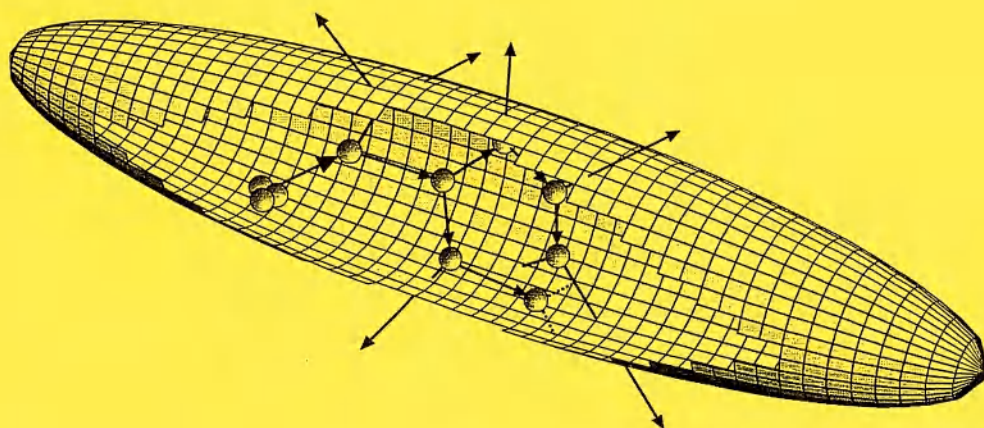


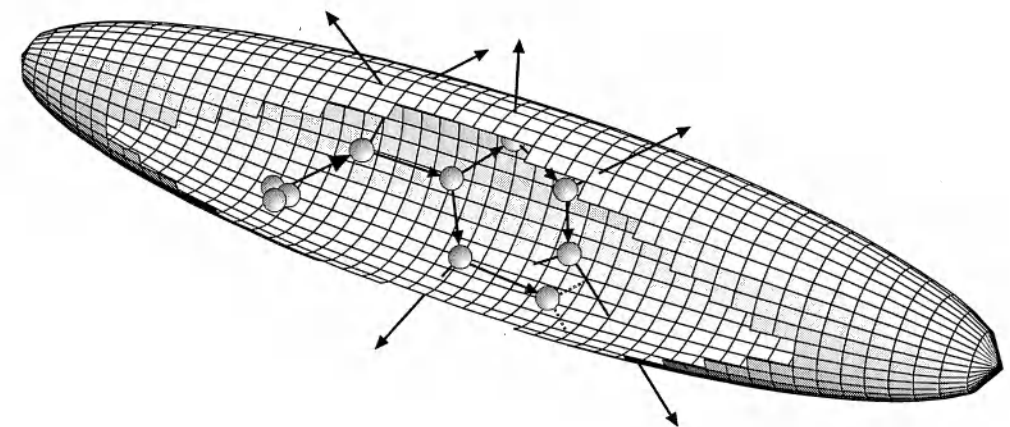
Stoßlawinen
in einem Bose-Einstein-Kondensat



Johannes Schuster

**MPQ-Report
278**

Stoßlawinen in einem Bose-Einstein-Kondensat



Johannes Schuster

Dieser MPQ-Bericht ist als Manuskript des Autors gedruckt
Alle Rechte vorbehalten

This MPQ-Report has been printed as author's manuscript
All rights reserved

Max-Planck-Institut für Quantenoptik
85740 Garching, Bundesrepublik Deutschland

Max-Planck-Institut für Quantenoptik
BIBLIOTHEK
Hans-Kopfermann-Straße 1
D-85748 Garching
Tel.-Nr.: (089) 32905-148

Zusammenfassung

Atomare Bose-Einstein-Kondensate stellen nahezu ideale Quantengase dar und können seit gut sechs Jahren experimentell untersucht werden. Dem hohen technologischen Aufwand, der zu ihrer Erzeugung betrieben werden muß, steht ein beachtliches Forschungspotential gegenüber. Es beruht darauf, daß atomare Kondensate nicht nur extrem rein und hervorragend isoliert sind, sondern sich zudem verhältnismäßig leicht manipulieren und untersuchen lassen. Zu den interessantesten Aspekten des Systems gehört die Tatsache, daß sich die Stärke seiner Wechselwirkung in Grenzen variieren läßt. Dadurch gelingt es, den Übergang vom idealen zum realen Quantengas im Experiment kontrolliert zu vollziehen. Atomare Kondensate bieten daher die Möglichkeit, die Theorien des schwach wechselwirkenden, verdünnten Bose-Gases zu testen, welche im Zuge der Bemühungen, die Suprafluidität und die Supraleitung auf die Bose-Einstein-Kondensation zurückzuführen, entwickelt wurden. Da Kondensate jedoch stark unterkühlte Gase darstellen, sind sie metastabil und zerfallen in der Regel durch Rekombination, einem inelastischen Stoßprozeß, der zur Bildung von Molekülen führt. Mit der Wechselwirkung steigt nicht nur die elastische Stoßrate kondensierter Atome, sondern auch deren Rekombinationsrate, so daß mit zunehmender Wechselwirkung die Lebensdauer des Kondensats abnimmt.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit elastischen und inelastischen Stößen zwischen ultrakalten Rubidium-Atomen, insbesondere werden Auswirkungen erhöhter Wechselwirkung auf die Stabilität von Bose-Einstein-Kondensaten untersucht. Dabei gelingt es, einen bisher unberücksichtigten Prozeß zu identifizieren, der die Lebensdauer von Kondensaten auf wesentlich kürzere Zeitskalen beschränken kann, als sie ausgehend von der Rekombinationsrate erwartet werden. Er ist auf die „Undurchdringbarkeit“ des Kondensats für niederenergetische Atome zurückzuführen, die mit der Wechselwirkung zunimmt und bedingt, daß die Produkte exothermer Stöße ganze Lawinen elastischer Kollisionen auslösen können. Stoßlawinen werden durch die Isotropie des differentiellen Wirkungsquerschnitts für elastische Stöße im niederenergetischen, sogenannten s-Wellen-Regime begünstigt und treten auf, sobald die Stoßrate in dem System über ein kritisches Maß hinaus erhöht wird. Durch die Kaskade elastischer Stöße kann ein signifikanter Teil der Energie, die durch den auslösenden inelastischen Stoß freigesetzt wird, im Kondensat dissipiert werden. Da Stoßlawinen nicht allein die Lebensdauer des Gases drastisch reduzieren, sondern auch sein thermodynamisches Gleichgewicht stören, hat ihr Auftreten nachteilige Konsequenzen für das Studium der Wechselwirkung in atomaren Kondensaten. Es wird ein einfaches Modell eingeführt, in dessen Rahmen sich die Auswirkungen von Stoßlawinen quantifizieren lassen und dessen Prognosen gut mit Messungen übereinstimmen. Die Arbeit enthält ferner die Beschreibung und die Charakterisierung einer neuen Apparatur, die es erlaubt, atomare Kondensate mit hoher Wiederholrate und Genauigkeit zu reproduzieren und damit beste Voraussetzungen für das geplante Studium feldinduzierter elastischer Streuresonanzen bietet.

Abstract

This thesis deals with elastic and inelastic collisions among ultra cold rubidium atoms. In particular, the impact of increased interaction on the stability of Bose-Einstein condensates is investigated both, experimentally and theoretically. A new decay mechanism is identified that significantly reduces the life time of condensates with respect to the expectation based on the known inelastic collision rates. Along with the interaction also the column density of the condensate is increased so that it eventually becomes impenetrable to products of exoergic collisions. These products then trigger avalanches of elastic collisions in which a significant part of the energy released in the initiatory exoergic collision is distributed among condensate atoms. Collisional avalanches are favoured by the isotropy of the differential scattering cross section in the low energy (s-wave) limit and occur as soon as the elastic collision rate exceeds a critical value. Since avalanches not only reduce the life time of the condensate but also disturb its thermodynamic equilibrium, their occurrence restricts the possibilities to explore the strongly interacting regime. A simple model is introduced to quantify the impact of avalanches on the decay and agrees well with experimental data. The thesis further contains the description and the characterisation of a new experimental apparatus which allows to create large atomic condensates with excellent reproducibility and high repetition rate complying with the requirements for the investigation of field-induced elastic scattering resonances.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Bose-Einstein-Kondensation im Experiment	1
1.2	Die vorliegende Arbeit	7
2	Bose-Einstein-Kondensation des idealen Gases	10
2.1	Ununterscheidbarkeit und Symmetrie	10
2.2	Zustandssumme und Besetzungstatistik	12
2.3	Das ideale Bose-Gas im harmonischen Potential	15
3	Die Realität: Wechselwirkende Bosonen	20
3.1	Elastische Stöße	21
3.1.1	Identische Teilchen	23
3.1.2	Grenzfall niedriger Energien: Die Streulänge	24
3.2	Inelastische Zwei-Körper-Stöße: Spinrelaxation	28
3.2.1	Das Streupotential	28
3.2.2	Spinaustausch	31
3.2.3	Dipolare Relaxation	34
3.2.4	Feshbach-Resonanzen	34
3.2.5	Ratenbestimmung	35
3.2.6	Auswirkungen der Kohärenz	40

3.3	Inelastische Drei-Körper-Stöße: Rekombination	40
4	Der Grundzustand in der Molekularfeldnäherung	46
4.1	Die Gross-Pitaevskii-Gleichung	47
4.2	Hohe Teilchenzahlen: Die Thomas-Fermi-Näherung	50
4.3	Auswirkungen auf den Phasenübergang	53
4.4	Freie Expansion als Signatur des Kondensats	54
5	Experimentelle Methoden	57
5.1	Das Konzept des Experiments	57
5.2	Die magnetooptische Falle	61
5.2.1	Die Spontankraft	61
5.2.2	Die Populationsdynamik	64
5.3	Das Doppel-MOT-System	71
5.4	Präparation für die magnetische Speicherung	77
5.4.1	Kompression in der MOT	77
5.4.2	Polarisationsgradientenkühlen	78
5.4.3	Optisches Pumpen	80
5.5	Magnetische Speicherung	82
5.5.1	Ioffe-Pritchard Magnetfalle	83
5.5.2	Transfer in die magnetische Falle	86
5.5.3	Kompression in der magnetischen Falle	87
5.5.4	Charakterisierung des Systems	88
5.6	Verdampfungskühlung	92
5.6.1	Das Prinzip der Verdampfungskühlung	92
5.6.2	„Schlechte“ Stöße und Antievaporation	94

5.6.3	Rf-induzierte Verdampfungskühlung	96
5.6.4	Optimierung der Verdampfungskühlung	100
6	Detektion und Bestimmung der Systemgrößen	103
6.1	Fluoreszenzmessungen	103
6.2	Teilchenzahlmessung durch optisches Pumpen	107
6.3	Absorptionsmessungen	109
6.4	Phasenkontrastmikroskopie	115
7	Experimenteller Aufbau	119
7.1	Vakuumsystem	119
7.2	Lasersystem	123
7.3	Magnetische Falle	127
7.4	Steuerung und Datenaufnahme	133
8	Eine Atomquelle höchsten Flusses	134
8.1	Optimierung der Dampfzellenfalle	134
8.1.1	^{87}Rb in einer magnetooptischen Dampfzellenfalle	134
8.1.2	Test der Vorhersagen	139
8.1.3	Temperatur und Polarisationsgradientenkühlen	143
8.2	Optimierung des Transfers im Doppel-MOT-System	145
9	Charakterisierung des Kondensats	148
9.1	Der Phasenübergang	148
9.2	Lebensdauer kalter Atomwolken	150
9.2.1	Das Konzept der Oortschen Wolke	153
9.2.2	Diskussion	158

10 Stoßlawinen in einem Bose-Einstein-Kondensat	159
10.1 Stoßwahrscheinlichkeit von Zerfallsprodukten	160
10.2 Entstehung von Stoßlawinen	166
10.3 Ein einfaches Modell	168
10.3.1 Direkte und indirekte Verluste	172
10.3.2 Prognosen	173
10.4 Vergleich mit dem Experiment	176
10.5 Diskussion	182
11 Ausblick	184
ANHANG	188
A Expansion des Bose-Gases	188
B Polynomiale Näherungen der Bose-Einstein-Funktionen	191
C Klein-Winkel-Streuung in der semiklassischen Näherung	193
D Mittelung der Säulendichte	196
D.1 Auswertung am Beispiel der Boltzmann-Verteilung	196
E Eigenschaften des Isotops ⁸⁷Rb	200
LITERATURVERZEICHNIS	203
ABBILDUNGS- UND TABELLENVERZEICHNISSE	216
DANKSAGUNG	221

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Bose-Einstein-Kondensation im Experiment

Als Einstein im Jahre 1924 die erste Abhandlung zur „Quantentheorie des einatomigen idealen Gases“ veröffentlichte, gelang ihm damit, „die Hypothese einer weitgehenden formalen Verwandtschaft zwischen Strahlung und Gas“ zu konkretisieren [1]. Inspirieren ließ er sich dazu von Boses Ableitung der Planckschen Strahlungsformel, die Einstein zuvor übersetzt hatte und die auf der Quantisierung des Phasenraums, also auf dessen Einteilung in Zellen des Volumens h^3 , beruhte. Als eine der ersten unmittelbaren Konsequenzen der hiermit begründeten Quantenstatistik erkannte Einstein kurz darauf in seiner zweiten Abhandlung die Tatsache, daß es im idealen Gas „bei jeder Temperatur eine maximale Dichte in Agitation befindlicher Moleküle“ geben müsse, bei deren Überschreitung ein Teil des Gases in dessen „I. Quantenzustand (Zustand ohne kinetische Energie)“ übergehe, während der Rest ein „gesättigtes ideales Gas“ darstelle [2]. Dieses heute als *Bose-Einstein-Kondensation* (BEK) bekannte Phänomen konnte erst siebzig Jahre später in seiner Reinkultur beobachtet werden und erfreut sich seither – nicht zuletzt infolge der Verleihung des letztjährigen Nobelpreises an die Pioniere der experimentellen BEK – wachsender Popularität.

Um ein Gas in Einsteins Sinne zu kondensieren, muß es gelingen, seine Phasenraumdicke so weit zu erhöhen, daß die Mehrfachbesetzung einer Phasenraumzelle wahrscheinlich wird. Diese Situation tritt ein, wenn der mittlere Abstand der Teilchen und die de Broglie-Wellenlänge, die ihrem mittleren Impuls entspricht, eine vergleichbare Größe besitzen. Anschaulich gesprochen, verlieren die Teilchen unter diesen Voraussetzungen ihre Identität: Auch wenn ihre Ausdehnung – im Sinne des idealen Gases – stets punktförmig bleibt, kann ihr Abstand kleiner als die Ortsauflösung sein, mit der sie der Unschärferelation entsprechend bestenfalls lokalisiert werden können. Ein klassisches Gas läßt sich daher am leichtesten in diesen exotischen Materiezustand versetzen, wenn es zugleich verdichtet und gekühlt wird.

Das Erstaunliche an der BEK ist, daß es sich bei ihr nicht um das Ergebnis einer Wechselwirkung handelt, da die Kondensation ja bereits im idealen Gas stattfindet. In der heutigen Sprechweise steht die Ununterscheidbarkeit der Teilchen, aus denen sich das Gas zusammensetzt, an ihrem Ursprung. Ihre Konsequenz sind die beiden möglichen Vertauschungssymmetrien der Vielteilchen-Wellenfunktion, die jeweils Bosonen und Fermionen zugeordnet werden und fundamentale Auswirkungen auf die Statistik des Gases haben. Der Spin-Statistik-Zusammenhang, der von Pauli im Jahre 1940 bewiesen wurde, verbindet die Vertauschungssymmetrien der Wellenfunktion mit einem ganz- oder halbzahligen Spin der Teilchen [3]. Ohne sich der Alternative bewußt zu sein, hat Einstein seinen Abhandlungen, von der Analogie zum Strahlungsfeld ausgehend, die Statistik der Bosonen zugrundegelegt und konnte daher nicht wissen, daß sein Vorschlag fehlschlagen mußte, die gleiche Statistik auf das freie Elektronengas der Metalle in der Hoffnung anzuwenden, dadurch Inkonsistenzen des Drude-Modells aufzulösen. Er hatte jedoch erkannt, daß auch in diesem Zusammenhang die Quantenstatistik eine entscheidende Rolle spielen könnte und wurde darin wenig später von Sommerfeld bestätigt, der die Fermi-Statistik erfolgreich auf das Elektronengas übertrug. Bezeichnenderweise hat sich mittlerweile erwiesen, daß die BEK tatsächlich mit der Supraleitung in Zusammenhang steht, wenn auch in anderer Weise, als von Einstein in seiner zweiten Abhandlung angedacht: In der BCS-Theorie, deren Begründung 1972 mit dem Nobelpreis honoriert wurde, kann die Supraleitung als Kondensation von sog. Cooper-Paaren aufgefaßt werden, die sich aus jeweils zwei Elektronen komplementärer Impulse und antiparalleler Spins zusammensetzen und der Bose-Statistik gehorchen. Das System ist allerdings vom Modell des idealen Gases so weit entfernt, daß der Vergleich mit Einsteins Theorie nur eingeschränkt möglich ist.

Ähnlich schwierig stellte sich der Versuch dar, einen quantitativen Zusammenhang zwischen der BEK und der Suprafluidität von ^4He zu finden. Auf die mögliche Verwandtschaft beider Phänomene wies London bereits 1938 hin [4]. Anlaß zu seiner Vermutung hatte die erstaunlich gute Übereinstimmung der Übergangstemperatur von etwa 2 K mit der kritischen Temperatur gegeben, die sich für die entsprechende Dichte – allerdings unter Vernachlässigung von Wechselwirkungen – aus Einsteins Theorie zu 3 K ergibt. Zudem war inzwischen bekannt, daß es sich bei ^4He um ein Boson handelt, und es war erwartungsgemäß nicht gelungen, die Suprafluidität des fermionischen Isotops ^3He zu beobachten. Heute weiß man, daß die mittlerweile entdeckte Suprafluidität von ^3He unterhalb einer Temperatur von etwa 10^{-3} K die Folge eines BCS-Übergangs ist, bei dem sich, anders als im Falle der Supraleitung, Atome mit parallelen Spins zu Cooper-Paaren zusammenschließen.

