklicherweise nicht immer möglich. Sie versagt schon bei der Wechselwirkung eines einfachen harmonischen Oszillators mit einem Reservoir bestehend aus zwei Niveau-Atomen [8]. Daher ist eine neue Methode notwendig [33], [34]. Für die meisten Probleme wird nicht die explizite Langevin-Gleichung benötigt, sondern es genügt die Kenntnis von $\langle A_j \rangle$ und $\langle D_{ij} \rangle$. Mit den Definitionen [8]

$$\langle A_j \rangle := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle \Delta a_j \rangle}{\Delta t} \qquad \text{(C.18a)}$$

$$\langle D_{ij} \rangle := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle \Delta a_i \, \Delta a_j \rangle}{\Delta t} \qquad \text{(C.18b)}$$

folgt in 2. Ordnung Störungstheorie

$$\langle A_j(t) \rangle = \frac{-1}{\hbar^2} \int_0^{\infty} ds \, \langle \left[V(t+s), \left[V(t), a_j(t) \right] \right] \rangle \qquad \text{(C.19)}$$

und die allgemeine Einstein Relation

$$2\langle D_{ij} \rangle = -\langle A_i(t) a_j(t) \rangle - \langle a_j(t) A_i(t) \rangle + \frac{d}{dt} \langle a_i(t) a_j(t) \rangle \qquad \text{(C.20)}$$

wobei V den Wechselwirkungsaperator bezeichnet. Aus Gl. (C.19) können wir bei Kenntnis des Operators V die Größe $\langle A_j \rangle$ und daraus mit der Einstein Relation $\langle D_{ij} \rangle$ berechnen.

C.4 Fokker-Planck-Gleichung

Der Langevin-Methode völlig äquivalent ist die Fokker-Planck-Methode in der eine Gleichung für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(t, \varphi_1, \dots \varphi_n | t_0, \varphi_{10} \dots \varphi_{n0})$ abgeleitet wird, die die Wahrscheinlichkeitsdichte angibt, zum Zeitpunkt t die stochastischen Variablen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ anzutreffen, wenn diese zum Zeitpunkt t_0 den Wert $\varphi_{10} \dots \varphi_{n0}$ hatten. Diese Fokker-Planck-Gleichung gilt jedoch nur für stationäre Prozesse, für Prozesse also, die nur von der Zeitdifferenz $t - t_0$ abhängen [31]. Die Fokker-Planck-Gleichung lautet [8]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\left(A_j P\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}\left(D_{ij} P\right) \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi_j}\left(J_j\right) \qquad \text{(C.21)}$$

wobei wir über gleichlautende Indizes summieren und A_j die Komponenten des Driftvektors und $D_{ij} = D_{ji}$ die der Diffusionsmatrix bezeichnen. Für

$$\langle \varphi_j \rangle := \int d\varphi_1 \dots \int d\varphi_n \left(\varphi_j P\right) \equiv \int d\varphi \, \varphi_j P$$

folgt aus Gl. (C.21) mit der Randbedingung

$$P \xrightarrow[\varphi_j \to \infty]{} 0$$

die zu Gl. (C.10) analoge Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi_j \rangle = \langle A_j \rangle \qquad \text{(C.22)}$$

Somit gibt die j-Komponente des Driftverkehrs (A_j) die zeitliche Änderung

des Mittelwertes der stochastischen Variablen φ_j an. Ebenfalls aus Gl. (C.21) finden wir für $\langle \varphi_i \varphi_j \rangle$ die zur allgemeinen Einstein Relation (C.20) analoge Gleichung

$$2\langle D_{ij} \rangle = -\langle \varphi_i A_j \rangle - \langle A_i \varphi_j \rangle + \frac{d}{dt} \langle \varphi_i \varphi_j \rangle$$

In dem Spezialfall nur einer stochastischen Variablen v und $A_v = -\gamma v$ mit $D_{vv} = D = \text{const}$ (Brownsche Bewegung) reduziert sich Gl. (C.21) zu

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle v^2 \rangle = -\gamma \langle v^2 \rangle + D$$

und mit (C.22) folgt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2\right] = -\gamma\left(\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2\right) + D$$

so daß die Diffusionsmatrix das Zerfließen der Wahrscheinlichkeitsverteilung P im Laufe der Zeit angibt.

C.5. Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung aus der Langevin-Gleichung

Aus der Langevin-Gleichung eines speziellen Problems kann immer die zugehörige Fokker-Planck-Gleichung angegeben werden.

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf eine statistische Variable φ und leiten die zur klassischen Langevin-Gleichung

$$\dot{\varphi}(t) = A[\varphi(t)] + F(t) \qquad \text{(C.23)}$$

gehörige Fokker-Planck-Gleichung (C.21) her. Dazu müssen wir die Driftkomponente A_φ und das Diffusionsmatrixelement $D_{\varphi\varphi}$ kennen. Diese sind gemäß [35], [8] durch

$$A_\varphi := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle \Delta\varphi \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int d(\Delta\varphi)\, \Delta\varphi\, P(t+\Delta t, \varphi+\Delta\varphi | t, \varphi) \qquad \text{(C.24a)}$$

$$D_{\varphi\varphi} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle (\Delta\varphi)^2 \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int d(\Delta\varphi)(\Delta\varphi)^2 P(t+\Delta t, \varphi+\Delta\varphi | t, \varphi) \qquad \text{(C.24b)}$$

mit

$$\Delta\varphi(t) := \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$$

definiert. Man beachte auch hier die Analogie zu Gl. (C.18) in der Langevin-Methode. Die formale Lösung von Gl. (C.23)

$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t) = \int_t^{t+\Delta t} dt'\, A[\varphi(t')] + \int_t^{t+\Delta t} dt'\, F(t')$$

wird durch die Taylorentwicklung

$$A[\varphi(t')] = A[\varphi(t)] + O(t'-t)$$

zu

$$\Delta\varphi(t) = A[\varphi(t)]\,\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} dt'\, F(t') + O\left((\Delta t)^2\right)$$

und wir finden aus Gl. (C.24a) für A_φ

$$A_\varphi = \langle A[\varphi(t)] \rangle + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} dt' \langle F(t') \rangle$$

oder

$$A_\varphi = A[\varphi] \qquad \text{(C.25)}$$

wobei wir

$$\langle A(\varphi) \rangle = \int d(\Delta\varphi)\, A[\varphi(t)]\, P(t+\Delta t, \varphi+\Delta\varphi | t, \varphi) = A(\varphi) \cdot 1$$

und

$$\langle F(t) \rangle = 0$$

benutzt haben. Ähnlich folgt aus Gl. (C.24b) unter Berücksichtigung von

$$\langle F(t') F(t'') \rangle = 2D\,\delta(t'-t'')$$

$$D_{\varphi\varphi} = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{ \langle A(\varphi(t)) \rangle^2 \Delta t + \langle A[\varphi(t)] \int_t^{t+\Delta t} dt'\, F(t') \rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' \langle F(t') F(t'') \rangle + O\left((\Delta t)^2\right) \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left\{ \int_t^{t+\Delta t} dt' \langle A[\varphi(t)] \cdot F(t') \rangle \right\} + \lim_{\Delta t \to 0}\left\{ \frac{2D}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt''\, \delta(t'-t'') = \right.$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left\{ \int_t^{t+\Delta t} dt' \langle A[\varphi(t)] \cdot F(t') \rangle \right\} +$$

$$+ 2D\,.$$

Wegen der Markoff-Approximation - das System hat kein Erinnerungsvermögen, sein Verhalten wird von der Gegenwart und nicht von der Vergangenheit bestimmt - muß für $t < t'$

$$\langle A[\varphi(t)] \cdot F(t') \rangle = 0$$

gelten und wir erhalten

$$D_{\varphi\varphi} = 2D \qquad \text{(C.26)}$$

Insgesamt lautet also die zur Langevin-Gleichung (C.24) gehörende Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A[\varphi(t)] P \right) + D \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \qquad (C.27)$$

d.h. der Drift- bzw. der Diffusionsterm der Langevin-Methode wird zum Drift bzw. Diffusionsterm in der Fokker-Planck-Methode.

ANHANG D: Entwicklung der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(t, \varphi | t_0=0, \varphi_0)$ nach Eigenfunktionen von Gl. (6.19)

Die Eigenwerte λ der Eigenwertgleichung (6.19)

$$\frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} + \left\{ \frac{\lambda}{D} - V(\varphi; a, b, D) \right\} Q(\varphi) = 0 \qquad (6.19)$$

seien mit λ_ι, die zugehörigen Eigenfunktionen Q mit Q_ι bezeichnet. Durch zweimalige partielle Integration und Ausnutzung der Randbedingungen von Q_ι folgt

$$\int d\varphi \, Q_\iota^*(\varphi) Q_m(\varphi) = \delta_{\iota,m} \qquad (D.1)$$

In Ref. [31] ist gezeigt, daß die Q_ι ein vollständiges System darstellen, falls die Eigenwerte λ_ι eine untere Schranke haben.

$$\sum_m Q_m^*(\varphi) Q_m(\varphi_0) = \delta(\varphi - \varphi_0) \qquad (D.2)$$

Unter der Annahme, daß dies der Fall ist, läßt sich die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(t, \varphi \mid t_0=0, \varphi_0)$ nach den Eigenfunktionen Q_ι entwickeln. Mit Gl. (6.14) und (6.17) folgt also

$$P(t, \varphi | t_0=0, \varphi_0) = \sum_\iota e^{-\lambda_\iota t} c_\iota e^{\chi(\varphi)} Q_\iota(\varphi) \qquad (D.3)$$

Die Entwicklungskoeffizienten c_ι können wir wie folgt aus der Anfangsverteilung

$$P(t \to 0, \varphi | t_0=0, \varphi_0) = \delta(\varphi - \varphi_0) \qquad (D.4)$$

berechnen. Durch Multiplikation von Gl. (D.3) mit $Q_m^*(\varphi)\, e^{-\chi(\varphi)}$ und anschließender Integration über φ finden wir

$$\int d\varphi Q_m^*(\varphi) e^{-\chi(\varphi)} P(t, \varphi | t_0=0, \varphi_0) = e^{-\lambda_m t} c_m$$

wobei wir noch die Orthogonalitätsrelation (D.1) benutzt haben.

Im Grenzfall $t \longrightarrow o$ folgt wegen Gl. (D.4) sofort

$$c_m = Q_m^*(\varphi_0)\, e^{-\chi(\varphi_0)} \tag{D.5}$$

Insgesamt erhalten wir aus Gl. (D.3) unter Verwendung von Gl. (6.17)

$$\mathcal{P}(t,\varphi|t_0=0,\varphi_0) = \sum_l e^{-\lambda_l t}\, \frac{P_l^*(\varphi_0)\, P_l(\varphi)}{e^{2\chi(\varphi_0)}} \tag{D.6}$$

Die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung P_s ist die zum Eigenwert $\lambda = o$ gehörige Eigenfunktion. Mit Gl. (6.15) und (6.16) folgt

$$0 = \frac{d}{d\varphi}\left[-(a+b\sin\varphi)P_s(\varphi) + D\frac{dP_s}{d\varphi}\right]$$

Eine mögliche Lösung hierzu ist

$$P_s(\varphi) = e^{\frac{1}{D}(a\varphi - b\cos\varphi)} = e^{2\chi(\varphi)} \tag{D.7}$$

wobei wir die Definition von χ Gl. (6.18) benutzt haben.

Insgesamt erhalten wir also

$$\mathcal{P}(t,\varphi\,|\,t_0=0,\varphi_0) = \sum_l e^{-\lambda_l t}\, \frac{P_l^*(\varphi_0)\, P_l(\varphi)}{P_s(\varphi_0)} \tag{6.21}$$

ANHANG E: Berechnung der stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung P_s

Man kann leicht zeigen, daß

$$q_0(\varphi) = e^{\frac{1}{2D}(a\varphi - b\cos\varphi)} \tag{E.1}$$

eine partikuläre Lösung von Gl. (8.1) ist und somit

$$q_0''(\varphi) - \left[\frac{b}{2D}\cos\varphi + \left(\frac{1}{2D}\right)^2 (a+b\sin\varphi)^2\right] q_0(\varphi) = 0 \tag{E.2}$$

gilt. Der Ansatz

$$Q_0(\varphi) = q_0(\varphi)\, u(\varphi) \tag{8.2}$$

führt dann auf die Gleichung

$$\left\{q_0'' - \left[\frac{b}{2D}\cos\varphi + \left(\frac{1}{2D}\right)^2 (a+b\sin\varphi)^2\right] q_0\right\} u + q_0 u'' + 2q_0' u' = 0$$

die sich wegen Gl. (E.2) zu

$$u''(\varphi) + 2\,\frac{q_0'(\varphi)}{q_0(\varphi)}\, u'(\varphi) = 0$$

vereinfacht. Aus Gl. (E.1) folgt

$$2\,\frac{q_0'(\varphi)}{q_0(\varphi)} = \frac{1}{D}(a + b\sin\varphi)$$

und daher

$$u''(\varphi) + \frac{1}{D}(a+b\sin\varphi)\, u'(\varphi) = 0 \tag{8.3}$$

Eine partikuläre Lösung hiervon ist durch

$$u(\varphi) = \int_0^\varphi d\tilde{\varphi}\; e^{-\frac{1}{D}(a\tilde{\varphi} - b\cos\tilde{\varphi})} \tag{8.7}$$