Die erste Realisierung der BEK in einem vergleichsweise gering wechselwirkenden Bose-Gas gelang im Jahre 1993 mit Paraexzitonen in einem Halbleiter [5]. Hierbei handelt es sich um ein Gas von Elektron-Loch-Paaren deren Gesamtspin sich zu Null addiert. Sie lassen sich mit Hilfe von Laserpulsen in Halbleitern erzeugen und sind bei kryogenen Temperaturen stabil genug, um innerhalb ihrer Lebensdauer von wenigen μs ein thermalisiertes Gas zu bilden, das bei hinreichend hohen Dichten kondensiert. Exzitonen-Gase können zwar verhältnismäßig leicht erzeugt werden, ihr Studium ist jedoch äußerst schwierig, weil sie zum einen durch Phononenstreuung schnell zerfallen und weil es zum anderen

kaum Möglichkeiten gibt, das Gas zu manipulieren und zu beobachten. Zudem ist die Wechselwirkung zwischen Exzitonen kompliziert und nicht vollständig verstanden.

Demgegenüber stellt die BEK verdünnter atomarer Gase in vielerlei Hinsicht ein Lehrbuchbeispiel für die ideale Gastheorie dar. In diesen Systemen spielt die Wechselwirkung eine untergeordnete – wenn auch, wie weiter unten deutlich wird, subtile – Rolle. Sie sind außerdem extrem rein, hervorragend isoliert und vergleichsweise leicht zu untersuchen. Warum also gibt es atomare Kondensate erst seit wenigen Jahren?

Die Antwort liegt in dem technologischen Aufwand, der zu ihrer Erzeugung betrieben werden muß: In Experimenten zur BEK atomarer Gase werden Temperaturen von wenigen 10 nK erreicht, ein Regime, das mit herkömmlichen kryogenen Methoden nicht zugänglich ist. Solch tiefe Temperaturen sind auf die Tatsache zurückzuführen, daß im thermodynamischen Gleichgewicht nahezu alle Gase in den festen Zustand übergehen, bevor die kritische Phasenraumdichte erreicht ist, die für die BEK erforderlich wäre. Die einzige Ausnahme bildet Helium, dessen Molekülpotentiale keine gebundenen Zustände zulassen, wodurch es stets flüssig bleibt. Diesem Umstand ist zu verdanken, daß die BEK in flüssigem Helium bei einer beachtlichen Dichte und einer infolgedessen „hohen“ Temperatur auftritt. Alle anderen Gase müssen stark unterkühlt werden, soll ihre Entartung erreicht werden. Dies ist jedoch nur möglich, wenn Molekülbildung unterdrückt ist, und setzt daher eine geringe Dichte des Gases und den Verzicht auf materielle Wände bei seiner Speicherung voraus. Aus Energie- und Impulserhaltungsgründen können sich nämlich Moleküle durch sog. Rekombination nur bilden, wenn zwei Teilchen in der Nähe einer Wand stoßen oder (mindestens) drei Teilchen gleichzeitig aufeinandertreffen. Die starke Verdünnung atomarer Kondensate ist also keineswegs gewollt, sondern eher eine Auflage der Natur. Daß Gleichgewichtsthermodynamik unter Bedingungen kontaktloser Speicherung überhaupt möglich ist, ist eine Folge davon, daß elastische Stöße im Gegensatz zu inelastischen auch in einem stark verdünnten Gas immer noch häufig stattfinden können. Sie gewährleisten die Thermalisierung des Ensembles und ermöglichen damit auch seine Kühlung. Bemerkenswerterweise ist also die Wechselwirkung zwischen *realen* Atomen, die sich ja durch Stöße äußert, Voraussetzung für die Beobachtung der BEK in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Theorie des *idealen* Gases. Entsprechende Verhältnisse liegen bei typischen Dichten von 10^{14} cm^{-3} vor, was allerdings bedeutet, daß die kritische Phasenraumdichte bei Temperaturen im sub- μK -Regime erreicht wird.

In greifbare Nähe ist die Realisierung solch harter Bedingungen erstmalig im Zuge der Entwicklungen am MIT in Boston und an der Universität Amsterdam gerückt, die Ende der achtziger Jahre zur magnetischen Speicherung [6] und zur Verdampfungskühlung [7] atomaren Wasserstoffs geführt haben. Als einfachstes Atom mit der zudem größten de Broglie-Wellenlänge galt Wasserstoff lange als idealer Kandidat für die BEK. Seine Eigenschaften waren gut bekannt, insbesondere aber war in einem spinpolarisierten Wasserstoffgas, wie es in der magnetischen Falle vorliegt, mit einer geringen Rekombinationswahrscheinlichkeit zu rechnen, weil das Triplett-Molekülpotential des Dimers keine gebundenen Zustände zuläßt und Molekülbildung daher das Umklappen eines der Spins erfordert. Bis heute ist die Verdampfungskühlung, die im Rahmen der Experimente an Wasserstoff entwickelt und theoretisch modelliert wurde, die einzige Methode, mit der es gelungen ist,

atomare Gase in Einsteins Sinne zu kondensieren. Sie beruht darauf, dem Gas gezielt hochenergetische Teilchen zu entnehmen. Daß dadurch die mittlere Energie der verbleibenden Teilchen abnimmt, ist offensichtlich, hat allerdings zunächst keine Auswirkungen auf die Besetzungswahrscheinlichkeit niederenergetischer Zustände, auf deren Erhöhung es letztlich ankommt. Diese tritt erst durch die Stoßthermalisierung des Gases ein, die auch bewirkt, daß fortlaufend hochenergetische Atome nachgeliefert werden, durch deren „Verdampfen“ dem System erneut Energie entzogen wird. Um den Prozeß aufrechtzuerhalten, muß die Energieschwelle, oberhalb derer Teilchen entfernt werden, kontinuierlich abgesenkt werden, was sich durch eine Reduktion der Potentialtiefe erreichen läßt. Geschieht dies langsam auf der Zeitskala der elastischen Stoßrate, befindet sich das Gas stets in einem quasi-stationären Gleichgewicht, dem eine Temperatur zugeordnet werden kann. In einem BEK-Experiment gelingt es, diese Temperatur durch Verdampfung um bis zu fünf Größenordnungen zu reduzieren. Allerdings, und das ist der große Nachteil der Methode, geschieht dies auf Kosten eines ähnlich dramatischen Teilchenverlustes. Er kann nur in Kauf genommen werden, wenn vor der Verdampfungskühlung eine entsprechend hohe Anzahl von Atomen vorliegt. Die komplexen Apparaturen der Wasserstoff-Experimente gestatteten jedoch wenig Spielraum bei der Optimierung des Speicherpotentials und der Verdampfungskühlung, für die sich Wasserstoff aufgrund seines äußerst geringen elastischen Streuquerschnittes ohnehin schlecht eignet. Dies hat den Weg zur BEK von Wasserstoff sehr beschwerlich gestaltet, und es ist daher besonders zu würdigen, daß er im Jahre 1998 von Erfolg gekrönt wurde [8].

Indessen war die Kondensation drei Jahre zuvor mit Alkaliatomen gelungen [9, 10, 11]. In diesen Experimenten hatte man sich des Problems zunächst unter Einsatz völlig anderer Methoden angenommen, deren Entwicklung im Jahre 1975 mit den ersten Vorschlägen begann, Licht zur Kühlung von Ionen und neutralen Atomen einzusetzen [12, 13]. Die Grundidee der sog. Dopplerkühlung besteht darin, die Doppler-Verstimmung eines bewegten Atoms so zu nutzen, daß es bei der Absorption von Licht weniger Energie aufnimmt als es bei der anschließenden spontanen Emission abgibt. Die Energiedifferenz findet sich dann in einer entsprechenden Abnahme seiner kinetischen Energie wieder. Erreicht wird dies durch eine quasi-isotrope Beleuchtung des Atoms mit monochromatischem Licht, das bezüglich einer Resonanz des ruhenden Atoms leicht rotverstimmt ist. Einen Meilenstein in der Geschichte der Laserkühlung stellte die Entwicklung der magneto-optischen Falle dar [14], die es fortan ermöglichte, neutrale Atome mit Hilfe von Licht nicht nur zu kühlen, sondern auch gleichzeitig zu speichern. Hier bedient man sich eines inhomogenen Magnetfeldes, um der Absorptionsrate des Atoms neben der Geschwindigkeits- auch eine Ortsabhängigkeit aufzuprägen. Fallen dieses Typs gehören heute zum Standardinstrumentarium der Atomphysik und finden in unterschiedlichsten Experimenten Anwendung. Die Tatsache, daß sich mit ihrer Hilfe Gase von einigen 10^{10} Atomen bei Temperaturen im sub-mK-Bereich und Dichten von etwa 10^{11} cm^{-3} bereitstellen lassen, nährte bald Hoffnungen, die BEK mit optischen Kühl- und Speichermethoden zu erreichen. Trotz intensiver Bemühungen, in deren Rahmen immer raffiniertere lichtbasierte Kühltaschemata entwickelt wurden, gelang es jedoch bis heute noch nicht, die kritische Phasenraumdichte durch Laserkühlung zu erreichen. Als Problem stellte sich insbesondere die Reabsorption spontan emittierter Photonen durch benachbarte Atome heraus, die nicht nur die Dichte des Gases nach oben beschränkt, sondern auch den Zusammenbruch der Kühlmechanismen

zur Folge hat. Nichtsdestotrotz kommt heute kein BEK-Experiment ohne den Einsatz optischer Methoden zur Vorkühlung des Gases aus¹. Nicht zuletzt diese Anwendung der Laserkühlung wurde mit dem Nobelpreis des Jahres 1997 gewürdigt.

Die Übertragung der Verdampfungskühlung auf die magnetisch gespeicherten, optisch vorgekühlten Alkali-Gase ^{87}Rb , ^7Li und ^{23}Na verhalf 1995 schließlich zum Durchbruch. Dabei war zugleich die Methode der Radiofrequenz-induzierten Verdampfung eingeführt worden [15, 16], die es ermöglicht, die Tiefe des Speicherpotentials zu variieren, ohne dessen Steilheit zu beeinflussen. Dieser Umstand und die Tatsache, daß Alkaliatome vergleichsweise große elastische Streuquerschnitte besitzen, erlaubt eine erheblich effizientere Gestaltung der Verdampfungskühlung als im Falle von Wasserstoff. Wie schmal der Grat auf der einen Seite immer noch ist, auf dem man sich in einem BEK-Experiment dem Phasenübergang nähert, ist daran zu erkennen, daß nahezu alle der mittlerweile über 30 erfolgreichen Experimente den gleichen prinzipiellen Ablauf haben wie ihre prominenten Vorgänger. Auf der anderen Seite hat die Optimierung einzelner experimenteller Schritte in den letzten sieben Jahren reiche Früchte getragen. Zum Teil erhebliche Fortschritte gab es zunächst bei der Verkürzung des experimentellen Zyklus, der Verbesserung der Reproduzierbarkeit und der Steigerung der Teilchenzahl des Kondensats. Aufsehen erregte in jüngster Zeit die Beobachtung des Phasenübergangs in miniaturisierten Fallen [17, 18] und die Kondensation in einer sog. optischen Dipolfalle, also unter Verzicht auf die magnetische Speicherung des Gases [19]. Mit ^1H , ^{85}Rb , ^{41}K und $^4\text{He}^*$ gelang schließlich die Kondensation von vier weiteren Gasen [8, 20, 21, 22, 23].

Eine Besonderheit der BEK atomarer Gase ist, daß sie aufgrund der inhomogenen Speicherung auch im Ortsraum stattfindet. Dadurch läßt sich das Kondensat im wahrsten Wortsinne optisch identifizieren. Zudem hat die geringe Wechselwirkung zwischen neutralen Atomen zur Folge, daß es gelingt, nahezu alle Atome des Gases in das Kondensat zu überführen. Damit steht dem Experimentator ein reines Quantengas zur Verfügung, das sich leicht manipulieren und beobachten läßt. Dabei kann er auf eine Vielzahl von Methoden zurückgreifen, die während der letzten Jahrzehnte auf den Gebieten der Spektroskopie, der Atom- und der Quantenoptik entwickelt wurden. Dementsprechend groß ist die Vielfalt an Untersuchungen, die in der noch kurzen Geschichte der BEK atomarer Gase bereits durchgeführt wurden. Experimente an Kondensaten berühren mittlerweile unterschiedlichste Fragestellungen der statistischen Mechanik, der nichtlinearen- und der Quantenoptik, der Atom- und Molekülphysik, der Festkörperphysik und der Quanteninformation. Sie sind so zahlreich, daß bereits die Würdigung der wichtigsten Arbeiten den Rahmen dieser Einleitung sprengen würde. An dieser Stelle muß daher auf Übersichtspublikationen, wie etwa die Referenzen [24, 25, 26, 27], verwiesen werden. Allgemein läßt sich jedoch feststellen, daß Kondensate heute immer häufiger als Mittel zum Zweck eingesetzt werden, daß also ihre besonderen Eigenschaften eher genutzt als untersucht werden. In diesem Zusammenhang ist insbesondere die Kohärenz des Gases zu nennen, aber auch seine extrem niedrige Energie und seine vergleichsweise hohe Dichte.

¹ Eine Ausnahme bildet das bisher einzige Wasserstoff-Experiment, das in jeder Hinsicht eine Sonderrolle einnimmt.

Zu den interessantesten Aspekten atomarer Kondensate gehört die subtile Rolle der Wechselwirkung. Obwohl sie unter typischen experimentellen Bedingungen kaum Auswirkungen auf den Phasenübergang hat, ist der Grundzustand des Gases nahezu ausschließlich durch sie bestimmt: Da die Kondensation auch im Ortsraum stattfindet, steigt die Dichte des Grundzustands mit der Anzahl kondensierter Atome schnell an, was auf der einen Seite dazu führt, daß die Wechselwirkungsenergie in der Energiebilanz des Systems bereits bei einer geringen Besetzung des Grundzustands dominiert. Auf der anderen Seite bleibt das Kondensat stets so verdünnt, daß die Beschreibung der Wechselwirkung durch ein Molekularfeld in der Regel ausgezeichnet mit dem Experiment übereinstimmt. In dieser sog. Mean-Field-Theorie wird die Summe der Paarwechselwirkungen zwischen den Atomen durch ein effektives Potential ersetzt, dem jedes Atom für sich genommen ausgesetzt ist. Dies entspricht der Vernachlässigung von Teilchenkorrelationen auf einer Längenskala, die durch die Reichweite des interatomaren Wechselwirkungspotentials gegeben ist. Die extrem niedrige Temperatur des Gases impliziert zudem reine s-Wellen-Streuung. Unter diesen Voraussetzungen ist das effektive Potential allein von der Masse, der Streulänge und der Dichte der Atome abhängig.

Die BEK verdünnter atomarer Gase bietet damit die einmalige Möglichkeit, die Rolle der Wechselwirkung in einem entarteten Vielteilchensystem gezielt zu variieren und zu verstehen. Von großem Vorteil erweist sich in diesem Zusammenhang, daß auf weit entwickelte mikroskopische Theorien zurückgegriffen werden kann, die in den fünfziger und sechziger Jahren im Zuge der Bemühungen entstanden, den Zusammenhang zwischen der Suprafluidität von ^4He (oder der Supraleitung) und der BEK zu klären. Hier waren Versuche unternommen worden, ein fiktives, gering wechselwirkendes Bose-Gas als Ausgangspunkt zu wählen, um durch kontrollierte Variation der Wechselwirkung zu einem mikroskopischen Verständnis der realen Quantenflüssigkeit zu gelangen. Die oben erwähnte Mean-Field-Theorie etwa stellt ein Produkt dieser Bemühungen dar. Mit atomaren Bose-Einstein-Kondensaten ist also genau das „fiktive“ System realisiert worden, an dem sich die Theorien testen lassen.

Die Wechselwirkung bestimmt die einzelnen Eigenschaften des Systems in unterschiedlichem Maße. Neben der Dichteverteilung des Kondensats beeinflußt sie das Spektrum und die Dämpfung seiner kollektiven Anregungen. Sie hat außerdem Auswirkungen auf die Übergangstemperatur und die relative Besetzung des Grundzustands bei gegebener Temperatur. Im Extremfall kann die Wechselwirkung, wie im Falle suprafluiden Heliums, bewirken, daß das Kondensat auch im Grenzfall verschwindender Temperatur nur wenige Prozent der Gesamtteilchenzahl enthält. In diesem sog. hydrodynamischen Regime stoßen die Teilchen so häufig, daß das thermodynamische Gleichgewicht eine lokale Charakteristik erhält. Dadurch kann es in dem System beispielsweise zur Ausprägung von Temperaturgradienten kommen. Während einige Aspekte der Wechselwirkung bereits untersucht werden konnten², sind viele der interessanten Effekte unter heutigen experimentellen Bedingungen zu klein, um sich beobachten zu lassen. Seit den ersten Tagen der experimentellen

² Eine ausgezeichnete Übersicht theoretischer und experimenteller Arbeiten findet sich in Referenz [24].

BEK atomarer Gase motiviert dieser Umstand das Bestreben, immer größere und dichtere Kondensate zu erzeugen.

Im Hinblick auf die Variation der Wechselwirkung in Kondensaten haben sich in jüngster Zeit neue, vielversprechende Perspektiven ergeben. Bemerkenswerterweise ist diese Entwicklung auf die einzigartigen Möglichkeiten zurückzuführen, die Kondensate für das Studium ultrakalter Stöße bieten. In den letzten Jahren wurden diese Möglichkeiten genutzt, um die Wechselwirkungspotentiale und die Streulängen der kondensierten Atome mit nie dagewesener Präzision zu bestimmen. Dadurch konnten feldinduzierte Resonanzen im elastischen Streuquerschnitt ultrakalter Atome (sog. Feshbach-Resonanzen) mit hoher Genauigkeit prognostiziert und schließlich im Experiment beobachtet werden [28, 29, 30, 31]. Sie lassen sich dazu einsetzen, die Wechselwirkung in Kondensaten attraktiv oder repulsiv zu gestalten und über Größenordnungen zu variieren.