gegeben. Die allgemeine Lösung von Gl.(8.1) setzt sich aus einer Linearkombination von q_0 und $q_0 u$

$$Q_0(\varphi) = c_1 q_0(\varphi)\left(1 + c_2 u(\varphi)\right) \tag{E.3}$$

zusammen, wobei wir die Integrationskonstanten c_1, c_2 aus der Periodizitäts- bzw. Normierungsbedingung von P_s bestimmen. Aus Gl. (6.17), (6.18) und Gl. (E.3) finden wir

$$P_s(\varphi) = P_s(0)\, e^{\frac{1}{D}(a\varphi - b\cos\varphi)} \left(1 + c_2 u(\varphi)\right)$$

wobei wir die Normierungskonstante $P_s(0)$ eingeführt haben. Gl. (8.7) liefert für u die Beziehung

$$u(\varphi+2\pi) = \int_0^{2\pi} d\tilde\varphi\, e^{-\frac{1}{D}(a\tilde\varphi - b\cos\tilde\varphi)} + \int_{2\pi}^{2\pi+\varphi} d\tilde\varphi\, e^{-\frac{1}{D}(a\tilde\varphi - b\cos\tilde\varphi)} =$$

$$= u(2\pi) + e^{-\frac{2\pi a}{D}} \int_0^{\varphi} d\tilde\varphi\, e^{-\frac{1}{D}(a\tilde\varphi - b\cos\tilde\varphi)}$$

also

$$u(\varphi+2\pi) = u(2\pi) + e^{-\frac{2\pi a}{D}}\, u(\varphi)$$

und es folgt damit aus

$$P_s(\varphi+2\pi) = P_s(\varphi) \tag{6.12}$$

$$P_s(\varphi+2\pi) = P_s(0)\, e^{\frac{1}{D}(a\varphi - b\cos\varphi)}\, e^{\frac{2\pi a}{D}} \left(1 + c_2 u(\varphi+2\pi)\right) =$$

$$= P_s(0)\, e^{\frac{1}{D}(a\varphi - b\cos\varphi)} \left(e^{\frac{2\pi a}{D}} \left(1 + c_2 u(2\pi)\right) + c_2 u(\varphi)\right)$$

die Bedingung

$$e^{\frac{2\pi a}{D}} \left(1 + c_2 u(2\pi)\right) = 1$$

d.h.

$$c_2 = \frac{e^{-\frac{2\pi a}{D}} - 1}{u(2\pi)}$$

Insgesamt:

$$P_s(\varphi) = P_s(0)\, e^{\frac{1}{D}(a\varphi - b\cos\varphi)} \left(1 + \frac{e^{-\frac{2\pi a}{D}} - 1}{u(2\pi)} u(\varphi)\right) \tag{8.5}$$

mit

$$P_s(0) = \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{\frac{1}{D}(a\varphi - b\cos\varphi)} \left(1 + \frac{e^{-\frac{2\pi a}{D}} - 1}{u(2\pi)} u(\varphi)\right) \right\}^{-1} \tag{8.6}$$

und

$$u(\varphi) = \int_0^{\varphi} d\tilde\varphi\, e^{-\frac{1}{D}(a\tilde\varphi - b\cos\tilde\varphi)} \tag{8.7}$$

ANHANG F: Mittelung über die Statistik in der Langevin-Methode

Um

$$\mathcal{G}(t) := \left\langle e^{\,i q(t) \int_0^t dt' p(t') F(t')} \right\rangle_F$$

zu berechnen, wobei q = q(t) und p = p(t) deterministische Funktionen sind, nehmen wir an, daß F wie in Kapitel 6 den Bedingungen

$$\langle F(t) \rangle = 0 \tag{F.1}$$

$$\langle F(t') F(t'') \rangle = 2D\, \delta(t'-t'') \tag{F.2}$$

genügt, wobei F(t) gaußförmig ist.

Wir entwickeln zunächst die Exponentialfunktion

$$\mathcal{G}(t) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(i)^L}{L!} [q(t)]^L \left\langle \left[\int_0^t dt' p(t') F(t') \right]^L \right\rangle_F =$$

$$= \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(i)^L}{L!} [q(t)]^L \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \cdots \int_0^t dt_L\, p(t_1)\cdot p(t_2) \cdots p(t_L) \langle F(t_1)\cdots F(t_L)\rangle$$

Da F gaußförmig ist, finden wir aus Gl.(F.1) und Gl.(F.2), wie in Ref. [8] gezeigt ist,

$$\langle F(t_1)\cdots F(t_{2L})\rangle = (2D)^L \cdot \frac{(2L)!}{2^L L!}\, \delta(t_1-t_2)\cdot \ldots \cdot \delta(t_{2L-1}-t_{2L})$$

$$\langle F(t_1)\cdots F(t_{2L+1})\rangle = 0$$

Dann folgt

$$\mathcal{G}(t) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(-D)^L}{L!} [q(t)]^{2L} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \cdots \int_0^t dt_{2L}\, p(t_1)\cdots p(t_{2L})\, \delta(t_1-t_2)\cdots\delta(t_{2L-1}-t_{2L})$$

$$= \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(-D)^L}{L!} q^{2L}(t) \left\{ \operatorname{sgn}(t) \int_0^t dt' p^2(t') \right\}^L$$

also:

$$\left\langle e^{\,i q(t) \int_0^t dt' p(t') F(t')} \right\rangle_F = e^{-\operatorname{sgn}(t) D q^2(t) \int_0^t dt' p^2(t')} \tag{F.3}$$

In Gl. (9.6) ist

$$q(t) = -e^{-\gamma t}$$

$$p(t) = e^{\gamma t'}$$

so daß

$$\left\langle e^{\,-i e^{-\gamma t} \int_0^t dt' F(t') e^{\gamma t'}} \right\rangle_F = \exp\left[-\frac{D}{2\gamma} \left(1 - e^{-2\gamma t}\right) \right] \tag{9.7}$$

ANHANG G: Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(t,\alpha|t_0=0,\alpha_0)$ für den Fall des Kapitel 9.1

Das Eigenwertproblem

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}Q_l + \left(\frac{2\lambda_l}{\gamma} + 1 - \alpha^2\right)Q_l = 0 \tag{9.16}$$

hat für

$$\lambda_l = l\gamma \tag{9.17}$$

als Lösungen die Hermitefunktionen

$$Q_l(\alpha) = \mathcal{N}_l\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} H_l(\alpha)$$

wobei H_l das l-te Hermite Polynom bezeichnet und die Normierungsfaktoren $\mathcal{N}_l$ durch

$$\mathcal{N}_l^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^l\, l!} \tag{9.19}$$

gegeben sind. [37] Mit dem Ansatz (9.12) folgt somit für die Eigenfunktionen

$$\rho_l(\alpha) = N\mathcal{N}_l\, e^{-\alpha^2} H_l(\alpha) \tag{G.1}$$

Der Normierungsfaktor N ist so zu wählen, daß

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, \rho_l(\alpha) \tag{G.2}$$

gilt und läßt sich leicht aus der Orthogonalitätsrelation der Hermite Polynome

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-\alpha^2} H_l(\alpha) H_m(\alpha) = \delta_{l,m}\, 2^m\, m!\sqrt{\pi} \tag{G.3}$$

und

$$H_0(\alpha) = 1 \tag{G.4}$$

bestimmen [37].

$$1 = N\mathcal{N}_l \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-\alpha^2} H_l(\alpha) = N\mathcal{N}_l\sqrt{\pi}\,\delta_{l,0} = N\pi^{1/4}$$

also

$$N = \pi^{-1/4} \tag{G.5}$$

Die Lösung $\mathcal{P}(t,\alpha|t_0=0,\alpha_0)$, die der Anfangsbedingung

$$\mathcal{P}(t\to 0,\alpha|t_0=0,\alpha_0) = \delta(\alpha-\alpha_0) \tag{G.6}$$

genügen soll, entwickeln wir nach den Eigenfunktionen ρ_l

$$\mathcal{P}(t,\alpha|t_0=0,\alpha_0) = N\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda_l t} c_l\, \mathcal{N}_l\, e^{-\alpha^2} H_l(\alpha) \tag{G.7}$$

Die Entwicklungskoeffizienten c_l sind im Grenzfall $t\to 0$ leicht zu berechnen. Durch Multiplikation von Gl. (G.7) mit $\mathcal{N}_m H_m$ und Integration über α unter Ausnutzung von Gl. (G.3) folgt

$$\mathcal{N}_m \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, H_m(\alpha)\, P(t,\alpha|t_0=0,\alpha_0) \xrightarrow{t\to 0} \mathcal{N}_m H_m(\alpha_0)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda_l t} c_l N \mathcal{N}_l \mathcal{N}_m \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-\alpha^2} H_l(\alpha) H_m(\alpha) = e^{-\lambda_m t} c_m N \xrightarrow{t\to 0} c_m N$$

also

$$c_l N = \mathcal{N}_l H_l(\alpha_0)$$

insgesamt

$$\mathcal{P}(t,\alpha|t_0=0,\alpha_0) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda_l t}\, \mathcal{N}_l^2\, e^{-\alpha^2} H_l(\alpha_0) H_l(\alpha). \tag{G.8}$$

Die Normierung der Eigenfunktionen $P_l(\varphi)$ im φ-Raum auf 1 liefert

$$\begin{aligned}
1 &= A\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, P_l(\varphi) = A\int_{-\infty}^{\infty} d\Theta\, P_l(\hat{\varphi}_0+\pi+\Theta) = A\int_{-\infty}^{\infty} d\Theta\, \rho_l(\Theta) \\
&= A\cdot N\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, \Theta\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{2D}\Theta^2} q_l(\Theta) = A\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\, N\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} q_l\left(\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\alpha\right) \\
&= A\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\, N\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, \mathcal{N}_l\, e^{-\alpha^2} H_l(\alpha) \\
&= A\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\cdot 1
\end{aligned}$$

also

$$A = \sqrt{\frac{\gamma}{2D}}$$

wobei wir im letzten Schritt die Normierung (G.2) benutzt haben.

Somit lautet die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathcal{P}(t,\alpha|t_0=0,\alpha_0) = \sqrt{\frac{\gamma}{2D}} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-l\gamma t}\, \mathcal{N}_l^2\, e^{-\alpha^2} H_l(\alpha_0) H_l(\alpha) \tag{9.20}$$

P_s folgt hieraus für $t\to\infty$ mit Gl. (9.19) und Gl. (G.4) zu

$$P_s(\alpha) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}}\cdot e^{-\alpha^2} \tag{9.21}$$

ANHANG H: Berechnung der Korrelationsfunktionen $C_\pm$ in der Fokker-Planck-Methode für den Fall des Kapitel 9.1

Die Substitutionen und Definitionen (9.11), (9.12), (9.14) und (9.15) werden in die in Gl. (7.10 a,b) definierten Korrelationsfunktionen eingesetzt.

$$C_\pm(t) = e^{-i(\hat\varphi_0 \pm \hat\varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta_0\, e^{\mp i\Theta_0}\, p_s(\Theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta\, e^{-i\Theta}\, p(t,\Theta \mid t_0=0,\Theta_0) =$$

$$= e^{-i(\hat\varphi_0 \pm \hat\varphi_0)} \sqrt{\frac{2D}{\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_0\, e^{\mp i\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\alpha_0}\, p_s\!\left(\sqrt{\tfrac{2D}{\gamma}}\alpha_0\right) \sqrt{\frac{2D}{\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-i\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\alpha}\, p\!\left(t,\sqrt{\tfrac{2D}{\gamma}}\alpha \mid t_0=0,\sqrt{\tfrac{2D}{\gamma}}\alpha_0\right)$$

$$C_\pm(t) = e^{-i(\hat\varphi_0 \pm \hat\varphi_0)} \sqrt{\frac{2D}{\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_0\, e^{\mp i\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\alpha_0}\, \mathcal{P}_s(\alpha_0) \sqrt{\frac{2D}{\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-i\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\alpha}\, \mathcal{P}(t,\alpha \mid t_0=0,\alpha_0)$$

Mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen Gl. (9.20) und Gl. (9.21) wird hieraus

$$C_\pm(t) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\, e^{-i(\hat\varphi_0 \pm \hat\varphi_0)} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-l\gamma t}\, \mathcal{N}_l^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_0\, e^{\mp i\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\alpha_0}\, e^{-\alpha_0^2} H_l(\alpha_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-i\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\alpha}\, e^{-\alpha^2} H_l(\alpha) \qquad \text{(H.1)}$$

und mit der Definition

$$I_l := \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-i\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\alpha}\, e^{-\alpha^2} H_l(\alpha) \qquad \text{(H.2)}$$

$$C_+ = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\, e^{-2i\hat\varphi_0} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-l\gamma t}\, \mathcal{N}_l^2\, I_l^2 \qquad \text{(H.3)}$$

$$C_- = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-l\gamma t}\, \mathcal{N}_l^2\, |I_l|^2 \qquad \text{(H.4)}$$