1.2 Die vorliegende Arbeit

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit einer direkten, nachteiligen Konsequenz erhöhter Wechselwirkung in Kondensaten. Unabhängig davon, ob sie durch eine Variation der Dichte (bzw. Größe) oder des Streuquerschnitts erreicht wird, steigt mit ihr die Stoßrate der Atome und damit auch die Häufigkeit inelastischer Stoßprozesse. In einem spinpolarisierten Gas handelt es sich dabei um Spinrelaxations- und Rekombinationsstöße, die beide auf die Metastabilität des Kondensats, also auf die Tatsache zurückzuführen sind, daß es nicht den „echten“ Grundzustand des Systems darstellt. Bei inelastischen Stößen werden mit der Zeeman- bzw. der Hyperfeinenergie der Atome oder der Bindungsenergie des Moleküls in der Regel erheblich höhere Energien freigesetzt, als die Teilchen im Grundzustand des Systems besitzen. Paradoxerweise erweist sich dieser Umstand im Hinblick auf die Stabilität von Kondensaten geringer Dichte als vorteilhaft: Da der totale elastische Stoßquerschnitt generell mit wachsender Energie der Stoßpartner abnimmt, können die Produkte inelastischer Prozesse hinreichend verdünnte Kondensate verlassen, ohne dabei einen Teil ihrer Energie durch elastische sog. Sekundärstöße auf das Kondensat zu übertragen. Unter diesen Voraussetzungen, die in den meisten Experimenten realisiert sind, verliert das Kondensat „nur“ jene Teilchen, die zuvor inelastisch gestoßen haben. Mit der Wechselwirkung im Kondensat steigt nun aber auch die Stoßwahrscheinlichkeit der Produkte inelastischer Streuprozesse. Je nach Energieübertrag bewirken Sekundärstöße dieser Teilchen entweder unmittelbar zusätzliche Verluste oder eine „Heizrate“, die den Zerfall des Kondensats mittelbar beschleunigt. Bei einem Sekundärstoß eines hochenergetischen Teilchens mit einem ultrakalten Atom wird zumeist wenig Energie auf letzteres übertragen, weil der differentielle Streuquerschnitt bei hohen Energien Kleinwinkelstreuung bevorzugt. Das bedeutet, daß durch einen Sekundärstoß in der Regel zwei Teilchen entstehen, deren totaler elastischer Streuquerschnitt für weitere Stöße mit ultrakalten Atomen unterschiedlich groß ist. Es kann also die Situation eintreten, daß die Stoßwahrscheinlichkeit eines Zerfallsproduktes zwar klein ist, daß aber durch einen Sekundärstoß dieses Produktes ein Teilchen mit einer empfindlich größeren Stoßwahrscheinlichkeit entsteht.

Eine besondere Situation tritt ein, wenn entweder die Energie der inelastischen Stoßprodukte von Anfang an so niedrig ist, daß zukünftige Sekundärstöße mit kondensierten Atomen prinzipiell im s-Wellen-Regime stattfinden, oder wenn durch wenige Sekundärstöße der Stoßprodukte Teilchen entstehen, auf die dies zutrifft. Im s-Wellen-Regime ist der differentielle Streuquerschnitt im Schwerpunktsystem isotrop, was im Laborsystem bedeutet, daß die Energie des einfallenden Teilchens im Mittel zu gleichen Teilen auf die Stoßpartner verteilt wird. Zudem ist hier der totale Streuquerschnitt groß und von der Energie unabhängig. Unter diesen Umständen entstehen durch einen Sekundärstoß zwei Teilchen gleicher, unverändert hoher Stoßwahrscheinlichkeit. Ist diese nun im Mittel größer als $1/2$, wächst mit jedem Sekundärstoß die mittlere Anzahl von „Projektilen“, die für weitere Sekundärstöße zur Verfügung stehen: eine Stoßlawine nimmt ihren Lauf. Auf diese Weise kann ein beachtlicher Teil der Energie des inelastischen Stoßproduktes, das die Lawine ausgelöst hat, auf viele Atome verteilt werden, die dem Kondensat verloren gehen. Mit abnehmender Verdünnung zerfallen ultrakalte Gase daher nicht allein aufgrund exothermer Stoßprozesse, sondern auch infolge einer zunehmend-effizienten Übertragung der freigesetzten Energie auf „unbeteiligte“ Atome. Besonders nachteilig wirkt sich dabei aus, daß inelastische Stöße aufgrund ihrer Dichteabhängigkeit vorzugsweise im dichten Zentrum des inhomogenen Gases stattfinden, wo auch die Stoßwahrscheinlichkeit ihrer Produkte besonders hoch ist.

Der Prozeß weist eine starke Analogie zu einer nuklearen Kettenreaktion auf, wo die Dichte der Neutronen, die Kernspaltungen induzieren, oberhalb einer kritischen Masse mit jeder Kernreaktion zunimmt. Anders als dort, nimmt hier allerdings die insgesamt freigesetzte Energie nicht zu, sondern wird durch die Stoßlawine teilweise oder ganz im Kondensat dissipiert. In welchem Maße dies geschieht, ist eine Frage der „Opazität“ des Gases, hier im Sinne seiner Undurchdringbarkeit für niederenergetische Teilchen. Sie ist eine Funktion der Dichte und der Ausdehnung des Gases sowie des totalen elastischen Streuquerschnitts für s-Wellen-Streuung. Die Opazität hängt damit von den gleichen Parametern ab wie die Mean-Field-Wechselwirkung, deren Erhöhung das Interesse häufig gilt. Analog zur kritischen Masse läßt sich in einem Kondensat die *kritische Opazität* definieren, die einer mittleren Stoßwahrscheinlichkeit von 0,5 entspricht und deren Überschreiten zu Stoßlawinen führt. Es zeigt sich, daß die meisten der heutigen BEK-Experimente unterhalb der kritischen Opazität durchgeführt werden, wo die Lebensdauer des Kondensats nicht durch Stoßlawinen begrenzt ist. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Stoßlawinen hingegen als Ursache für einen achtfach beschleunigten Zerfall von Rubidium-Kondensaten überkritischer Opazität identifiziert, der die Lebensdauer des Systems auf etwa 200 ms beschränkt. Dies führt zu der Schlußfolgerung, daß sich die Wechselwirkung in Kondensaten mit „konventionellen“ Methoden kaum über das heute bereits erreichte Maß hinaus erhöhen läßt.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 werden die Grundlagen der BEK des idealen Gases von Symmetrieüberlegungen ausgehend zusammengefaßt und auf die im Experiment realisierte Situation eines inhomogenen Systems endlicher Teilchenzahl übertragen. Elastische und inelastische Stöße ultrakalter Atome stehen am Ursprung der Wechselwirkung in realen Gasen, bestimmen ihre Stabilität und sind Grundlage für die Beschreibung von Stoßlawinen. Dieser Themenkreis wird daher in Kapitel 3 theoretisch behandelt und

stellt einen der Schwerpunkte der Arbeit dar. Motiviert ist diese Gewichtung auch durch die Tatsache, daß in modernen BEK-Experimenten immer häufiger von den Möglichkeiten Gebrauch gemacht wird, die Streuung ultrakalter Atome zu beeinflussen. Dies setzt auf der einen Seite das Verständnis der komplexen Streuprozesse voraus, auf der anderen Seite findet sich in der Fachliteratur noch keine zusammenhängende Darstellung, die den schnellen Einstieg in das Gebiet ermöglicht. Die theoretischen Grundlagen der Arbeit werden schließlich mit Kapitel 4 abgeschlossen: Ausgehend von den zuvor gewonnenen Erkenntnissen mit Bezug auf ultrakalte Stöße werden hier die Wesenszüge der Mean-Field-Theorie zusammengefaßt und für das Experiment relevante Aspekte ausgearbeitet. Der verbleibende Teil der Arbeit ist von dem Umzug der Arbeitsgruppe von der Universität Konstanz an das MPI für Quantenoptik in Garching geprägt, der im Herbst des Jahres 1999 stattfand. Viele der im folgenden präsentierten Messungen wurden in Konstanz mit Hilfe der Apparatur durchgeführt, die in der Dissertation von Urban Ernst beschrieben ist [32]. Der Umzug bot die Gelegenheit, eine neue Apparatur mit den Zielen aufzubauen, die Stabilität des Experiments zu verbessern, die Erzeugung größerer Kondensate zu ermöglichen und die Dauer des experimentellen Zyklus zu reduzieren. Konstruktion und Charakterisierung dieser Apparatur bilden den zweiten Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit, ein dritter und letzter Schwerpunkt ist schließlich der experimentellen und theoretischen Untersuchung von Stoßlawinen gewidmet.

Der experimentelle Teil beginnt mit Kapitel 5 und einer Beschreibung der Methoden, die in beiden Apparaturen zur Kühlung und Speicherung des Gases eingesetzt werden. Der erste Abschnitt dieses Kapitels ergänzt die vorliegende Einleitung im Sinne einer Übersicht und Motivation der verschiedenen Schritte des Experiments, die im weiteren Verlauf des Kapitels einzeln behandelt werden. Eine Gegenüberstellung der Funktionsweise beider Apparaturen ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Alle Methoden, auf die im Rahmen von Messungen bei der Detektion und der Bestimmung von Systemgrößen zurückgegriffen wird, sind anschließend in Kapitel 6 beschrieben. Es folgen mit Kapitel 7 Aspekte der technischen Realisierung insbesondere der neuen Apparatur. Mit der Atomquelle höchsten Flusses ist Kapitel 8 dem Herzstück der neuen Apparatur gewidmet. Hier wird insbesondere auf die Optimierung des Systems eingegangen, die auf einfachen theoretischen Überlegungen beruht und es ermöglicht, 6×10^9 Atome innerhalb von nur einer Sekunde mit den Methoden der Laserkühlung einzufangen und vorzukühlen.

Erste Hinweise auf Stoßlawinen ergeben sich aus Messungen zur Charakterisierung des Phasenübergangs bzw. des Kondensats, die in Kapitel 9 vorgestellt werden. Die Untersuchung von Stoßlawinen schließlich ist Gegenstand von Kapitel 10. Dieser letzte Abschnitt der Arbeit beruht auf der Publikation [33] und beginnt mit der Ausarbeitung eines Formalismus, der es ermöglicht, die Stoßwahrscheinlichkeiten der verschiedenen Zerfallsprodukte des Kondensats zu berechnen. Er bildet die Grundlage für ein einfaches Modell, in dessen Rahmen sich die Auswirkungen von Stoßlawinen auf die Lebensdauer ultrakalter Atomwolken quantifizieren lassen. Nach einem Vergleich zwischen Theorie und Experiment schließt die Arbeit mit einem Ausblick.

Kapitel 2

Bose-Einstein-Kondensation des idealen Gases

2.1 Ununterscheidbarkeit und Symmetrie

Die Bose-Einstein-Kondensation beruht, anders als der Begriff der *Kondensation* vermuten läßt, nicht auf einer Wechselwirkung, sondern auf dem Prinzip der Ununterscheidbarkeit von Teilchen. Damit handelt es sich um ein reines Quantenphänomen. Während nämlich in der klassischen Physik selbst „baugleiche“ Teilchen anhand ihrer Trajektorien stets zu verfolgen und somit prinzipiell unterscheidbar sind, erlaubt die Unschärferelation die Lokalisierung von „quantenmechanischen“ Teilchen im Phasenraum bestenfalls mit einer Auflösung, die dem Volumen h^3 einer Phasenraumzelle entspricht. Statt von einer Trajektorie kann man nur noch von einem Bereich sprechen, über den ein Teilchen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit „verschmiert“ ist: seiner Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Zwei Teilchen der gleichen Art sind daher nur unterscheidbar, solange sie sich in ihrer Vergangenheit im Phasenraum nie so nahe gekommen sind, daß ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeiten einen Überlapp hatten. Nach einem solchen Kontakt im Phasenraum sind die Teilchen prinzipiell nicht mehr identifizierbar. Das Pauli-Prinzip ist sicherlich die bekannteste Konsequenz der Ununterscheidbarkeit. Im folgenden soll kurz an ihre Rolle bei der Bose-Einstein-Kondensation erinnert werden.

Besetzung von Zuständen

Die unmittelbare Konsequenz der Ununterscheidbarkeit für die quantenmechanische Beschreibung eines Systems von N Teilchen ist die Invarianz des Hamilton-Operators bezüglich der Vertauschung aller Koordinaten zweier beliebiger Teilchen. Sie gewährleistet, daß sich Konfigurationen, die durch Vertauschen von Teilchen zustande kommen, nicht durch Messungen unterscheiden lassen. Formal bedeutet das, daß der Hamilton-Operator

und der Permutationsoperator $\hat{P}_{i,j}$ kommutieren und somit einen gemeinsamen Satz von Eigenfunktionen besitzen. Diese sind Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\hat{H} \Phi_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = E_n \Phi_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (2.1)$$

Da durch Wiederholung der gleichen Permutation die ursprüngliche Wellenfunktion reproduziert werden muß, gilt offensichtlich

$$\hat{P}_{i,j}^2 \Phi_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \lambda^2 \Phi_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \equiv \Phi_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (2.2)$$

Die Eigenwerte λ des Permutationsoperators können daher nur ± 1 sein. Das bedeutet, daß die Eigenfunktionen bezüglich der Vertauschung entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sein müssen. Jeder beliebige Zustand des Systems läßt sich somit als Superposition von Eigenfunktionen $\Phi_n^{(+)}$ bzw. $\Phi_m^{(-)}$ mit definiertem Symmetriecharakter schreiben. Da die Ununterscheidbarkeit durch keine Wechselwirkung aufgehoben werden kann, muß jeder in Betracht zu ziehende Operator ebenfalls invariant unter Teilchenvertauschung sein. Damit ist gesichert, daß die Symmetrie einer Eigenfunktion nicht durch die Wirkung eines Operators geändert werden kann, daß also die beiden durch die Symmetrie definierten Teilräume des Hilbertraums nicht mischen. Daher genügt es stets, Systeme zu betrachten, deren Zustände sich *entweder* aus symmetrischen *oder* aus antisymmetrischen Eigenfunktionen zusammensetzen. Sinngemäß unterscheidet man in der Quantenmechanik zwischen Bosonen und Fermionen. Diese Zweiteilung der Natur deckt sich mit allen bisherigen Beobachtungen des Menschen.

So gleichberechtigt die beiden Symmetrien auch erscheinen, so fundamental verschieden sind ihre Auswirkungen auf das Verhalten von Teilchensystemen. Am einfachsten erkennt man das an dem Zusammenhang zwischen den Zuständen, die einem einzelnen Teilchen zur Verfügung stehen, und dem Gesamtzustand des N -Teilchen-Systems. In der Abwesenheit von Wechselwirkungen zerfällt der Hamilton-Operator eines Systems identischer Teilchen in die Summe der Ein-Teilchen-Operatoren:

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^N \hat{h}_k. \quad (2.3)$$

Sind $\phi_i(\vec{r})$ die Eigenfunktionen des Ein-Teilchen-Problems, so erfüllen alle Produktzustände $\phi_i(\vec{r}_1) \cdots \phi_j(\vec{r}_N)$ die Eigenwertgleichung des Gesamtsystems. Da sie jedoch (falls nicht alle Indizes i, j gleich sind) offensichtlich weder symmetrisch noch antisymmetrisch sind, muß man erst durch geeignete Superpositionen Zustände mit der geforderten Symmetrie schaffen. Dies geschieht durch *Symmetrisierung* bzw. *Antisymmetrisierung* mit Hilfe der verallgemeinerten Permutationsoperatoren $\hat{P}$. Sie überführen einen Produktzustand $\phi_1(\vec{r}_1) \cdots \phi_i(\vec{r}_i) \cdots \phi_N(\vec{r}_N)$ durch Vertauschen der Koordinaten in die Konfigurationen $\text{sgn}(P) \cdot \phi_1(\vec{r}_{P1}) \cdots \phi_i(\vec{r}_{Pi}) \cdots \phi_N(\vec{r}_{PN})$. Dabei hat $\text{sgn}(P)$ für Bosonen stets den Wert 1 und für Fermionen ± 1 , je nach dem, ob eine gerade oder eine ungerade Anzahl sukzessiver Vertauschungen zweier Koordinaten die entsprechende Permutation erzeugt. Die Zustände des Systems erhalten dann die Form:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{Fermi}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) &= \text{Norm} \sum_P \text{sgn}(P) \hat{P} \phi_1(\vec{r}_1) \cdots \phi_i(\vec{r}_i) \cdots \phi_N(\vec{r}_N), \\ \Phi_{\text{Bose}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) &= \text{Norm} \sum_P \hat{P} \phi_1(\vec{r}_1) \cdots \phi_i(\vec{r}_i) \cdots \phi_N(\vec{r}_N), \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei über alle möglichen Permutationen der Koordinaten summiert wird. Offenbar läßt sich die Wellenfunktion eines fermionischen Systems als Determinante¹ schreiben:

$$\Phi_{\text{Fermi}}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = \text{Norm} \begin{vmatrix} \phi_1(\vec{r}_1) & \phi_1(\vec{r}_2) & \dots & \phi_1(\vec{r}_N) \\ \phi_2(\vec{r}_1) & \phi_2(\vec{r}_2) & \dots & \phi_2(\vec{r}_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N(\vec{r}_1) & \phi_N(\vec{r}_2) & \dots & \phi_N(\vec{r}_N) \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Es ist leicht zu erkennen, daß die Determinante identisch Null ist, wenn zwei der Ein-Teilchen-Zustände ϕ_i, ϕ_j gleich sind, wenn also in dem System zwei Teilchen den gleichen Zustand besetzen². In einem fermionischen System dürfen daher alle Zustände *höchstens* einfach besetzt sein. Dies ist nichts anderes als das Pauli-Prinzip. Es ist somit allein auf die Symmetrie der Wellenfunktion zurückzuführen und sorgt dafür, daß sich Fermi-Gase fundamental anders verhalten als klassische Gase. Demgegenüber unterliegen Bosonen keiner Einschränkung der Besetzungszahlen. Daß die Symmetrie auch in ihrem Fall zu erheblichen Abweichungen vom klassischen Gas führt, wird im folgenden Abschnitt deutlich.