Nun bleibt noch das Integral I_l zu berechnen.
Mit der Rodriguesformel für die Hermite Polynome [37]

$$H_l(\alpha) = (-1)^l\, e^{\alpha^2}\, \frac{d^l}{d\alpha^l}\left(e^{-\alpha^2}\right) \qquad \text{(H.5)}$$

wird Gl. (H.2) zu

$$I_l = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-i\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\alpha}\, (-1)^l\, \frac{d^l}{d\alpha^l}\left(e^{-\alpha^2}\right)$$

Partielle Integration führt auf

$$I_l = (-i)\sqrt{\frac{2D}{\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-i\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\alpha}\, (-1)^{l-1}\, \frac{d^{l-1}}{d\alpha^{l-1}}\left(e^{-\alpha^2}\right)$$

Man erhält für I_l die Rekursionsformel

$$I_l = (-i)\sqrt{\frac{2D}{\gamma}}\, I_{l-1} \qquad \text{(H.6)}$$

Man sieht dann leicht, daß die durch

$$I_l = (-i)^l \left(\frac{2D}{\gamma}\right)^{l/2} I_0 \qquad \text{(H.7)}$$

definierten I_l dem Schema (H.6) genügen. Durch quadratische Ergänzung erhalten wir I_0

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-\left(\alpha^2 + 2\alpha i\sqrt{\frac{D}{2\gamma}} - \frac{D}{2\gamma}\right)}\, e^{-\frac{D}{2\gamma}} = e^{-\frac{D}{2\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-\left(\alpha + i\sqrt{\frac{D}{2\gamma}}\right)^2} = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{D}{2\gamma}}$$

also insgesamt aus (H.7)

$$I_l = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{D}{2\gamma}}\, (-i)^l \left(\frac{2D}{\gamma}\right)^{l/2} \qquad \text{(H.8)}$$

Damit und mit Gl. (9.19) werden Gl. (H.3) und (H.4) zu

$$C_\pm(t) = e^{-i(\hat\varphi_0 \pm \hat\varphi_0)}\, e^{-\frac{D}{\gamma}} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-l\gamma t}\, \frac{1}{2^l\, l!}\, (\mp 1)^l \left(\frac{2D}{\gamma}\right)^l =$$

$$= e^{-i(\hat\varphi_0 \pm \hat\varphi_0)}\, e^{-\frac{D}{\gamma}}\, e^{\mp \frac{D}{\gamma} e^{-\gamma t}}$$

also

$$C_\pm(t) = e^{-i(\hat\varphi_0 \pm \hat\varphi_0)} \exp\left[-\frac{D}{\gamma}\left(1 \pm e^{-\gamma t}\right)\right] \qquad \text{(9.9)}$$

ANHANG I: Berechnung der Eigenwerte λ_L

Um eine Lösung der Gleichung

$$\left(\lambda_L - n^2 D - i n\alpha\right) c_n^L - \frac{b}{2} n \left(c_{n+1}^L - c_{n-1}^L\right) = 0 \qquad (9.26)$$

zu finden, nehmen wir an, daß $c_n^L \neq 0 \;\forall n \neq 0$. Durch Division durch c_n^L finden wir dann aus der Gleichung (9.26) für c_{n+1}

$$\left(\lambda_L - (n+1)^2 D - i(n+1)\alpha\right) \frac{c_{n+1}^L}{c_n^L} - \frac{b}{2}(n+1) \frac{c_{n+2}^L}{c_{n+1}^L} \frac{c_{n+1}^L}{c_n^L} + \frac{b}{2}(n+1) = 0 \quad (I.1)$$

Damit die Entwicklung von P_L in Fourierreihe Gl. (9.25) konvergiert, muß das Quotientenkriterium gelten, d.h. es muß gelten

$$\frac{c_{n+1}^L}{c_n^L} < 1$$

Somit ist der mittlere Term in Gl. (I.1) von höherer Ordnung und wir versuchen eine Lösung zu finden, indem wir ihn vernachlässigen. Damit wird Gl. (I.1) zu

$$c_{n+1}^L = \left(-\frac{b}{2}\right) \frac{(n+1)\, c_n^L}{\lambda_L - (n+1)^2 D - i(n+1)\alpha} \qquad (I.2)$$

Analog folgt

$$c_{n-1}^L = \left(+\frac{b}{2}\right) \frac{(n-1)\, c_n^L}{\lambda_L - (n-1)^2 D - i(n-1)\alpha} \qquad (I.3)$$

Mit Gl. (I.2) und (I.3) erhalten wir aus Gl. (9.26)

$$\lambda_L - n^2 D - i n\alpha + \left(\frac{b}{2}\right)^2 n \left\{ \frac{n+1}{\lambda_L - (n+1)^2 D - i(n+1)\alpha} + \frac{n-1}{\lambda_L - (n-1)^2 D - i(n-1)\alpha} \right\} = 0 \quad (I.4)$$

Diese in λ_L kubische Gleichung läßt sich im Grenzfall $\frac{b}{\alpha} \ll 1$ in 1. Ordnung $\frac{b}{\alpha}$ lösen, indem wir den Eigenwert für b = o

$$\lambda_n^{(0)} = n^2 D + i n\alpha$$

in die beiden Nenner von Gl. (I.4) einsetzen und außerdem

$\frac{D}{\alpha} \ll \frac{b}{\alpha} \ll 1$ verwenden.

$$\lambda_n = n^2 D + i n\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{n^2 D + i n\alpha}{1 + (1 - 4n^2)\left(\frac{D}{\alpha}\right)^2 - 4 i n \frac{D}{\alpha}}$$

Insgesamt finden wir

$$\lambda_n = n^2 \Delta + i n \alpha \qquad (9.27)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\Delta := D\left(1 + \frac{3}{2}\left(\frac{b}{\alpha}\right)^2\right) \qquad (9.27a)$$

und

$$\alpha := \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\alpha}\right)^2\right) \qquad (9.27b)$$

verwendet haben.

ANHANG J: Berechnung der Entwicklungskoeffizienten $c^{l}_{\pm 1}$

Zunächst wollen wir eine Symmetrierelation für die c^{l}_{n} herleiten. Dazu gehen wir von der Reellwertigkeit der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(t, \varphi \mid t_0=0, \varphi_0)$ in der Form von Gl. (6.21) aus und benutzen Gl. (9.27)

$$P(t,\varphi\mid t_0=0,\varphi_0) = \frac{1}{P_s(\varphi_0)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-l^2\Delta t}\, e^{-i\alpha l t}\, P_l^*(\varphi_0)\, P_l(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{P_s(\varphi_0)} \left\{ P_0^*(\varphi_0) P_0(\varphi) + \sum_{l=1}^{\infty} e^{-l^2\Delta t} \left(e^{-i\alpha l t} P_l^*(\varphi_0) P_l(\varphi) + e^{+i\alpha l t} P_{-l}^*(\varphi_0) P_{-l}(\varphi) \right) \right\}$$

Damit $P(t,\varphi\mid t_0=0,\varphi_0)$ reellwertig ist, muß, da $P_0(\varphi) = P_s(\varphi)$ ohnehin reelwertig ist, gelten

$$P_l^*(\varphi_0)\, P_l(\varphi) = P_{-l}(\varphi_0)\, P_{-l}^*(\varphi)$$

Mit der Entwicklung (9.25) folgt hieraus sofort

$$c^{-l}_{m} = c^{*l}_{-m} \qquad (J.1)$$

Nach Gl. (I.2) und (I.3)

$$c^{l}_{n\pm 1} = \left(\mp \frac{b}{2}\right) \frac{n\pm 1}{\lambda_l - (n\pm 1)^2 D - i(n\pm 1)a}\, c^{l}_{n}$$

ergibt sich sofort

$$c^{0}_{\pm 1} = \frac{b}{2} \cdot \frac{c^{0}_{0}}{D \pm ia} = \frac{1}{2\pi} \frac{b/2}{D\pm ia} \qquad (J.2)$$

Dabei haben wir zur Bestimmung von c^{0}_{0} die Normierungsbedingung von $P_s(\varphi)$ auf 1 und die Entwicklung (9.25) verwendet.

$$1 = \int_0^{2\pi} d\varphi\, P_s(\varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi\, P_0(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c^{0}_{n} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi} = 2\pi c^{0}_{0} \qquad (J.3)$$

also

$$\left|c^{0}_{+1}\right|^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{b}{2}\right)^2 \frac{1}{D^2+a^2} \qquad (J.4a)$$

$$c^{*0}_{-1}\, c^{0}_{+1} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{b}{2}\right)^2 \frac{D^2-a^2-2iaD}{\left[D^2+a^2\right]^2} \qquad (J.4b)$$

Um die Koeffizienten $c^{l}_{\pm 1}$ mit $l \neq 0$ zu berechnen, gehen wir nochmals auf Gl. (9.26) zurück.
In der Näherung

$$D \ll b \ll a$$

und

$$\lambda_l \cong ila$$

folgt für c^{l}_{n-1} unter Vernachlässigung von c^{l}_{n+1}, wie in Anhang I erläutert,

$$\left[l-(n-1)\right] c^{l}_{n-1} - \left(\frac{b}{2ia}\right)(n-1)\, c^{l}_{n} = 0 \qquad (J.5)$$

Für l = (n-1) erhalten wir sofort

$$0 \cdot c^{l}_{l} = \frac{b}{2ia}\, l\, c^{l}_{l+1} \qquad (J.6)$$

Der Koeffizient c^{l}_{l} ist somit in der Rekursion ein freier Parameter und Startpunkt. Hieraus folgt, daß $c^{l}_{n} = 0$ für $n \geq l+1$. Dies führt auf keine Schwierigkeiten mit (I.1), da wir nur $c^{l}_{\pm 1}$ mit $|l| \geq 1$ benötigen. Für $l<n-1$ folgt aus Gl. (J.5) das Schema

$$c^{l}_{n-1} = \left(\frac{b}{2ia}\right) \frac{n-1}{\left[l-(n-1)\right]}\, c^{l}_{n-1}$$

woraus wir durch Iteration sofort c^{l}_{+1} in Abhängigkeit von c^{l}_{l} berechnen können.

$$c^{l}_{+1} = \left(\frac{b}{2ia}\right)^{l-1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{l-j}{l-(l-j)}\, c^{l}_{l} = \left(\frac{b}{2ia}\right)^{l-1} \frac{\prod_{j=1}^{l-1}(l-j)}{(l-1)!}\, c^{l}_{l}$$

also

$$c^{l}_{+1} = \left(\frac{b}{2ia}\right)^{l-1} c^{l}_{l} \qquad (J.7a)$$

analog:

$$c^{l}_{-1} = \left(-\frac{b}{2ia}\right)^{l+1} c^{l}_{l} \qquad (J.7b)$$

Bringen wir Gl. (9.28) in die Form

$$C_{\pm}(t) = (2\pi)^2 c^{*0}_{-1}\, c^{0}_{+1}\, c^{*l}_{-1}\, c^{l}_{+1} + (2\pi)^2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty} e^{-\lambda_l t}\, c^{*l}_{-1}\, c^{l}_{+1}$$

so folgt schließlich

$$\frac{1}{4}\left(C_- + c.c.\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2a}\right)^2\left(\frac{D}{a}\right)^2 + (2\pi)^2 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{b}{2a}\right)^{|2l|}\left(c_l^l\right)^2 e^{-l^2\Delta t}\cos(\alpha l t)$$

$$\frac{1}{4}\left(C_+ + c.c.\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2a}\right)^2\left(\frac{D}{a}\right)^2 - (2\pi)^2 \cdot 2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{b}{2a}\right)^{|2l|}\left(c_l^l\right)^2 e^{-l^2\Delta t}\cos(\alpha l t)$$

also insgesamt

$$\ll \cos\varphi\cos\varphi_0 \gg = \left(\frac{b}{2a}\right)^2\left(\frac{D}{a}\right)^2 + (2\pi)^2 2\left(\frac{\Gamma}{b}\right)^2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty}\left(c_l^l\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)^{|2l|} e^{-l^2\Delta t}\cos(\alpha l t) \qquad (J.8)$$

mit $\Gamma^2 = a^2 - b^2$

Die freien Parameter c_l^l bestimmen wir so, daß die Korrelationsfunktion (J.8) für D⟶o in die des rauschfreien Falles

$$\cos^2\varphi = 2\left(\frac{\Gamma}{b}\right)^2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{b}{2a}\right)^{|2l|}\cos\left[l\,a\left(1-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b}{a}\right)^2\right)t\right] \qquad (J.9)$$

übergeht. Die Gl. (J.9) läßt sich leicht aus Kapitel (5.3) gewinnen. Da die Koeffizienten c_l^l aus einer Rekursionsformel stammen, die nicht von D abhängt, findet man sofort durch Vergleich mit (J.9)

$$c_l^l = \frac{1}{2\pi} \qquad (J.10)$$

also insgesamt für die Korrelationsfunktion $\ll \cos\varphi\cos\varphi_0 \gg$

$$\ll \cos\varphi\cos\varphi_0 \gg = \left(\frac{b}{2a}\right)^2\left(\frac{D}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{\Gamma}{b}\right)^2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{b}{2a}\right)^{|2l|} e^{-l^2\Delta t}\cos(\alpha l t) \qquad (9.29)$$