2.2 Zustandssumme und Besetzungsstatistik

Um die thermodynamischen Eigenschaften eines Teilchensystems zu bestimmen, verfolgt man in der statistischen Mechanik einen Wahrscheinlichkeitsansatz: Gesucht werden dabei stets die Wahrscheinlichkeiten, unter gegebenen Randbedingungen mikroskopische, energetisch stationäre Zustände des Systems vorzufinden. Kennt man die Verteilung dieser Wahrscheinlichkeiten, ist es prinzipiell möglich, die makroskopischen Zustandsgrößen des Systems durch eine Mittelung über mikroskopische Eigenschaften zu gewinnen.

Die Energie eines vollständig isolierten Systems ist bis auf einen infinitesimal kleinen Bereich festgelegt, und es ist gleich wahrscheinlich, eine der mikroskopischen Konfigurationen (sog. Mikrozustände) vorzufinden, die zu der entsprechenden Energie führen. Für ein offenes System hingegen, das mit einem Wärme- und einem Teilchenreservoir in Kontakt steht, sind lediglich die Temperatur T , das Volumen V und das chemische Potential μ festgelegt³. Das System kann daher theoretisch alle Energie-Eigenzustände annehmen und eine beliebige Zahl von Teilchen enthalten. Bei bekannter Symmetrie ist ein Quantenzustand des Systems vollständig durch den Satz $\{n_k\}$ der Besetzungszahlen der Ein-Teilchen-Zustände ϕ_k (mit den Energieeigenwerten ϵ_k) charakterisiert. Für Energie und Teilchenzahl des Zustands gelten dann die Relationen

$$E = \sum_k \epsilon_k n_k \quad \text{und} \quad N = \sum_k n_k. \quad (2.6)$$

¹ Die sog. *Slaterdeterminante*.

² In diesem Fall sind zwei der Zeilen der Determinante gleich.

³ Man spricht in diesem Zusammenhang vom großkanonischen Ensemble.

Die Wahrscheinlichkeit $p_{\{n_k\}}$, eine bestimmte Konfiguration vorzufinden, die zu E und N führt, wird jetzt proportional zu der Anzahl der Mikrozustände des *Reservoirs* sein, die mit dem Energie-Eigenzustand und der Teilchenzahl des betrachteten Systems kompatibel sind. Ausgehend von dieser Überlegung ist es leicht zu zeigen, daß

$$p_{\{n_k\}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp \left(-\beta \sum_{k=0}^{\infty} n_k (\epsilon_k - \mu) \right) \quad (2.7)$$

gilt [34], mit $\beta = (k_B T)^{-1}$. Um die Normierungskonstante $\mathcal{Z}$ zu bestimmen, muß die Exponentialfunktion in Gleichung (2.7) über alle erlaubten Konfigurationen des Systems zu allen Energien und Teilchenzahlen aufsummiert werden. Dies kommt einer Abzählung der erlaubten Zustände des Systems gleich. Daher wird $\mathcal{Z}$ als *Zustandssumme* bezeichnet. Es gilt also,

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{n_k\}} \exp \left(-\beta \sum_k n_k (\epsilon_k - \mu) \right) \quad (2.8)$$

zu berechnen. Dazu muß zunächst die formale Summation über Sätze von Besetzungszahlen in eine Funktion der einzelnen Besetzungszahlen umgewandelt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{\{n_k\}} \prod_{k=0}^{\infty} \exp(-\beta n_k (\epsilon_k - \mu)) \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \sum_{n_k} \exp(-\beta n_k (\epsilon_k - \mu)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nun werden Annahmen über die Symmetrie der N-Teilchen-Wellenfunktionen eine entscheidende Rolle spielen: Sie bewirkt für Fermionen $n_k = 0, 1$, während Ein-Teilchen-Zustände durch Bosonen beliebig oft besetzt werden können. Man erhält daher:

$$\mathcal{Z}_{\text{Fermi}} = \prod_{k=0}^{\infty} \{1 + \exp[-\beta (\epsilon_k - \mu)]\}, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{Z}_{\text{Bose}} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - \exp[-\beta (\epsilon_k - \mu)]}. \quad (2.11)$$

Um zur Beziehung (2.11) zu gelangen, muß vorausgesetzt werden, daß die Zustandssumme und damit die geometrische Reihe in Gleichung (2.9) konvergieren. Das Gegenteil wäre natürlich unphysikalisch. Da dies auch für den Grundzustand mit $k = 0$ gelten muß, folgt daraus sofort, daß das chemische Potential für Bosonen stets kleiner als die Energie des Ein-Teilchen-Grundzustandes sein muß⁴.

In einem klassischen Gas kann man zwar die Ununterscheidbarkeit der Teilchen zusätzlich postulieren, eine zur Symmetrie der Wellenfunktion äquivalente Eigenschaft kann jedoch

⁴ Im thermodynamischen Limes ist diese Null, und das chemische Potential muß daher negativ sein.

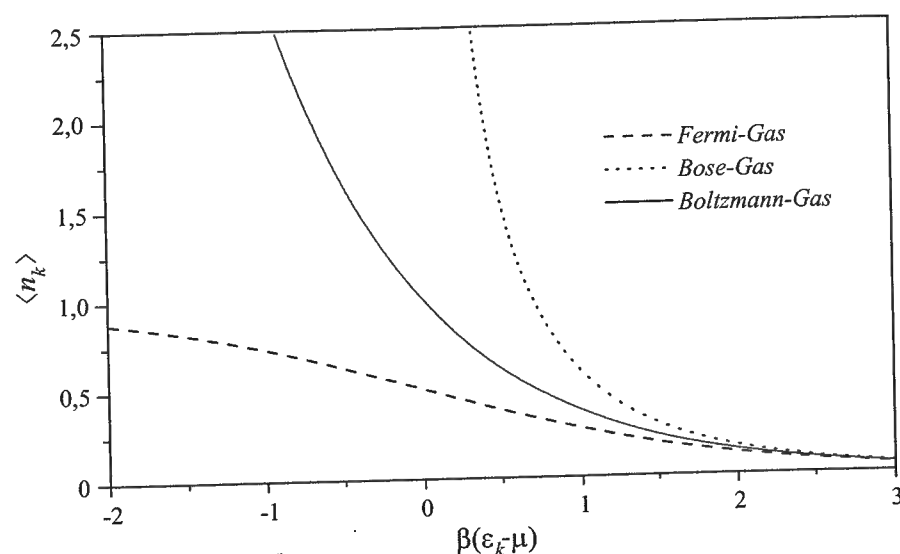


Abbildung 2.1: Mittlere Besetzungszahl von Ein-Teilchen-Zuständen in klassischen und Quantengasen.

nicht eingeführt werden. Läßt man die Forderung der Symmetrie fallen, entspricht ein Satz $\{n_k\}$ von Besetzungszahlen nicht einem, sondern $g = (n_1! n_2! \dots)$ Zuständen. In einem solchen Gas ist die Wahrscheinlichkeit *einen* dieser Zustände vorzufinden daher $p_{\{n_k\}}/g$. Hier deutet sich bereits an, daß die klassische und die quantenmechanische Beschreibung zu unterschiedlichen Ergebnissen führen werden, sobald die Mehrfachbesetzung von Ein-Teilchen-Zuständen wahrscheinlich wird. Für den klassischen Fall erhält man als Normierung:

$$Z_{\text{Klass}} = \prod_{k=0}^{\infty} \exp \{ \exp [-\beta(\epsilon_k - \mu)] \} . \quad (2.12)$$

Da nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zustände des Systems bekannt ist, kann der Erwartungswert für die Besetzung der Ein-Teilchen-Zustände entsprechend $\langle n_k \rangle = \sum_{\{n_k\}} p_{\{n_k\}} n_k$ durch Mittelung gewonnen werden. Für die drei Fälle erhält man die Ergebnisse:

$$\langle n_k \rangle_{\text{Fermi}} = \frac{1}{\exp [\beta(\epsilon_k - \mu)] + 1} , \quad (2.13)$$

$$\langle n_k \rangle_{\text{Bose}} = \frac{1}{\exp [\beta(\epsilon_k - \mu)] - 1} , \quad (2.14)$$

$$\langle n_k \rangle_{\text{Klass}} = \exp [-\beta(\epsilon_k - \mu)] . \quad (2.15)$$

In Abbildung 2.1 werden die mittleren Besetzungszahlen (2.15), (2.13) und (2.14), eines klassischen mit jenen von Fermi- und Bose-Gasen verglichen. Für $\epsilon_k \gg k_B T$ sind die Besetzungszahlen in den drei Systemen identisch. Bildlich gesprochen spiegelt dies die Tatsache wider, daß bei hohen Energien quantenmechanische Teilchen ähnlich gut lokalisiert sind wie klassische. Die mittlere Besetzung niederenergetischer Zustände ist jedoch in einem Bose-Gas höher, in einem Fermi-Gas geringer als die klassisch vorhergesagte.

Zusammenfassend kann also folgendes festgehalten werden: Die Symmetrie der N-Teilchen-Wellenfunktion (oder ihr Fehlen) bestimmt die Abzählvorschrift der Konfigurationen, die das System einnehmen kann, und damit auch die mittlere Besetzungszahl der Ein-Teilchen-Zustände im System. In Quantengasen führt dies zu der erstaunlichen Tatsache, daß Teilchen, die dem System hinzugefügt werden, entweder Zustände bevorzugen, die bereits mit hoher Wahrscheinlichkeit besetzt sind, oder solche, für die das Gegenteil zutrifft, je nach dem, welche Symmetrie die Wellenfunktion des Systems besitzt. Bosonen ziehen sich also gewissermaßen an, auch wenn zwischen ihnen keinerlei Wechselwirkung im eigentlichen Sinne vorliegt. Darauf beruht die Bose-Einstein-Kondensation, auf die nun genauer eingegangen werden soll.

2.3 Das ideale Bose-Gas im harmonischen Potential

Die Bose-Einstein-Kondensation (im folgenden als BEK bezeichnet) eines idealen Gases wird in der Regel im dreidimensionalen Kastenpotential und im thermodynamischen Limes behandelt (siehe z.B. [35, 36]). Da sich beides im Experiment nicht realisieren läßt, wird hier der Fall eines harmonischen Potentials

$$U(x, y, z) = \frac{m}{2} (\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2) \quad (2.16)$$

betrachtet und auf die Rolle der endlichen Teilchenzahl eingegangen [37, 38, 26]. Dabei sind $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ die Oszillationsfrequenzen der Teilchen mit der Masse m .

Ausgangspunkt der Diskussion ist die Frage, wie sich die Symmetrie bzw. „Anziehung“ der Bosonen auf den Erwartungswert der Teilchenzahl in angeregten Zuständen des Systems auswirkt. Gemäß Gleichung (2.6) erhält man die Gesamtteilchenzahl durch Summation der mittleren Besetzungszahlen (2.14). Im Falle $k_B T \gg (\hbar\omega_x, \hbar\omega_y, \hbar\omega_z)$ kann das Energiespektrum als kontinuierlich angesehen werden und die Grundzustandsenergie beträgt in guter Näherung Null. In dieser semiklassischen Näherung ist es erlaubt, die Summe in Gleichung (2.6) in ein Integral über die Energie umzuschreiben, wobei der Anzahl von Zuständen mit einer Energie ϵ durch die Gewichtung mit der Zustandsdichte $D(\epsilon)$ Rechnung getragen wird:

$$N = \int_0^{\infty} \frac{D(\epsilon) d\epsilon}{\tilde{z}^{-1} \exp(\beta\epsilon) - 1} + N_0 \quad \text{mit} \quad D(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{(\hbar\omega)^3} . \quad (2.17)$$

Dabei würden die Fugazität $\tilde{z} = e^{\beta\mu}$ und das geometrische Mittel $\omega = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ der Oszillationsfrequenzen eingeführt. Da der Zustand $\epsilon = 0$ in der Zustandsdichte nicht berücksichtigt ist, muß die Besetzung $N_0 = \tilde{z}/(1 - \tilde{z})$ des Grundzustandes gesondert betrachtet werden. Das Integral in Gleichung (2.17) läßt sich leicht auf die Form

$$g_\nu(\tilde{z}) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1} dx}{\tilde{z}^{-1} e^x - 1} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^l}{l^\nu} \quad (2.18)$$

einer Polylogarithmusfunktion bringen⁵. Man erhält schließlich:

$$N - N_0 = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(\tilde{z}) \quad \text{mit} \quad N_0 = \frac{\tilde{z}}{1 - \tilde{z}}. \quad (2.19)$$

Da das chemische Potential den Überlegungen in Abschnitt 2.1 zufolge stets kleiner als die Energie des Grundzustands sein muß, gilt $0 \leq \tilde{z} \leq 1$. In diesem Bereich erreicht $g_3(\tilde{z})$ höchstens den Wert $g_3(1) = 1,202$. Das bedeutet, daß die Anzahl der Teilchen in den angeregten Zuständen für einen festen Wert von ω beschränkt ist. Diese „Sättigung“ tritt ein, sobald die Temperatur erreicht wird, bei der das chemische Potential die Grundzustandsenergie erreicht. Bei geringeren Temperaturen finden alle überschüssigen Teilchen nur im Grundzustand des Potentials Platz, für dessen Besetzung es keine Einschränkung gibt. Eine solche makroskopische Besetzung des Zustands niedrigster Energie würde in einem klassischen Gas nur im trivialen Grenzfall $T \rightarrow 0$ auftreten. Demgegenüber setzt in einem Quantengas gemäß Gleichung (2.19) die Bose-Einstein-Kondensation bei der endlichen Temperatur

$$T_c = \frac{\hbar \omega}{k_B} \left(\frac{N}{1,202} \right)^{1/3} \quad (2.20)$$

ein (zu sehen für $N_0 \rightarrow 0$). Durch Einsetzen von (2.20) in (2.19) erhält man den Verlauf der relativen Grundzustandsbesetzung mit der Temperatur:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \quad \text{für} \quad T \leq T_c. \quad (2.21)$$

Streng genommen ist die Übergangstemperatur im Sinne eines Phasenübergangs nur im thermodynamischen Limes wohldefiniert. Da das Gas im harmonischen Potential ein Volumen $V \propto \omega^{-3}$ einnimmt, ist der thermodynamische Grenzfall durch $N \rightarrow \infty$ und $\omega \rightarrow 0$ unter der Nebenbedingung $N\omega^3 = \text{const.}$ zu vollziehen. Dadurch kommt dem Ausdruck (2.20) tatsächlich die Bedeutung einer Übergangstemperatur zu.

Im Experiment läßt sich dieser Grenzfall nur bedingt realisieren. Zudem bricht die semiklassische Näherung für geringe Teilchenzahlen zusammen, da die Übergangstemperatur mit der Teilchenzahl abnimmt. Ist $k_B T \gg \hbar \omega$ nicht mehr erfüllt, muß statt des Integrals in Gleichung (2.17) entweder die Summe über das exakte Energiespektrum ausgewertet [37] oder zumindest auf eine genauere Darstellung der Zustandsdichte $D(\epsilon)$ zurückgegriffen werden [39, 40]. Dies führt dazu, daß die relative Grundzustandsbesetzung bei T_c nicht mehr sprunghaft ansteigt, sondern stetig differenzierbar. Die Übergangstemperatur kann dann lediglich durch Extrapolation bestimmt werden. Bezüglich (2.20) erhält man in erster Ordnung die Korrektur [39]

$$\frac{\delta T_c}{T_c^{(0)}} = -\frac{g_2(1)}{2 g_3(1)^{2/3}} \frac{\bar{\omega}}{\omega} N^{-1/3} = -0,73 \frac{\bar{\omega}}{\omega} N^{-1/3} \quad \text{mit} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_x + \omega_y + \omega_z}{3}. \quad (2.22)$$

⁵ Die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen im Zusammenhang mit der BEK sind z.B. in [36] zusammengefaßt.

Die Grundzustandsbesetzung folgt dem Verlauf

$$\frac{N_0}{N} \simeq 1 - \left(\frac{T}{T_c^{(0)} + \delta T_c} \right)^3 - 3 \frac{\delta T_c}{T_c^{(0)}} \left(\frac{T}{T_c^{(0)} + \delta T_c} \right)^2. \quad (2.23)$$

Unter typischen experimentellen Bedingungen liegen beide Korrekturen im Bereich von 1-2 %. Daher behält die BEK auch unter realistischen Bedingungen die Signatur eines Phasenübergangs.

Aus dem gleichen Grund kann die semiklassische Näherung auch im Falle endlicher Teilchenzahlen zur Berechnung der Dichteverteilung herangezogen werden. Für die Teilchen in angeregten Zuständen geschieht dies, indem man in den mittleren Besetzungszahlen (2.14) die Energie als Funktion der Phasenraumkoordinaten darstellt und anschließend über den Impulsraum abintegriert:

$$n_T(x, y, z) = \frac{1}{h^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{\tilde{z}^{-1} \exp \{ \beta [p^2/2m + U(x, y, z)] \} - 1}. \quad (2.24)$$

Durch Variablensubstitution läßt sich das Integral wieder auf die Form (2.18) bringen, mit dem Ergebnis:

$$n_T(x, y, z) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(\tilde{z} e^{-\beta U(x, y, z)}). \quad (2.25)$$

Die thermische de Broglie-Wellenlänge $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ ist ein Maß für die Größe des Bereiches, über den ein Teilchen „verschmiert“ ist. Damit kommt der Kondensation in dieser Schreibweise eine anschauliche Bedeutung zu: Sie tritt ein, wenn die zentrale Dichte $n_p = n_T(0, 0, 0)$ und die Temperatur die Bedingung

$$n_p \lambda_T^3 = g_{3/2}(1) = 2,612 \quad (2.26)$$

erfüllen⁶. Da $1/\sqrt[3]{n_p}$ dem mittleren Abstand der Teilchen im Zentrum des Gases entspricht, bedeutet dies, daß die Kondensation einsetzt, sobald hier die Teilchen „überlappen“.