ANHANG K: Asymptotischer Bereich b=o: Berechnung der Korrelationsfunktion $\ll \cos\varphi\cos\varphi_0 \gg$ in der Langevin-Methode (Ein-Moden Laser)

Für den Fall b = o wird die Langevin-Gleichung zu

$$\dot{\varphi}(t) = a + F(t) \qquad (9.33)$$

mit der formalen Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 + at + \int_0^t dt'\, F(t') \qquad (K.1)$$

Unter Verwendung von Anhang F lauten $C_\pm$ folglich:

$$C_\pm(t) = e^{-iat}\,\langle e^{-i(\varphi_0 \pm \varphi_0)}\rangle_{\varphi_0} \cdot \langle e^{-i\int_0^t dt' F(t')}\rangle_F =$$

$$= e^{-iat - D|t|}\,\langle e^{-i(\varphi_0 \pm \varphi_0)}\rangle_{\varphi_0}. \qquad (K.2)$$

Die Mittelung $\langle\ \rangle_{\varphi_0}$ führen wir, wie in Kapitel 9.1 durch einen Grenzwertprozeß auf eine Mittelung über die Statistik von F zurück

$$\langle e^{-2i\varphi_0}\rangle_{\varphi_0} = \lim_{t'\to\infty}\left\{\langle e^{-2i\varphi(t')}\rangle_F\right\}$$

Mit Gl. (K.1) wird daraus

$$\langle e^{-2i\varphi_0}\rangle_{\varphi_0} = \lim_{t'\to\infty}\left\{e^{-2i(\varphi_0 + at')}\,\langle e^{-2i\int_0^{t'} dt'' F(t'')}\rangle_F\right\} = \lim_{t'\to\infty}\left\{e^{-2i(\varphi_0 + at') - 4D|t'|}\right\}$$

also

$$C_+ = 0$$
$$C_- = e^{-iat - D|t|}$$

und mit Gl.(7.2)

$$\ll \cos\varphi\cos\varphi_0 \gg = \frac{1}{2}e^{-D|t|}\cos(at) \qquad (9.34)$$

ANHANG L: Lösung der Rekursionsformel (10.7)

Um die Rekursionsformel

$$n\frac{b}{2}\tilde{c}_{n-1} + (s + n^2D + ina)\tilde{c}_n - n\frac{b}{2}\tilde{c}_{n+1} = c_n(t=0, \varphi_0) \qquad (10.7)$$

zu lösen, betrachten wir zunächst den Spezialfall n = o. Hierfür folgt unter Verwendung von Gl. (10.4) sofort

$$\tilde{c}_o(s, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi s} \qquad (10.8)$$

Wir lösen zunächst die homogene Gleichung, d.h. für $c_n(t=o, \varphi_0) = 0$
Die Lösung sei mit $\tilde{c}_n^{(o)}$ bezeichnet. Um eine Lösung zu finden nehmen wir an, daß $\tilde{c}_n^{(o)} \neq 0 \; \forall n \neq 0$. Durch Division durch $\tilde{c}_{n-1}^{(o)}$ erhalten wir aus Gl.(10.7) folgendes Schema:

$$n\frac{b}{2} + (s + n^2D + ina)\frac{\tilde{c}_n^{(o)}}{\tilde{c}_{n-1}^{(o)}} - n\frac{b}{2}\frac{\tilde{c}_{n+1}^{(o)}}{\tilde{c}_n^{(o)}}\frac{\tilde{c}_n^{(o)}}{\tilde{c}_{n-1}^{(o)}} = 0 \qquad (L.1)$$

das wir durch die Definition

$$S_n(s, \varphi_0) = \frac{\tilde{c}_n^{(o)}(s, \varphi_0)}{\tilde{c}_{n-1}^{(o)}(s, \varphi_0)} \qquad (L.2)$$

in Form von Kettenbrüchen lösen können.

$$S_n(s) = \frac{n\frac{b}{2}}{-(s + n^2D + ina) + n\frac{b}{2}S_{n+1}(s)} \qquad (11.13)$$

Aus Gl.(11.13) erkennen wir, daß S_n nicht mehr von φ_0 abhängt.
Für den allgemeinen Fall $c_n(t=o, \varphi_0) \neq o$ machen wir in Gl.(10.7) den Ansatz

$$\frac{\tilde{c}_n(s, \varphi_0)}{\tilde{c}_{n-1}(s, \varphi_0)} = S_n(s) + A_n(s, \varphi_0) \qquad (L.3)$$

wobei S_n die homogene Lösung von (10.7) sei und finden unter Benutzung von Gl. (L.1)

$$c_n = \tilde{c}_{n-1}\Big\{\Big(n\frac{b}{2} + (s + n^2D + ina)S_n - n\frac{b}{2}S_{n+1}S_n\Big)$$

$$+ (s + n^2D + ina)A_n - n\frac{b}{2}(S_n + A_n)A_{n+1} - n\frac{b}{2}S_{n+1}A_n\Big\}$$

oder

$$\Big(s + n^2D + ina - n\frac{b}{2}S_{n+1}\Big)\tilde{c}_{n-1}A_n - n\frac{b}{2}\tilde{c}_n A_{n+1} = c_n(t=0, \varphi_0)$$

Mit der Definition

$$a_n := \tilde{c}_{n-1}A_n \qquad (L.4)$$

folgt

$$\Big(s + n^2D + ina - n\frac{b}{2}S_{n+1}\Big)a_n - n\frac{b}{2}a_{n+1} = c_n$$

also

$$a_n(s, \varphi_0) = \frac{c_n(t=0, \varphi_0) + n\frac{b}{2}a_{n+1}(s, \varphi_0)}{s + n^2D + ina - n\frac{b}{2}S_{n+1}(s)} \qquad (10.11)$$

und aus Gl. (L.3)

$$\tilde{c}_n(s, \varphi_0) = S_n(s)\tilde{c}_{n-1}(s) + a_n(s, \varphi_0) \qquad (10.9)$$

Literatur

[1] C. Misner, K.S. Thorne und J. Wheeler, Gravitation, Freeman, (1973)

[2] J. Lense und H. Thirring: Phy. Zeits., 19, 156 (1918)
H. Thirring: Phys. Zeits. 19, 33 (1918)

[3] G. Sagnac, C.R. Acad. Sci., 157, 708 (1913)