Im Grenzfall $\tilde{z} \rightarrow 0$ gilt $g_{3/2}(\tilde{z}) \rightarrow \tilde{z}$ und Gleichung (2.25) geht in die gaußförmige Dichteverteilung eines klassischen Gases über. In diesem Fall sind die Breiten der Verteilung unabhängig von der Teilchenzahl und im Mittel durch $\sigma = \sqrt{(k_B T)/(m\omega^2)}$ gegeben. Für $\tilde{z} \rightarrow 1$ zeichnet sich (2.25) gegenüber der klassischen Verteilung durch eine Überhöhung der zentralen Dichte aus, wie in Abbildung 2.2 zu sehen ist. Die Breiten der Verteilung sind in diesem Fall von der Temperatur und der Teilchenzahl abhängig, jedoch nach wie vor von der Größenordnung σ .

Die Dichteverteilung der kondensierten Teilchen ergibt sich aus der Grundzustands-Wellenfunktion des harmonischen Oszillators:

$$n_0(x, y, z) = N_0 |\phi_0(x, y, z)|^2 = N_0 \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{\hbar} (\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2) \right]. \quad (2.27)$$

Das Kondensat hat somit eine gaußförmige Dichteverteilung, deren mittlere Breite durch

⁶ Die Größe $n_p \lambda_T^3$ wird als (dimensionslose) Phasenraumdicke bezeichnet.

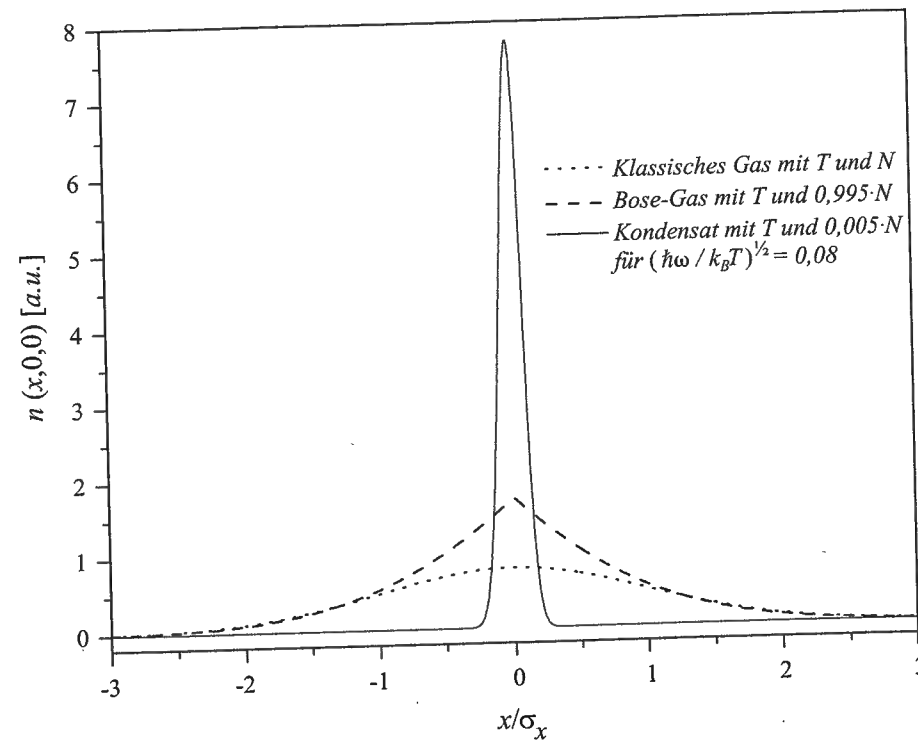


Abbildung 2.2: Dichteverteilung eines Bose- und eines klassischen Gases bei gleicher Teilchenzahl und Temperatur, aufgetragen über eine der Koordinaten. T ist so gewählt, daß im Bose-Gas bereits 0,5 % der Teilchen kondensiert sind.

die Oszillatorlänge $a_{ho} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ gegeben ist. Da die Gültigkeit der semiklassischen Näherung vorausgesetzt wurde, gilt stets $a_{ho}/\sigma = \sqrt{(\hbar\omega)/(k_B T)} \ll 1$. Im harmonischen Potential findet daher die Kondensation, anders als im Kastenpotential, auch im Ortsraum statt und äußert sich durch einen ausgeprägten Anstieg der zentralen Dichte. Dieses Verhalten bietet eine einfache Möglichkeit, die Kondensation experimentell nachzuweisen. Es ist in Abbildung 2.2 dargestellt, wobei für a_{ho}/σ der im Experiment realisierte Wert gewählt wurde. Der Grundzustand enthält lediglich ein halbes Prozent der Gesamtteilchenzahl, die Temperatur beträgt somit $0,998 T_c$. Man lasse sich nicht dazu verleiten, die Flächen der Verteilungen als ein Maß für die Teilchenzahl aufzufassen, da bei ihrer dreifachen Integration weit vom Zentrum entfernte Bereiche verstärkt zur Teilchenzahl beitragen.

Die Kondensation im Ortsraum birgt eine weitere Signatur der BEK in einem anisotropen harmonischen Potential: Die Impulsverteilung der nichtkondensierten Teilchen erhält man analog zu Gleichung (2.24) durch Integration über den Ortsraum. Sie ist stets räumlich isotrop; ihre Breite beträgt $\sigma_p = \sqrt{m k_B T}$ und ist erwartungsgemäß allein durch die Temperatur gegeben. Im Gegensatz dazu sind die Teilchen im Grundzustand mit minimaler Unschärfe lokalisiert. Entsprechend der Unschärferelation ist ihre Impulsbreite in einem anisotropen Potential ebenfalls anisotrop und entspricht jeweils $\sigma_{p,i} = \hbar/a_{ho}[\omega_i]$. Es bietet sich daher an, das Gas durch eine instantane Vergrößerung des Speichervolumens frei

expandieren zu lassen. Mit fortschreitender Dauer der Expansion wird die Ortsverteilung des Gases zunehmend seine Impulsverteilung widerspiegeln und somit im nichtkondensierten Fall isotrop werden (siehe Anhang A). Im Gegensatz dazu expandiert das Kondensat anisotrop und schneller in Richtungen, entlang derer es zuvor schärfer lokalisiert war.

Aufgrund der geringen Ausdehnung des Grundzustandes übersteigt die Dichte des Kondensats jene der Teilchen in den angeregten Zuständen sehr schnell um Größenordnungen. Da dem Experimentator ausschließlich reale Gase zur Verfügung stehen, behält die ideale Gastheorie nur im Falle sehr starker Verdünnung ihre Gültigkeit. Es ist daher notwendig, Effekte der Wechselwirkung zwischen den Teilchen zu untersuchen. Dies ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

Kapitel 3

Die Realität: Wechselwirkende Bosonen

Atome sind bekanntlich zusammengesetzte Teilchen mit einer komplizierten inneren Struktur. Entscheidend für ihr statistisches Verhalten ist jedoch allein ihre Spinquantenzahl. Die meisten Atome des Periodensystems weisen einen ganzzahligen Spin auf und verhalten sich daher, dem Spin-Statistik-Theorem entsprechend, wie Bosonen [3]. Anders als zwischen den Teilchen des idealen Gases können jedoch zwischen Atomen erhebliche Kräfte wirken. Im großen Abstand sind diese attraktiv und spiegeln die Dispersions- oder van der Waals-Wechselwirkung wider, während das Pauli-Prinzip zu einer starken, repulsiven Austauschwechselwirkung führt, sobald die Elektronenwolken der Atome überlappen.

Auf den ersten Blick verbietet die interatomare Wechselwirkung die BEK eines realen Gases: Die Bedingung $n\lambda_T^3 = 2,612$ erreichen nahezu alle bekannten Gase nur im festen Zustand, wo es natürlich keinen Sinn macht, von der BEK zu sprechen¹. Tatsächlich erweist sich jedoch die Wechselwirkung zwischen den Atomen als eine der wichtigsten Voraussetzungen für die experimentelle Realisierung der BEK in einem verdünnten Gas. Die Wechselwirkung äußert sich durch Stöße zwischen den Teilchen. Im Gegensatz zu einem idealen Gas gewährleisten sie die Thermalisierung des Ensembles auch in der Abwesenheit von materiellen Wänden. Dies ermöglicht zum einen das Experimentieren an rein magnetisch (oder optisch) gespeicherten Gasen in einem Vakuumsystem, das sich bei Raumtemperatur befindet. Wie sich in Kapitel 7.3 zeigt, ist in einem solchen System die Isolation des Gases von der Umwelt so gut, daß es bei einer für das Experiment typischen Temperatur von ca. 1 μ K einer umweltbedingten „Heizrate“ von lediglich etwa 20 nK/s ausgesetzt ist. Zum anderen erlauben die kontaktlose Speicherung und die Stoßthermalisierung den Einsatz phasenraum- oder ensemblespektiver Kühlmethoden wie der Verdampfungskühlung (siehe Kapitel 5.6) und der sympathetischen Kühlung [42]. Mit Hilfe dieser Verfahren ist es überhaupt erst möglich, Temperaturen von wenigen 10 nK zu erreichen

¹ Die einzige Ausnahme bildet Helium, das sogar bei extrem tiefen Temperaturen flüssig bleibt. Die seit langem etablierte Annahme, daß ^4He in der Tat BEK aufweist, konnte erst kürzlich unmittelbar bestätigt werden [41].

und damit in Bereiche vorzustößen, die mit kryogenen Methoden unzugänglich sind. Der kontaktlosen Speicherung kommt jedoch eine zusätzliche, nicht minder wichtige Bedeutung zu: Die erste Stufe auf dem Weg zu einem Festkörper besteht in der Molekülbildung. In der Abwesenheit von Wänden ist diese aus Energie- und Impulserhaltungsgründen nur möglich, wenn in dem Gas (mindestens) drei Atome gleichzeitig aufeinandertreffen. Bei geringen Dichten sind solche Ereignisse jedoch so selten, daß sich das Gas extrem stark unterkühlen läßt. Die Kondensation erreicht man schließlich in einem metastabilen Zustand, dessen Lebensdauer Minuten betragen kann, eine Zeitspanne, die für nahezu alle denkbaren Experimente ausreicht.

Die extrem tiefe Temperatur, bei der die Kondensation eintritt, erfordert die quantenmechanische Beschreibung von Stößen. Elastische Stöße entsprechen dabei in guter Näherung der Streuung an einem Zentralpotential. Im folgenden wird daher kurz auf deren Grundbegriffe eingegangen. Da Atome jedoch eine Struktur besitzen, kann sich ihr innerer Zustand bei einem Streuprozess ändern. Ein solcher, inelastischer Stoß führt stets zu einem Verlust der beteiligten Atome. Zum einen, weil ein unterscheidbares Teilchen nicht mehr zur Phasenraumdicke des Ensembles beiträgt, und zum anderen, weil bei dem Prozeß in der Regel sehr viel mehr Energie freigesetzt wird, als kondensierte Atome im Mittel besitzen dürfen. Die Berechnung der entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten (und damit der relevanten Verlustraten) ist eine Wissenschaft für sich. Daher kann an dieser Stelle nur auf ihren Ursprung eingegangen werden.

3.1 Elastische Stöße

Die Streuung zweier Teilchen, die über ein Zentralpotential miteinander wechselwirken, entspricht in Relativkoordinaten der Streuung eines Teilchens mit der reduzierten Masse $m_r = m/2$ an dem Zentralpotential. Zwar stellt das einfallende Teilchen ein Wellenpaket mit einer Unschärfe in Impuls und Ort dar, jedoch läßt sich dieses als Superposition von ebenen Wellen $\psi_k^{(0)}(z) \sim e^{ikz}$ mit scharfem Impuls schreiben. Da es sich um elastische Streuung handelt, ändert sich die Energie der ebenen Wellen durch den Streuprozess nicht. Gesucht werden daher Eigenzustände von

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)\psi_k(\vec{r}) = E_k\psi_k(\vec{r}) \quad (3.1)$$

zur wohldefinierten Energie $E_k = (\hbar k)^2/(2m_r)$. Die einlaufende Welle $\psi_k^{(0)}(z)$ erzeugt am Streuzentrum eine Streuwelle $\psi_k^{(s)}(\vec{r})$, so daß die Lösung des Streuproblems die Form $\psi_k(\vec{r}) = \psi_k^{(0)}(z) + \psi_k^{(s)}(\vec{r})$ hat. Für ein kurzreichweitiges Potential ist dieser Zustand für $r \rightarrow \infty$ wieder kräftefrei und muß daher eine Lösung von Gleichung (3.1) für $V(\vec{r}) = 0$ sein. Man sucht somit Zustände mit der asymptotischen Form

$$\psi_k(r, \theta) \sim e^{ikr \cos \theta} + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.2)$$

wobei θ der Streuwinkel und $f(k, \theta)$ die Streuamplitude sind. Dieses formale Ergebnis ist insoweit von Bedeutung, als es den Streuzustand mit den relevanten physikalischen

Größen des Streuprozesses in Verbindung setzt: dem differentiellen und dem totalen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(k, \theta)}{d\Omega} &= |f(k, \theta)|^2 \quad \text{bzw.} \\ \sigma(k) &= \int d\Omega \frac{d\sigma(k, \theta)}{d\Omega}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Das Problem reduziert sich somit auf die Bestimmung der Streuamplitude. Für sie kann die Integralform

$$f(k, \theta) = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik(\vec{e}_r \cdot \vec{r}') V(\vec{r}') \psi_k(\vec{r}') d^3r' \quad (3.4)$$

angegeben werden, die die asymptotischen Werte der Wellenfunktion (also $f(k, \theta)$) mit jenen aus dem Wirkungsbereich des Potentials implizit verknüpft (siehe z.B. [43, 44]). Für schwache Potentiale oder Potentiale endlicher Stärke, die für $\vec{r} \rightarrow \infty$ sehr schnell verschwinden, ist die Annahme gerechtfertigt, daß sich die gestreute Welle nur unwesentlich von der einlaufenden unterscheidet. In diesem Fall läßt sich das Integral in der Bornschen Näherung mit $\psi_k(\vec{r}') \simeq e^{i\vec{k}\vec{r}'}$ auswerten, und das Streuproblem ist in einem störungstheoretischen Ansatz erster Ordnung gelöst.

Im Falle eines Zentralpotentials kann die Form der Streuamplitude durch einen Vergleich des Ausdrucks (3.2) mit der asymptotischen Lösung der Schrödingergleichung (3.1) genauer spezifiziert werden. Aufgrund der Kugelsymmetrie des Potentials ist der Drehimpuls erhalten, und es bietet sich eine Entwicklung von $\psi_k(\vec{r})$ nach dessen Eigenfunktionen, den Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta, \phi)$, an. Da die Streuung nicht vom Azimutwinkel ϕ abhängen wird ($m = 0$), reduzieren sich diese auf die Legendre-Polynome $P_l(\cos \theta)$ und so lautet der Ansatz:

$$\psi_k(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u_{k,l}(r)}{r} P_l(\cos \theta). \quad (3.5)$$

Damit erhält man aus der Schrödingergleichung (3.1) die eindimensionalen Radialgleichungen

$$\frac{d^2}{dr^2} u_{k,l}(r) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m_r}{\hbar^2} V(r) \right) u_{k,l}(r) = 0. \quad (3.6)$$

Im kräftefreien Fall ($V(r) = 0$) sind die Lösungen $u_{k,l}^{(0)} = i^l (2l+1) r j_l(kr)$ dieser Differentialgleichung durch die sphärischen Bessel-Funktionen gegeben. Ausgehend von deren Verhalten für große r (siehe z.B. [45]) läßt sich die einlaufende Welle asymptotisch als

$$\psi_k^{(0)}(r, \theta) \sim \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \left[(-1)^{l+1} \frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{e^{ikr}}{r} \right] \quad (3.7)$$

darstellen. Dies entspricht einer paarweisen Überlagerung ein- und auslaufender Partialwellen mit einer relativen Phase von 0 oder π , je nach Parität von l .

Wie bereits erwähnt, gilt $V(r) = 0$ auch nach der Streuung für hinreichend große r . Die Streuung wird jedoch den auslaufenden Anteil von (3.7) verändern. Da aber die Teilchenzahl bei der elastischen Streuung erhalten ist, müssen der ein- und der auslaufende Fluß gleich sein. Aufgrund der Drehimpulserhaltung betrifft diese Forderung jedes einzelne Paar von Partialwellen, deren Amplituden folglich gleich sein müssen. Daher wird sich die Lösung des vollen Streuproblems asymptotisch von der des kräftefreien Falles allein durch Phasenverschiebungen $2\eta_l(k)$ der auslaufenden Partialwellen unterscheiden. Es gilt somit

$$\psi_k(r, \theta) \sim \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \left[(-1)^{l+1} \frac{e^{-ikr}}{r} + e^{2i\eta_l(k)} \frac{e^{ikr}}{r} \right]. \quad (3.8)$$

Andererseits sollte sich die Lösung des Streuproblems asymptotisch gemäß (3.2) auch als Summe der einlaufenden Welle (3.7) und einer mit der Streuamplitude multiplizierten Kugelwelle darstellen lassen. Durch Koeffizientenvergleich erhält man dann sofort

$$f(k, \theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(e^{2i\eta_l(k)} - 1 \right) P_l(\cos \theta). \quad (3.9)$$

Der differentielle und der totale Wirkungsquerschnitt berechnen sich somit aus den Streuphasen $\eta_l(k)$, zu deren Bestimmung die Radialgleichungen (3.6) mit den Randbedingungen (3.8) und $u_{k,l}(0) = 0$ gelöst werden müssen. An dieser Stelle wird häufig das sog. S-Matrixelement

$$S_l(k) = e^{2i\eta_l(k)} \quad (3.10)$$

eingeführt, aus dessen Betragsquadrat sich die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Eigenzuständen weit vor und weit nach der Streuung ergeben. Im vorliegenden Falle elastischer Stöße werden alle Quantenzahlen, die Energie und der Drehimpuls bei dem Streuprozess erhalten. Daher sind nur die Diagonalelemente der S-Matrix von Null verschieden und haben einen Betrag von Eins. Dementsprechend sind alle Streuphasen $\eta_l(k)$ reell. Dies ist für inelastische Stöße, wie sich in Kapitel 3.2 zeigt, nicht mehr der Fall. Aus den S-Matrixelementen ergeben sich dann die für das Experiment relevanten Ratenkonstanten für Teilchenverluste.