[4] E.J. Post, "Sagnac effect", Rev. Mod. Phys., 39, 475, (1967)

[5] M.O. Scully "Suggestion and Analysis for a New Optical Test of Genral Relativity" in Laser Spectroscopy IV, herausgegeben von H. Walther und K. Rothe (Springer Verlag, 1979)

[6] F. Aronowitz, "The Lasergyro", in Laser Applications, M. Ross, Ed. New York, Academic (1971)

[7] W.W. Chow, J.B. Hambenne, T.J. Hutchings, V. Sanders, M. Sargent III M.O. Scully, IEEE 16, 918 (1980)
W. Schleich in Vorbereitung

[8] M. Sargent III, M.O. Scully und W.E. Lamb, Jr., Laser Physics, Addison-Wesley, Reading, Mss., (1974)

[9] M.P. Haugan, M.O. Scully und K. Just, Phys. Lett. 77A, 88 (1980)

[10] M.O. Scully, M.S. Zubairy und M.P. Haugan erscheint demnächst.

[11] L.D. Landau und E.M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields (Addison-Wesley, Cambridge, (1951), 1. Ausgabe

[12] M.O. Scully, persönliche Mitteilung (1980)
G. Papini, Nuovo Cimento, 52B, 136 (1967)

[13] R. Colella, A. Overhauser u. S. Werner, Phys. Rev. Lett. 34, 1472 (1975)
A. Overhauser und R. Colella, Phys. Rev. Lett. 33, 1237 (1974)
S.A. Werner, J.-L. Staudenmann, und R. Colella, Phys. Rev. Lett. 42, 1103 (1979)
S.A. Werner, R. Colella, und A.W. Overhauser, Phys. Rev. A 21 1419 (1980)

[14] C.M. Will und K. Nordtvedt, Jr. Astrophy. J. 177, 757 (1972)

[15] V. Braginsky, C.M. Caves und K.S. Thorne
Phys. Rev. D 15, 2047 (1977).

[16] Wei-Tou Ni, Astrophysics J. 176, 769 (1972).

[17] M. S. Zubairy, M. O. Scully und K. Just, Opt. Commun. 36, 175, (1981)

[18] W.M. Macek und D.T.M. Davis, Jr., Appl. Phys. Lett. 2, 67, (1963).

[19] W. E. Lamb Jr., Phys. Rev., 134, A 1429, (1964).

[20] C.V. Heer, Phys. Rev. 134, A799, (1964).

[21] L. I. Schiff, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 25, 391, (1939).

[22] L. Menegozzi und W.E. Lamb, Jr., Phys. Rev. A8, 2103, (1973).

[23] F. Aronowitz und R.J. Collins, Appl. Phys. Letters 9, 55 (1966).

[24] M.S. Zubairy, persönliche Mitteilung, (1980).

[25] M.O. Scully und W.H. Louisell, persönliche Mitteilung, (1980).

[26] C.L. O'Bryan III und M. Sargent III, Phys. Rev. A8, 3071, (1973).

[27] H. Greenstein, Laser Focus USA, 14/2, 60, 1978.

[28] D.C. Campeney, Fourier Transforms And Their Physical Applications, London Academic Press, 1973.

[29] J.M. Jauch und F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, Cambridge, Mass., Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1955).

[30] W.H. Louisell, "Quantum Theory of Noise", in International School of Physics "Enrico Fermi" XLII Course in Quantum Optics, 1967, Varenna, Italy.

[31] W.H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation in Pure and Applied Optics, John Wiley & Sons, New York, 1973.

[32] F. Reif, Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, McGraw - Hill Book Co., New York, 1965.

[33] M. Lax, Phys. Rev., 145, 110, 1966.

[34] M. Lax, Brandeis University Summer Institute Lectures (1966) II, herausg. M. Chretien, E.P. Gross und S. Deser, Gordon und Breach, New York, 1968.

[35] R.D. Hempstead, M. Lax, Phys. Rev., 161, 350 (1967).

[36] J. Cresser, P. Meystre, W.H. Louisell, W. Schleich und M.O. Scully, zur Veröffentlichung eingereicht bei Phys. Rev.

[37] M. Abramowitz, und I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions Dover, New York, 1965.

[38] J. Cresser, persönliche Mitteilung (1980)
J. Cresser, zur Veröffentlichung eingereicht bei Phys. Rev.

[39] W.W. Chow, M.O. Scully und E.W. van Stryland
Opt. Comm. 15, 6 (1975)

[40] J. Cresser, P. Meystre, D. Hammonds, H. Risken und
M.O. Scully, zur Veröffentlichung eingereicht bei Phys. Rev.

[41] H.S. Wall, Analytic Theory of Continued Fractions, Chelsea Publishing Company Bronx, New York, (1948)

[42] G.S. Kruglik, B.A. Blazhov, G.M. Kuznetsov und A.A. Kutsak,
Zh. Prikl. Spektrosk. 17, 358 (1972).
G.S. Kruglik, A.A. Kutsak und G.M. Kuznetsov
Zh. Prikl. Spektrosk. 16, 58 (1972).

Ich möchte Herrn Prof. M.O. Scully, der die Arbeit angeregt hat, für viele klärende Diskussionen über Sagnac-Effekt und Ringlaser-Theorie und für seine Unterstützung danken. Herrn Prof. H. Walther, der es mir ermöglicht hat, meine Arbeit an der früheren Projektgruppe für Laserforschung, dem jetzigen Max-Planck-Institut für Quantenoptik, durchzuführen, gilt mein besonderer Dank. Herzlich danken möchte ich Herrn Prof. H.H. Wolter für seine Betreuung und die kritische Durchsicht des Manuskripts. Herrn Dr. J. Cresser (Max-Planck-Institut für Quantenoptik) und Herrn Dr. P. Zoller (Universität Innsbruck) gilt mein Dank für viele Gespräche über Rauschtheorie, Fokker-Planck-Gleichungen und Kettenbrüche. Herrn Dr. Pierre Meystre bin ich für seine kritischen Anmerkungen während der gesamten Arbeit, Herrn Prof. W.H. Louisell für mathematische Tricks und Herrn Dr. A.A. Puretzky (Institut für Spektroskopie, Moskau) für die Beschaffung und Übersetzung schwer zugänglicher russischer Orginalarbeiten dankbar.

Den Damen J. Böckmann, K. Bauch, J. Hecht, E. Kaminski, M. Schreiber und M. Wahl, die meine Arbeit tippten und geduldig alle meine Änderungswünsche ausführten, und Frau Pfister, die die Zeichnungen anfertigte, möchte ich nochmals recht herzlich danken.