3.1.1 Identische Teilchen

Die bisherigen Überlegungen beziehen sich auf unterscheidbare Teilchen. Identische Teilchen hingegen lassen sich nach dem Stoß nicht mehr identifizieren, man kann daher nicht zwischen der Streuung um θ und um $\pi - \theta$ unterscheiden (siehe Abbildung 3.1 (a)). Für Bosonen muß der Zustand (3.2) symmetrisiert werden, und für den differentiellen Wirkungsquerschnitt ist

$$\frac{d\sigma(k, \theta)}{d\Omega} = |f(k, \theta) + f(k, \pi - \theta)|^2 \quad (3.11)$$

anzusetzen. Die Addition der beiden supplementären Streuamplituden führt dazu, daß Partialwellen mit ungerader Parität nicht zur Streuung beitragen, während sich der Effekt von Partialwellen gerader Parität verdoppelt. Ausgehend von (3.3), (3.11) und der

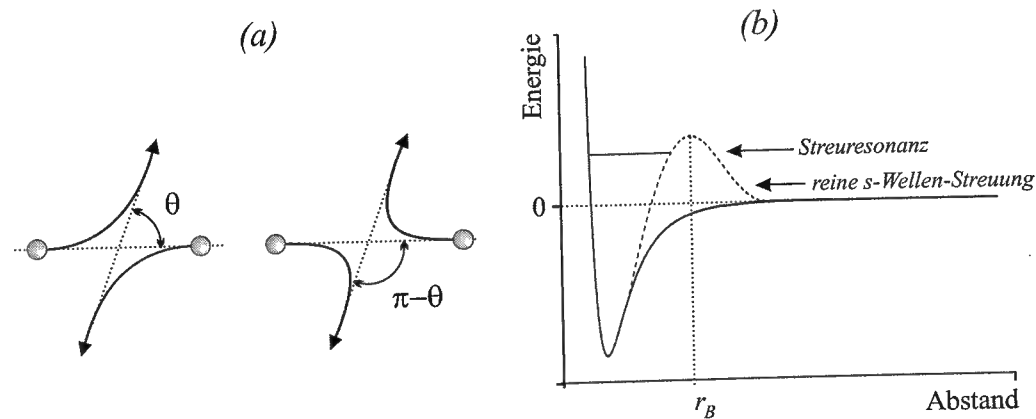


Abbildung 3.1: (a): Ununterscheidbare Situationen bei der Streuung identischer Teilchen. (b) Qualitatives Wechselwirkungspotential für s-Wellen-Streuung (durchgezogen) und höhere Partialwellen (gestrichelt). Für letztere gibt es Streuresonanzen, falls das Potential gebundene Zustände zulässt.

Orthogonalitätsrelation der Legendre-Polynome, erhält man schließlich für den totalen Wirkungsquerschnitt identischer Bosonen die Form

$$\sigma(k) = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l \text{ gerade}} (2l+1) |S_l(k) - 1|^2 = \frac{8\pi}{k^2} \sum_{l \text{ gerade}} (2l+1) \sin^2 \eta_l(k). \quad (3.12)$$

3.1.2 Grenzfall niedriger Energien: Die Streulänge

Die langreichweitige Wechselwirkung zwischen neutralen Atomen verschwindet schneller als $1/r^3$ (siehe Kapitel 3.2). Aufgrund dieser Tatsache führt der l -abhängige Term in Gleichung (3.6) für $l \geq 2$ bei $r_B(l)$ zu einer Zentrifugalbarriere im Wechselwirkungspotential, die das Streupotential $V(r)$ bei niedrigen Energien abschirmt (vgl. Abbildung 3.1 (b)). Für geringere Energien als

$$E_B = V(r_B) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_r r_B^2} \quad (3.13)$$

verschwindet somit nach und nach der Beitrag der l -ten Partialwelle zur Streuung. Formt man die Integralgleichung (3.4) für die Streuphasen um, läßt sich zeigen [43], daß der Wirkungsquerschnitt für die l -te Partialwelle im Falle kleiner k wie $\sigma_l(k) \propto k^{4l}$ verschwindet, falls die Streuphase $\eta_l(k)$ im Bereich $0 \leq E \leq E_B$ stets kleiner als $\pi/2$ bleibt. Ist letztere Bedingung nicht erfüllt, tritt bei $\eta_l(k) = \pi/2$ (modulo π) eine Streuresonanz auf. Dies ist an Gleichung (3.12) zu erkennen: Der Wirkungsquerschnitt der l -ten Partialwelle erreicht dann seinen maximalen Wert $8\pi(2l+1)/k^2$. Eine Streuresonanz tritt auf, wenn das Gesamtpotential einen quasi-gebundenen Zustand mit $E > 0$ zuläßt² (siehe Abbildung 3.1).

² Quasi-gebunden heißt der Zustand, weil er aufgrund von $E > 0$ und der endlichen Höhe der Potentialbarriere durch Tunneln zerfallen kann.

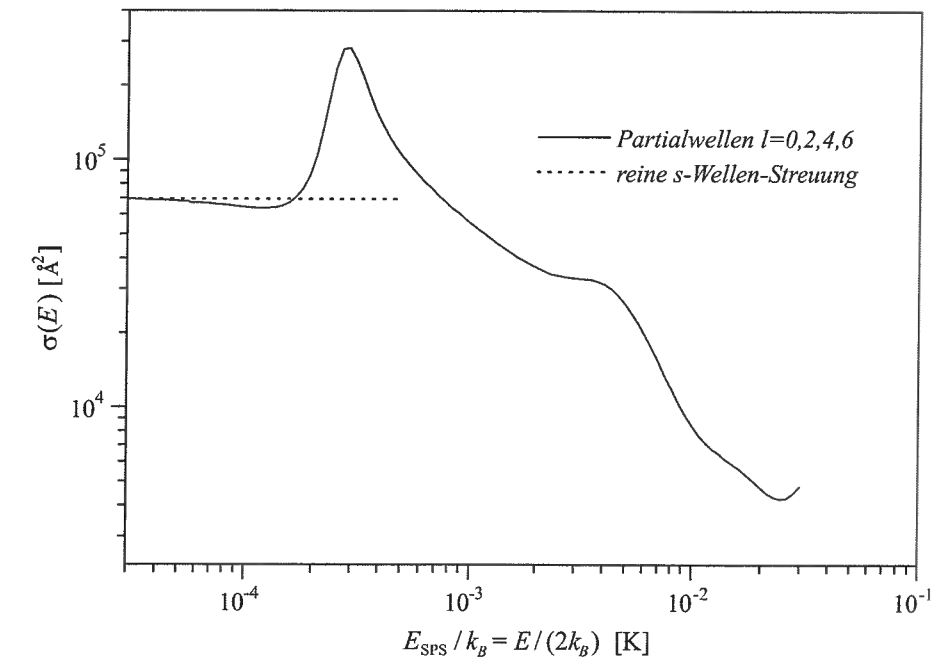


Abbildung 3.2: Totaler Wirkungsquerschnitt für Stöße zwischen maximal spinpolarisierten ^{87}Rb -Atomen, aufgetragen über der Energie im Schwerpunktsystem. Im Bereich der d-Wellen-Resonanz ist der Stoßquerschnitt etwa viermal größer als für reine s-Wellen-Streuung.

Ob es einen solchen Zustand gibt, hängt vom kurzreichweitigen Teil des Potentials $V(r)$ ab.

In Abbildung 3.2 ist der totale Wirkungsquerschnitt für homonukleare ^{87}Rb -Stöße im Grundzustand $|F=2, m_F=2\rangle$ über der Energie im Schwerpunktsystem aufgetragen. Es handelt sich dabei um ein numerisches Ergebnis [46], das auf spektroskopisch ermittelten Parametern [47] des exakten Potentials³ fußt und die Beiträge der Partialwellen $l=0,2,4$ und 6 berücksichtigt. In der Tat fällt eine ausgeprägte d-Wellen-Resonanz auf, die in dieser Arbeit noch eine wichtige Rolle spielen wird. Hier wird der Stoßquerschnitt maximal und etwa viermal größer als im Grenzwert verschwindender Energie, wo allein die s-Welle ($l=0$) zur Streuung beiträgt. Da es sich hierbei um eine Kugelwelle handelt ($P_l(\cos\theta) = 1$), wird die Streuung bei extrem niedrigen Energien zunehmend isotrop. Dies wird in Abbildung 3.3 deutlich, wo der relative, differentielle Wirkungsquerschnitt für verschiedene (extrem niedrige) Energien über dem Streuwinkel aufgetragen ist. Die Integration solcher Kurven über den Raumwinkel führt zu dem in Abbildung 3.2 dargestellten Stoßquerschnitt.

Dieser nimmt im Limes $E \rightarrow 0$ schließlich die Form

$$\sigma_s = 8\pi a^2 \quad \text{mit} \quad a = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \eta_0(k)}{k} = -\lim_{k \rightarrow 0} f(k) \quad (3.14)$$

an (in Abbildung 3.2 gestrichelt dargestellt). Die Größe a wird als Streulänge bezeichnet

³ Es handelt sich hierbei um das Triplett-Potential $a^3\Sigma_u^+$ für spinpolarisierte Atome.

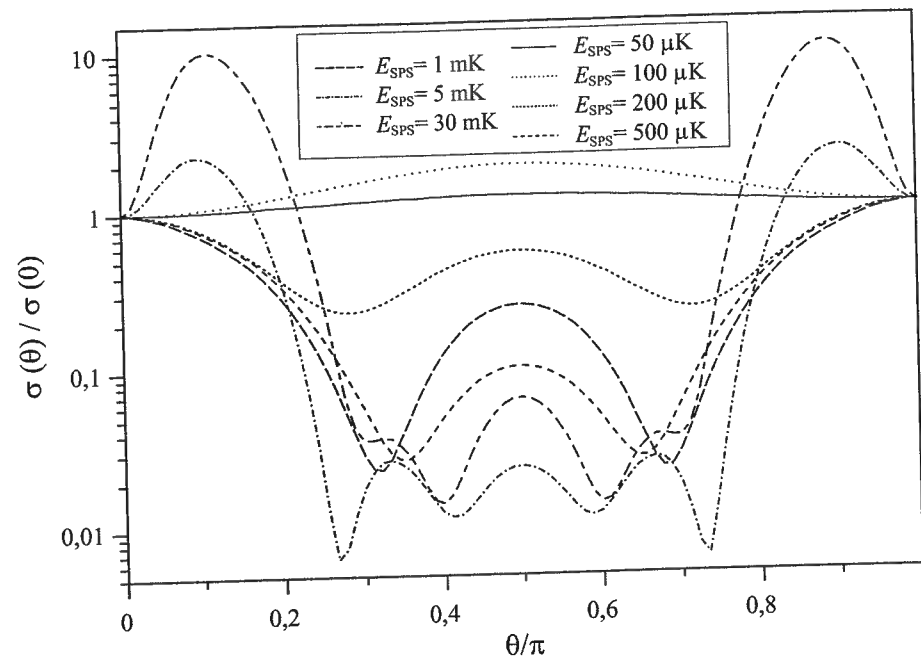


Abbildung 3.3: Differentialer Wirkungsquerschnitt für Stöße zwischen maximal spinpolarisierten ^{87}Rb -Atomen für verschiedene Energien. Im Limes $E \rightarrow 0$ wird die Streuung zunehmend isotrop.

und spielt bei der BEK gering wechselwirkender Gase eine zentrale Rolle. Eine wichtige Konsequenz dieser Asymptotik ist die Tatsache, daß extrem kalte Fermionen nicht stoßen, da für sie s-Wellen-Streuung aus Symmetriegründen verboten ist. Dieser Umstand verhindert den Einsatz der Verdampfungskühlung als letzten Schritt bei der Erzeugung eines entarteten Fermigas [48]. Da für die Verdampfungskühlung ein hoher Stoßquerschnitt vorteilhaft ist, ist man im Experiment mit Bosonen an einer großen Streulänge interessiert. Sie bestimmt die Rate

$$\gamma_{\text{el}} = n\sigma_s \bar{v}, \quad (3.15)$$

mit der ultrakalten Atome bei einer mittleren thermischen Relativgeschwindigkeit $\bar{v}$ in einem Gas der Dichte n elastisch stoßen, und somit seine Thermalisierungsrate.

Zunächst gilt jedoch festzuhalten, daß die Streuung bei niedrigen Energien offensichtlich unabhängig von den Details von $V(r)$ ist. Das bedeutet insbesondere, daß in diesem Fall das exakte Wechselwirkungspotential, in den meisten Fällen nur unzureichend bekannt, durch ein beliebiges Potential ersetzt werden kann, vorausgesetzt, daß letzteres zur gleichen Streulänge führt. Da sich die Streulänge experimentell bestimmen läßt, ist dies von großem praktischen Nutzen, wie sich in Kapitel 4 zeigen wird.

Die physikalische Bedeutung der Streulänge läßt sich anhand der asymptotischen Darstellung (3.2) der Wellenfunktion erkennen: Wegen (3.14) gilt $\psi_k(r) \rightarrow 1 - a/r$, und der Radialteil der Wellenfunktion nimmt asymptotisch die Form $u_{0,0}(r) = r - a$ einer Geraden an, entsprechend einer Sinus-Welle mit unendlicher Wellenlänge. Die Streulänge gibt daher die Nullstelle der asymptotischen Wellenfunktion im Limes $k \rightarrow 0$ an. Das Potential

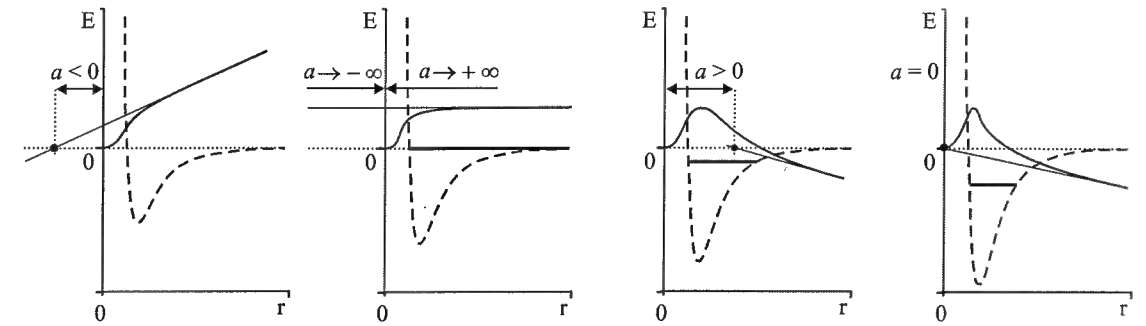


Abbildung 3.4: Zustandekommen einer positiven Streulänge für ein attraktives Potential. Fällt ein gebundener Zustand mit der Kontinuumsgrenze zusammen, liegt für $E \rightarrow 0$ eine Streuresonanz vor.

verursacht also eine Verschiebung der Wellenfunktion um a in radialer Richtung. Da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Wirkungsbereich eines repulsiven Potentials reduziert ist, entspricht einem solchen Potential stets eine positive Streulänge. Der Umkehrschluß, daß nämlich die Streulänge eines attraktiven Potentials negativ ist, stimmt lediglich, falls seine Tiefe so gering ist, daß es keine gebundenen Zustände im Potential gibt. Dies ist in Abbildung 3.4 veranschaulicht. Nimmt die Stärke der Wechselwirkung zu, nähert sich die Streuphase dem Wert $\pi/2$ und die Streulänge divergiert gegen $-\infty$ (vgl. (3.14)). Eine solche Streuresonanz liegt vor, wenn im Potential gerade ein neuer gebundener Zustand mit $E = 0$ auftaucht⁴. In der Umgebung der Resonanz springt die Streulänge von $-\infty$ nach $+\infty$. Mit zunehmender Tiefe des Potentials ändert sich der Wert von a dann stetig zwischen $+\infty$ und $-\infty$, bis sich der nächste gebundene Zustand ausprägt. In der Regel weisen interatomare Wechselwirkungspotentiale eine ganze Fülle solcher Zustände auf, und mit jedem kommt eine weitere Nullstelle der Wellenfunktion im Wirkungsbereich des Potentials hinzu. Als Faustregel läßt sich jedoch aus den obigen Ausführungen ableiten: Findet der höchste gebundene Zustand gerade noch im Potential Platz, ist die Streulänge positiv. Ein negatives Vorzeichen liegt hingegen vor, wenn ein nur geringfügig tieferes Potential einen weiteren gebundenen Zustand zuließe⁵.

Die bemerkenswerte Folge davon, daß die Streulänge des attraktiven Wechselwirkungspotentials $V(r)$ zwischen den Atomen eines Kondensats auch positiv sein kann, ist die Tatsache, daß sich die Atome in diesem Fall trotzdem effektiv abstoßen. Diesem Umstand ist die Stabilität von Kondensaten hoher Teilchenzahl zu verdanken, wie in Kapitel 4 deutlich wird. Zusammenfassend läßt sich an dieser Stelle sagen, daß sich für die BEK offensichtlich Atome mit großer, positiver Streulänge am besten eignen.

Für die Einbeziehung der Wechselwirkung in die Theorie der BEK wird von entscheidender Bedeutung sein, ob sich Stöße in dem Gas, wie hier geschehen, als Zwei-Körper-Prozesse beschreiben lassen oder ob mehrere Teilchen an einem Stoß beteiligt sind. Der Gasparameter na^3 ist in diesem Zusammenhang die relevante Größe. Er gibt an, wie viele

⁴ Eine quantitative Argumentation hierzu findet sich z.B. in [43].

⁵ In der Tat gibt es einen quantitativen Zusammenhang zwischen der Lage des höchsten gebundenen Zustands eines Potentials und dessen Streulänge [49].

Teilchen sich im Mittel im effektiven Streuvolumen a^3 befinden. Die Beschränkung auf Zwei-Teilchen-Stöße ist sinnvoll, solange

$$na^3 \ll 1 \quad (3.16)$$

gewährleistet ist. Es zeigt sich, daß diese Voraussetzung in typischen BEK-Experimenten mit $na^3 \simeq 10^{-4}$ sehr gut erfüllt ist. In diesem Falle spricht man von einem verdünnten Gas.

3.2 Inelastische Zwei-Körper-Stöße: Spinrelaxation

Die in dieser Arbeit beschriebenen Experimente wurden mit dem (nahezu) stabilen Rubidiumisotop ^{87}Rb durchgeführt⁶, auf das sich die folgende Diskussion daher beschränkt. Es handelt sich um ein Alkaliatom mit dem Grundzustand $5s^2S_{1/2}$ und einem Kernspin von $i = 3/2$. Dies führt zu den beiden Hyperfeingrundzuständen $f = 1$ und $f = 2$. Daher ist ^{87}Rb ein Boson. In der folgenden Diskussion werden aus Gründen der Übersichtlichkeit atomare Quantenzahlen mit kleinen, molekulare mit großen Buchstaben bezeichnet. Im späteren Verlauf dieser Arbeit wird jedoch zur üblichen Großbuchstabennotation atomarer Quantenzahlen zurückgekehrt.

3.2.1 Das Streupotential

Um Stöße zwischen zwei Rubidiumatomen vollständig zu beschreiben, müßte man prinzipiell die Wechselwirkung von insgesamt 74 Elektronen und zwei Kernen berücksichtigen, ein hoffnungsloses Unterfangen. Es zeigt sich jedoch, daß insbesondere im vorliegenden Falle niedriger Stoßenergien der wichtigste Teil des Streuprozesses auf eine Region konzentriert ist, in der die beteiligten Atome bei einem Abstand von etwa $20a_0$ noch verhältnismäßig gut separiert sind⁷. Daher kann die Wechselwirkung in der Born-Oppenheimer-Näherung [50] behandelt werden, in der vorausgesetzt wird, daß die viel leichteren Elektronen der Kernbewegung unmittelbar folgen können. Zusätzlich kann man in guter Näherung davon ausgehen, daß alle Spins an den Orten der Kerne lokalisiert sind (Shizgal-Näherung, [51]). Das Ergebnis ist ein Wechselwirkungspotential, das allein vom Abstand der Atome und ihren Spin-Quantenzahlen abhängt. Unter Vernachlässigung kleiner Korrekturen zerfällt es in eine Summe von fünf Termen [52, 53, 49]:

$$V = V_C + V_{\text{HF}} + V_Z + V_{\text{SS}} + V_{\text{SB}}. \quad (3.17)$$

V_C beschreibt die Coulomb-Wechselwirkungen der Elektronen und Kerne und hat die Form eines Zentralpotentials. Bei kleinen interatomaren Abständen, wo die beiden Elektronenwolken stark überlappen, kommt es durch die sehr starke, repulsive Austauschwechselwirkung aller Elektronen zustande. Mit wachsendem Abstand bleibt hiervon lediglich der

⁶ Tatsächlich zerfällt ^{87}Rb als β^- -Strahler mit einer Halbwertszeit von 48,8 Milliarden Jahren in ^{87}Sr .

⁷ Der Bohrsche Radius a_0 beträgt $0,529 \cdot 10^{-10}$ m.

Beitrag der beiden Leuchtelektronen übrig, der von ihrer relativen Spinstellung abhängt. Er führt zu der Aufspaltung in die Singulett- und Triplett-Molekülpotentiale $X^1\Sigma_g^+$ und $a^3\Sigma_u^+$, die in Abbildung 3.5 dargestellt sind und dem molekularen Elektronenspin $S = 0$ und $S = 1$ entsprechen. Das Triplettpotential ist stets weniger tief als das Singulettpotential. Im Falle von Rb betragen die Potentialtiefen ca. $k_B \times 320$ K und $k_B \times 5800$ K und weisen 41 bzw. 125 Vibrationszustände auf [54]. Für große Abstände nimmt die Austauschwechselwirkung exponentiell ab und läßt sich auf die asymptotische Form

$$V_A(r, S) = (-1)^{S+1} A r^{7/2\alpha-1} e^{-2\alpha r/a_0} \quad (3.18)$$

bringen, in der die Parameter A und α allein von der Atomsorte abhängen [55]. Ihr überlagert ist in diesem Bereich die attraktive Dispersionswechselwirkung (oder van der Waals-Wechselwirkung). Sie kommt durch Fluktuationen der atomaren Ladungsverteilungen zustande. Die dabei entstehenden elektrischen Multipolmomente induzieren die Polarisierung des Nachbaratoms, wodurch es zu einer Multipol-Wechselwirkung zwischen den Atomen kommt. Für zwei Atome im Grundzustand führt dies unter Berücksichtigung der ersten drei Terme der Multipolentwicklung (entsprechend der Dipol-Dipol-, Dipol-Quadrupol- und Quadrupol-Quadrupol-Wechselwirkungen) auf den Beitrag

$$V_D(r) = -\frac{C_6}{r^6} - \frac{C_8}{r^8} - \frac{C_{10}}{r^{10}} \quad (3.19)$$

zum Zentralpotential⁸. Die Dispersionskoeffizienten C_6 , C_8 und C_{10} der meisten Alkaliatome sind aus Theorie und Experiment mit hoher Genauigkeit bekannt [56, 30].

Triplett- und Singulettpotential erhalten somit für große r die Form $V_C(r, S) = V_D(r) + V_A(r, S)$. Da inelastische Stöße entlang beider Potentiale stattfinden können, wird das Zentralpotential in der Regel mit Hilfe der Singulett- und Triplettprojektionsoperatoren $\hat{P}_0$ und $\hat{P}_1$ als Superposition dargestellt:

$$V_C(r, S) = \hat{P}_0 V_C(r, 0) + \hat{P}_1 V_C(r, 1). \quad (3.20)$$

Nun muß einer möglichen Änderung der inneren Energie der Atome Rechnung getragen werden. Dies geschieht zunächst durch die Berücksichtigung der Hyperfeinenergie

$$V_{\text{HF}} = \sum_{j=1}^2 \frac{a_{\text{HF}}}{\hbar^2} \vec{I}_j \cdot \vec{S}_j \quad (3.21)$$

der einzelnen Atome in (3.17). Sie kommt durch die sog. Fermi-Kontaktwechselwirkung zwischen dem Leuchtelektron mit dem Spin $\vec{s}$ und dem Kern zustande, die auf dem nicht-verschwindenden Überlapp von deren Wellenfunktionen beruht. Sie ist die Ursache für die Hyperfeinaufspaltung von $\Delta E_{\text{HF}}/\hbar = 6,8$ GHz zwischen den Hyperfeinzuständen $f = i + s = 2$ und $f = i - s = 1$ (siehe Abbildung 3.6). Auf diese Energie läßt sich die Kopplungskonstante $a_{\text{HF}} = \Delta E_{\text{HF}}/2$ zurückführen [57, 49]. Die Hyperfeinwechselwirkung zwischen den Atomen kann hingegen vernachlässigt werden. Dadurch hängt V_{HF} nicht explizit vom Ort ab.

⁸ Die Retardierung führt bei sehr großen Abständen zu einem schnelleren Abklingen von $V_D(r)$. Auf hier relevanten Längenskalen kann dieser Effekt jedoch vernachlässigt werden.

Experimente zur BEK finden meist an magnetisch gespeicherten Atomen statt. In diesem Fall führt der Zeeman-Effekt zur Aufhebung der Projektionsentartung der Drehimpulse. Daher muß die Lageenergie im Magnetfeld $\vec{B}$ in die Analyse eingeschlossen werden. Mit dem Kernmoment $\vec{\mu}_N$ und dem magnetischen Moment $\vec{\mu}_e$ des Elektrons erhält sie die Form

$$V_Z = \sum_{j=1}^2 (\vec{\mu}_{e,j} + \vec{\mu}_{N,j}) \cdot \vec{B}. \quad (3.22)$$

Der vorletzte Term in Gleichung (3.17) beschreibt die Spin-Spin-Dipolwechselwirkung der beiden Leuchtelektronen:

$$V_{SS}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{\mu}_{e,1} \cdot \vec{\mu}_{e,2} - 3(\vec{r} \cdot \vec{\mu}_{e,1})(\vec{r} \cdot \vec{\mu}_{e,2})/r^2}{r^3} \right). \quad (3.23)$$

Für eine parallele Spinstellung der beiden Elektronen, die im Molekül zu $S = 1$ führt, hängt demnach die Wechselwirkungsenergie von der Projektion von $\vec{S}$ auf die Verbindungsachse der Atome ab. Der Effekt von V_{SS} besteht somit in der Aufhebung der Projektionsentartung des Triplettpotentials. Die Dipolwechselwirkung stellt gegenüber den bisher diskutierten Termen eine geringe Korrektur dar, kann aber, wie sich im folgenden zeigen wird, entscheidende Bedeutung erlangen. Dies liegt daran, daß es sich bei V_{SS} offensichtlich nicht um ein Zentralpotential handelt und somit bei einem Stoß der relative Bahndrehimpuls der Atome keine Erhaltungsgröße mehr ist.

Die gleiche Auswirkung hat auch der letzte Term im Streupotential (3.17). Er kommt durch die Beimischung angeregter Molekülzustände zu den Triplettzuständen zustande, sobald die Elektronenwolken der beiden Atome einen signifikanten Überlapp haben [52]. Diese Beimischung führt zu einer Spin-Bahn-Kopplung in zweiter Ordnung und beeinflusst daher die Dipolwechselwirkung der beiden Leuchtelektronen (Für Alkaliatome verschwindet wegen $l = 0$ die Spin-Bahn-Kopplung in erster Ordnung.). Das resultierende Potential $V_{SB}(\vec{r})$ hat die gleiche Spinstruktur wie $V_{SS}(\vec{r})$, fällt jedoch exponentiell mit r ab, da es wie die Austauschwechselwirkung vom Überlapp der Elektronenwolken abhängt. Es spielt nur bei schweren Atomen eine Rolle. Der wichtigste Unterschied zwischen den beiden Termen besteht jedoch in ihrem unterschiedlichen Vorzeichen. Dadurch können sich ihre Auswirkungen zumindest teilweise aufheben.

Aufgrund der komplexen Struktur des Streuproblems, hängen die Ergebnisse der Streutheorie äußerst empfindlich von dem Potential (3.17) ab. In der Praxis wird die erforderliche Genauigkeit bei der Bestimmung der Streupotentiale durch eine Kombination spektroskopischer und numerischer Methoden erreicht. In der Regel wird zunächst mit Hilfe der Molekülspektroskopie [58, 59], der einfachen [60] und der Zwei-Farben-Photoassoziationsspektroskopie [61] die Lage der Vibrations- und Rotationszustände des Moleküls bestimmt. Anschließend werden die Parameter der Potentiale numerisch an die Daten angepaßt.

3.2.2 Spinaustausch

Wie schon der Name suggeriert, ist für Spinaustausch-Stöße die Austauschwechselwirkung verantwortlich. Im folgenden werden daher vorerst die beiden Dipolterme V_{SS} und V_{SB} vernachlässigt. Außerdem soll zunächst kein Magnetfeld vorliegen und somit V_Z ebenfalls keine Rolle spielen.

Kommen sich zwei Atome während eines Stoßes näher, erreichen die langreichweitige Austauschwechselwirkung (3.18) und die Hyperfeinwechselwirkung (3.21) vergleichbare Stärke. Bei homonuklearen ^{87}Rb -Stößen ist diese Situation für Abstände $18a_0 \leq r \leq 26a_0$ gegeben [52, 53]. In diesem Bereich ändert sich die Spinkopplung der beiden Atome von einer atomaren zu einer molekularen Charakteristik. Dies wird in Abbildung 3.5 deutlich: Bei größeren Abständen koppeln der Elektronenspin $s = 1/2$ und der Kernspin $i = 3/2$ eines Atoms zu $f = 1, 2$. Für den Gesamtspin des Systems ergeben sich dann die Möglichkeiten $F = |f_1 - f_2|, \dots, (f_1 + f_2)$, je nachdem, in welchen f -Zuständen die Atome vorliegen. Demgegenüber ist f bei kleinen Abständen keine gute Quantenzahl mehr. Hier koppeln jeweils die Elektronen und die Kerne zu $S = s_1 \pm s_2 = 0, 1$ (entsprechend dem Singulett- und dem Triplettpotential) und $I = 0, \dots, 3$. Für eine Kombination (S, I) setzt sich der Gesamtspin schließlich zu $F = |I - S|, \dots, (S + I)$ zusammen. Dies geschieht jedoch mit einer Einschränkung: In einem BEK-Experiment hat man es mit Bosonen zu tun. Da die Gesamtwellenfunktion bezüglich der Vertauschung der Atome symmetrisch sein muß und ihre Parität durch $(-1)^{S+1}(-1)^{I+1}$ gegeben ist, muß die Summe $I + S$ eine gerade Zahl ergeben⁹.

Das Zentralpotential erhält die relativen Drehimpulsquantenzahlen L und M_L des Stoßpaares. Unabhängig von der Art der interatomaren Wechselwirkung ist auch die Projektion M_J des Gesamtdrehimpulses $\vec{J} = \vec{L} + \vec{F}$ auf die Magnetfeldachse erhalten, da jede Drehung um diese Achse eine Symmetrioperation darstellt. In Abwesenheit von Magnetfeldern sind schließlich sogar $\vec{J}$ und $\vec{F}$ Erhaltungsgrößen. Bei einem Stoß koppeln dann alle Potentiale mit gleicher Quantenzahl F (man spricht hier von Kanälen). Wie in Abbildung 3.5 deutlich wird, betrifft dies die Werte $F = 0$ (zwei Kanäle) und $F = 2$ (drei Kanäle). In beiden Fällen liegt eine Kopplung zwischen Triplett- und Singulettpotential vor.

Einen Spinaustauschprozeß kann man sich nun anschaulich vorstellen, wenn man vereinfachend annimmt, daß die Kopplung an einem scharf definierten Ort stattfindet [49]: Hier wird die Amplitude der einlaufenden Wellenfunktion durch Projektion auf die Singulett- und Triplettkanäle aufgeteilt. Die Teilamplituden propagieren anschließend unabhängig voneinander, werden an der steilen Austauschbarriere reflektiert und rekombinieren schließlich wieder durch Projektion am Ort der Kopplung. Dabei sammeln sie jeweils eine Phase auf, die im wesentlichen durch die Streulängen a_T und a_S der implizierten Potentiale gegeben ist (vgl. Kapitel 3.1). Da die beiden Streulängen in der Regel verschieden sind, wird die ursprüngliche Wellenfunktion nicht reproduziert, was bedeutet, daß die Atome nach dem Stoß mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in anderen als den ursprünglichen

⁹ Analoges gilt nicht für die Summe $f_1 + f_2$, da sich die Zwei-Teilchen-Wellenfunktion in jedem Falle symmetrisieren läßt. Für $f_1 = f_2$ muß F jedoch aus Symmetriegründen gerade sein.

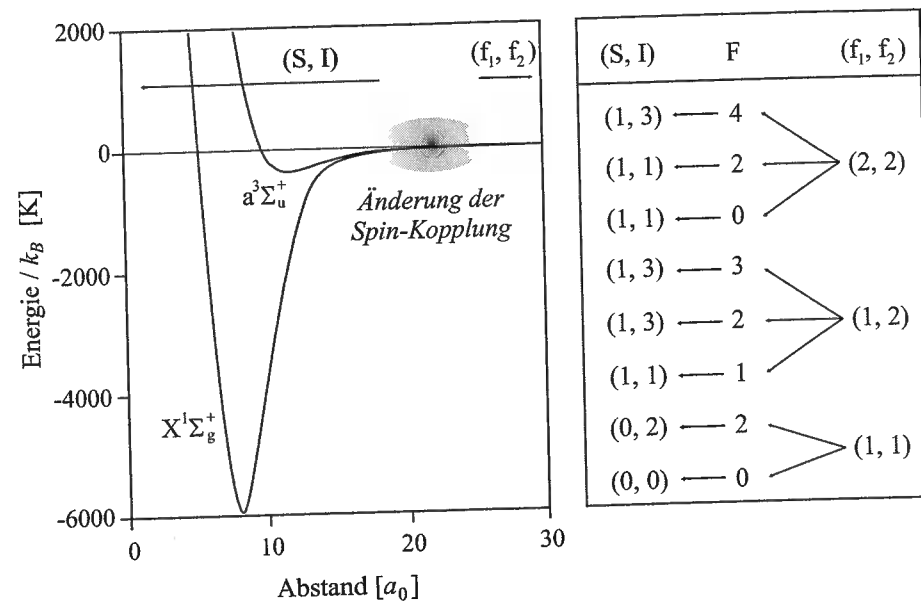


Abbildung 3.5: Links: Singulett- und Triplettpotentiale für ^{87}Rb -Stöße. Die Änderung der Spinkopplung führt in der markierten Region zu Spinaustausch. Rechts: Für $B = 0$ ist F auf allen Skalen eine gute Quantenzahl, die sich jedoch aus molekularen Spins (S, I) oder atomaren Spins (f_1, f_2) zusammensetzt. Spinaustausch ist möglich, da mehrere Potentiale zu gleichen Werten von F führen.

Hyperfeinzuständen vorliegen. Die Situation ist also völlig analog zu einem optischen Mach-Zehnder-Interferometer, in dem die Intensität in den beiden Ausgängen von dem Unterschied der optischen Weglängen in den beiden Interferometerarmen abhängt.

Bei einem exothermen Stoß wird Hyperfeinenergie in kinetische Energie umgewandelt. Der umgekehrte Prozeß ist prinzipiell auch möglich, allerdings muß dann die kinetische Energie der Relativbewegung vor dem Stoß größer als die Hyperfeinaufspaltung sein, was in einem BEK-Experiment meistens nicht der Fall ist. Kanäle, die wie $F = 1, 3, 4$ in Abbildung 3.5 nicht gekoppelt sind, oder solche, deren Kopplung aus den obigen (energetischen) Gründen keine Rolle spielt, werden als geschlossen bezeichnet. Letzteres trifft für $F = 0, 2$ zu, allerdings nur in Verbindung mit dem Eingangskanal $(f_1, f_2) = (1, 1)$. Daher ist ein Gas, dessen Atome sich alle im Zustand $f = 1$ befinden, bei niedrigen Temperaturen und $B = 0$ gegen Spinaustausch stabil. Gleiches gilt nicht für den Eingangskanal $(2, 2)$, da nicht alle F -Kanäle, die asymptotisch mit ihm verbunden sind, geschlossen sind.

Der prominenten Rolle von ^{87}Rb in der BEK verdünnter Gase ist es zu verdanken, daß seine Streulängen mit einer Genauigkeit von wenigen Bohrschen Radien bekannt sind [54]:

$$a_T = 99 a_0 \quad \text{und} \quad a_S = 90 a_0. \quad (3.24)$$

Die Ähnlichkeit dieser Werte führt dazu, daß Spinaustausch zwischen Rb-Atomen mit einer verhältnismäßig geringen Wahrscheinlichkeit stattfindet, da die Wellenfunktionen in den beiden Potentialen vergleichbare Phasen auf sammeln und somit im wesentlichen zum Eingangszustand rekombinieren [62, 63].

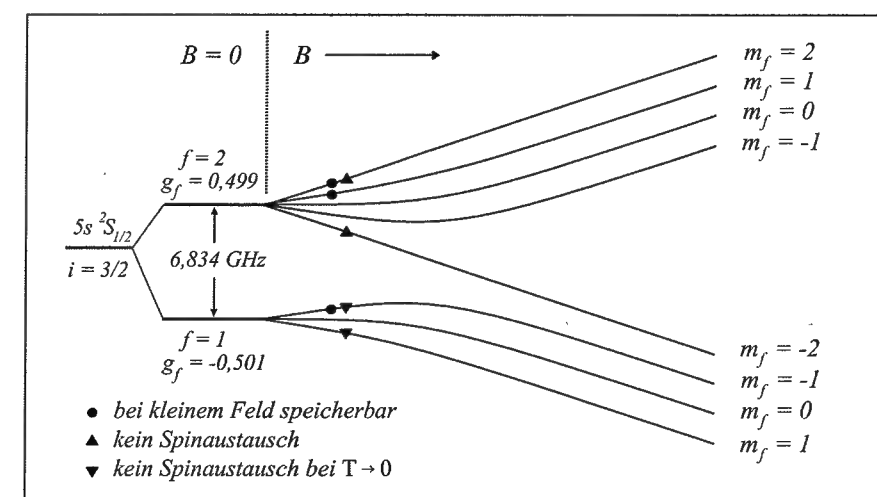


Abbildung 3.6: Hyperfeindigramm von ^{87}Rb und Aufhebung der Entartung im Magnetfeld. Markiert sind Zustände, die sich mit kleinen Magnetfeldern speichern lassen, und solche, die gegen Spinaustausch stabil sind.

In der Anwesenheit eines Magnetfeldes muß V_Z berücksichtigt werden, und die Projektionsentartung der Spins wird aufgehoben. Als Quantisierungsachse eignet sich nicht mehr die Verbindungsachse der Atome sondern die Magnetfeldrichtung. Abbildung 3.6 zeigt den Effekt eines Magnetfeldes auf die Hyperfeinstruktur des ^{87}Rb -Atoms. Bei kleinen Feldern ($B \ll (2a_{\text{HF}}m_e)/(\hbar) \sim 0,24 \text{ T}$) bleibt die Hyperfeinkopplung zwischen s und i erhalten und damit auch f eine gute Quantenzahl. Bei hohen Feldern koppeln s und i für sich an das äußere Feld und f verliert seine Bedeutung. Demgegenüber ist F bereits für kleine Felder – und damit auch unter typischen experimentellen Bedingungen – nicht mehr bei allen Abständen eine gute Quantenzahl. Allein der relative Bahndrehimpuls L , dessen Projektion M_L und die Projektion M_F des Gesamtspins bleiben jetzt auf allen Skalen erhalten. Dadurch koppeln bei einem Stoß nun wesentlich mehr Kanäle, nämlich alle, die zu gleichen Werten von M_F führen.

Die Anwesenheit eines Magnetfeldes bietet andererseits den Vorteil, daß alle Atome des Gases in ein und denselben Quantenzustand $|f, m_f\rangle$ präpariert werden können und somit jedes Atom zur Phasenraumdichte beiträgt. Insbesondere betrifft dies den Zustand $|2, 2\rangle$, der sich in einem Magnetfeldminimum speichern läßt und zudem das höchste magnetische Moment aufweist (vgl. Kapitel 5.5). Für zwei Atome, die in diesem doppelt oder maximal polarisierten Zustand stoßen, ist $M_F = 4$ eine Erhaltungsgröße. Da sie sich nur mit $f_1 = f_2 = 2$ realisieren läßt, kann der Stoß nur entlang eines einzigen, geschlossenen (Triplett-)Kanals erfolgen, und Spinaustausch findet nicht statt. Gleiches gilt für zwei Atome, die den Stoß jeweils im Zustand $|2, -2\rangle$ angehen. Wenn bei tiefen Temperaturen die kinetische Energie der Relativbewegung unter jene der Hyperfeinaufspaltung sinkt, sind auch die sogenannten gestreckten Zustände $|1, -1\rangle$ und $|1, 1\rangle$ gegen Spinaustausch zwischen identischen Atomen stabil, da alle weiteren Kanäle mit $M_F = -2$ oder $M_F = 2$ bei mindestens einem der Atome den Spin $f = 2$ ins Spiel bringen, der jedoch energetisch nicht zugänglich ist. Magnetisch speicherbare und stabile Zustände sind in Abbildung 3.6 gekennzeichnet.

3.2.3 Dipolare Relaxation

Mit Ausnahme der Stöße zwischen Atomen in jeweils maximal polarisierten oder gestreckten Zuständen führen alle anderen Stöße zu Spinaustausch, der dann den Löwenanteil an der inelastischen Zwei-Körper-Stoßrate stellt. Sind Übergänge mit $\Delta M_F = 0$ prinzipiell oder energetisch nicht möglich, können inelastische Stöße nur durch die beiden Dipolterme V_{SS} und V_{SB} induziert werden. Solche Prozesse, die zur Umwandlung von Spindrehimpuls in Bahndrehimpuls führen, werden als dipolare Relaxation bezeichnet.

Wie bereits erwähnt, heben die Dipolterme die Erhaltung des relativen Bahndrehimpulses L der Atome auf, da es sich nicht um Zentralpotentiale handelt. Die Projektion $M_J = M_L + M_F$ des Gesamtdrehimpulses J des Systems auf die Magnetfeldrichtung bleibt jedoch erhalten (s.o.), und bei einem Stoß gilt somit $\Delta(M_L + M_F) = 0$. Dadurch koppeln nun noch mehr Kanäle als im Falle des oben diskutierten Spinaustauschs. Aufgrund des bosonischen Charakters von Rb sind jedoch nur Übergänge zwischen geraden Werten von L möglich. An den sphärischen Tensordarstellungen von V_{SS} und V_{SB} (als Tensoren zweiten Ranges) läßt sich zudem erkennen, daß nur die Fälle $\Delta L = 0, \pm 2$ erlaubt sind [64].

In einem extrem kalten Gas gilt für den Eingangskanal $L = 0$ (s-Wellen-Streuung). In diesem Fall führt dipolare Relaxation stets zu einer d-Welle im Ausgangskanal, und für die Spinprojektion gilt $\Delta M_F = 0, \pm 1, \pm 2 = -\Delta M_L$. Deswegen ist zu beachten, daß die Atome nun die $L = 2$ Potentialbarriere (3.13) in dem Ausgangskanal überwinden müssen. Da die kinetische Energie bereits vor dem Stoß dazu nicht ausgereicht hat, sind endotherme Stöße stark unterdrückt: Die Atome sind innerhalb des Zentrifugalpotentials gefangen und oszillieren dort so lange, bis sich durch die Kopplung an den Eingangskanal (elastische Streuung) oder an exotherme Kanäle eine Möglichkeit ergibt, das Potential zu verlassen. Befinden sich beide Atome vor dem Stoß im Zustand $f = 1$, steht bei exothermen Stößen höchstens die Energie der Zeeman-Aufspaltung zur Verfügung. Zusammen mit der kinetischen Energie vor dem Stoß muß sie zur Überwindung der Barriere ausreichen. Daher wird die Wahrscheinlichkeit für dipolare Relaxation in einem Rb-Gas, dessen Atome sich im Zustand $f = 1$ befinden, von der Temperatur und vom Magnetfeld abhängen und für $T \rightarrow 0$ und $B \rightarrow 0$ verschwinden. Anders, wenn mindestens eines der Atome den Stoß im höheren der beiden Hyperfeinzustände angeht. Dann wird es nämlich stets einen dipolaren Relaxationsprozeß geben, bei dem die Hyperfeinenergie freigesetzt wird. Diese wird dann mit Sicherheit zur Überwindung der Barriere ausreichen. Deswegen wird dipolare Relaxation in diesem Fall nur gering von T und B abhängen.

3.2.4 Feshbach-Resonanzen

Die Kopplung zwischen Streukanälen kann unter Umständen auch von großem Nutzen sein, da sie die Möglichkeit birgt, den elastischen Stoßquerschnitt für Atome bestimmter Spinzustände bei vorgegebener Stoßenergie einer kontrollierten Manipulation zu unterziehen. Auf diesen Zusammenhang haben 1992 Tiesinga et al. zum erstenmal hingewiesen [65, 64]. Voraussetzung für den Mechanismus ist die Kopplung des Eingangskanals an

einen energetisch geschlossenen Kanal. Eine solche Situation ergibt sich beispielsweise für Stöße zwischen ^{87}Rb -Atomen im (in Dipolfallen speicherbaren) Zustand $|1, 1\rangle$ (Eingangskanal I). Unter Erhaltung von $M_F = 2$ liegt offensichtlich eine Kopplung mit den Kanälen vor, die asymptotisch zu den Konfigurationen $O_1 := |2, 1\rangle + |2, 1\rangle$, $O_2 := |2, 0\rangle + |2, 2\rangle$, $O_3 := |1, 1\rangle + |2, 1\rangle$ und $O_4 := |1, 0\rangle + |2, 2\rangle$ führen. Alle vier Kanäle sind endotherm und daher für $T \ll 2a_{\text{HF}}/k_B$ geschlossen. Bei $B = 0$ betragen die Differenzen zwischen den Dissoziationsenergien der Ein- und Ausgangskanäle $\delta_{I,O_1} = \delta_{I,O_2} = 4a_{\text{HF}}$ und $\delta_{I,O_3} = \delta_{I,O_4} = 2a_{\text{HF}}$. Im Magnetfeld ist zusätzlich die differentielle Zeeman-Verschiebung der Spinzustände zu berücksichtigen. Wie in Abbildung 3.6 zu erkennen ist, besitzen alle O_i ein gegenüber I positives magnetisches Moment¹⁰. Mit Hilfe eines äußeren Magnetfeldes lassen sich somit die Born-Oppenheimer-Potentiale, die asymptotisch mit den Kanälen O_i verbunden sind, einschließlich ihrer gebundenen Zustände bezüglich des zu I gehörigen Potentials verschieben. Dadurch kann man die Energie der höchsten gebundenen Zustände von O_i und die kinetische Energie des Stoßpaares, die im wesentlichen der Dissoziationsgrenze des Eingangskanals entspricht, zur Übereinstimmung bringen. In diesem Fall kommt es bei dem Streuprozeß zu einer temporären Ausprägung des gebundenen Zustands. Da dieser nur durch die Kopplung an den Eingangskanal zerfallen kann, entspricht dies einer elastischen Streuresonanz. In ihrer Umgebung variiert die Streulänge dispersiv und erreicht theoretisch jeden beliebigen Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ [66]. Auf diese Weise läßt sich somit die effektive Wechselwirkung zwischen Atomen nach Belieben einstellen. Im Kontext der BEK bieten Feshbach-Resonanzen ein beachtliches Anwendungspotential, wie sich bereits in den ersten experimentellen Arbeiten auf diesem Gebiet abzeichnet [28, 29, 31, 20]. Es gibt Vorhersagen, daß sich der gleiche Effekt auch mit Hilfe von elektrischen, Radiofrequenz- oder Lichtfeldern erreichen läßt [67, 68, 69].

3.2.5 Ratenbestimmung

Die physikalisch relevanten Größen des Streuprozesesses sind die Ratenkonstanten für elastische und inelastische Stöße zwischen Atomen mit bestimmten Spin- und Bahndrehimpulsquantenzahlen. Der formale und numerische Apparat zu deren Bestimmung ist der akribischen Arbeit der Theoriegruppen am NIST (Gaithersburg, Md), an der Universität Eindhoven und am JILA (Boulder, Co) zu verdanken. Eine Beschreibung der Methoden findet sich in den Referenzen [70, 53, 71], an denen sich die folgende Zusammenfassung orientiert.

Jede Konfiguration des Zwei-Atom-Zustandes ist asymptotisch durch Angabe der Spin- und Drehimpulsquantenzahlen $|\alpha\rangle_1 = |f_1, m_{f,1}\rangle$, $|\beta\rangle_2 = |f_2, m_{f,2}\rangle$ und (L, M_L) bestimmt. Die Gesamtwellenfunktion des homonuklearen Stoßpaares muß jedoch symmetrisch bezüglich der Vertauschung sein. Dieser Forderung begegnet man durch die Einführung der zusammengesetzten Hyperfeinzustände

$$|(\alpha\beta)^\pm\rangle = \frac{|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 \pm |\alpha\rangle_2|\beta\rangle_1}{\sqrt{2(1 \pm \delta_{\alpha\beta})}} \quad (3.25)$$

¹⁰ Dies gilt für den Zeeman-Bereich des Hyperfeindiagramms.

mit den beiden möglichen Symmetrien. Erlaubt sind die Konfigurationen $|L, M_L, (\alpha\beta)^+\rangle$ für gerade L und $|L, M_L, (\alpha\beta)^-\rangle$ für ungerade. Diese Zustände bilden eine Basis für die Wellenfunktion, die sich somit durch die Superposition

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{(\alpha\beta)} \sum_{L, M_L} \frac{u_{LM_L(\alpha\beta)}(r)}{r} i^L Y_{LM_L}(\theta, \phi) |(\alpha\beta)^\pm\rangle \quad (3.26)$$

darstellen läßt. Summiert wird dabei über alle erlaubten und unterschiedlichen Konfigurationen mit insgesamt gerader Parität. Im Unterschied zum Ansatz (3.5) werden hierbei auch innere Freiheitsgrade berücksichtigt und es gilt nicht mehr $M_L = 0$. Dieser Ansatz wird nun in die stationäre Schrödingergleichung (3.1) eingesetzt, wobei beachtet werden muß, daß es in diesem Fall zu einem Austausch zwischen den inneren Energien ϵ_α und ϵ_β der Atome und den Bewegungsenergien kommen kann. Dadurch ist bei dem Stoß k allein keine Erhaltungsgröße mehr. Durch Projektion der Schrödingergleichung auf die einzelnen Basiszustände erhält man wieder das System

$$\frac{\hbar^2}{2m_r} \frac{d^2}{dr^2} u_{LM_L(\alpha\beta)}(r) + \left(E - \epsilon_\alpha - \epsilon_\beta - \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2m_r r^2} \right) u_{LM_L(\alpha\beta)}(r) = \sum_{(\alpha'\beta')} \sum_{L', M'_L} C_{LM_L(\alpha\beta), L'M'_L(\alpha'\beta')}(r) u_{L'M'_L(\alpha'\beta')}(r) \quad (3.27)$$

von Radialgleichungen, die nun allerdings durch die Matrix

$$C_{LM_L(\alpha\beta), L'M'_L(\alpha'\beta')}(r) = i^{L'-L} \langle L, M_L, (\alpha\beta) | V(\vec{r}) | L', M'_L, (\alpha'\beta') \rangle \quad (3.28)$$

gekoppelt sind. Je nach dem, welche der oben diskutierten Auswahlregeln der Situation angemessen sind, zerfällt das System in mehrere Blöcke gekoppelter Gleichungen. Wie schon in Abschnitt 3.1 sind die Randbedingungen auch hier durch $u_{LM_L(\alpha\beta)}(0) = 0$ und die entsprechenden asymptotischen Formen für $r \rightarrow \infty$ gegeben. Mit der Notation $LM_L(\alpha\beta) = F$ für die Endzustände und $L'M'_L(\alpha'\beta') = I$ für den Anfangszustand lauten letztere

$$u_F(r) \sim (-i)^{L+1} \sqrt{\frac{m_r}{2\pi\hbar^2 k_{\alpha\beta}}} \left[\delta_{F,I} (-1)^{L+1} e^{-ik_{\alpha\beta}r} + S_{F,I}(k_{\alpha'\beta'}) e^{ik_{\alpha\beta}r} \right]. \quad (3.29)$$

Dabei ist $\hbar k_{\alpha\beta} = \sqrt{2m_r(E - \epsilon_\alpha - \epsilon_\beta)}$ der relative Impuls in den Endzuständen. In analoger Weise ist der Impuls $\hbar k_{\alpha'\beta'}$ vor dem Stoß definiert. Mit dem Kronecker-Symbol wird dafür gesorgt, daß nur der Anfangszustand einen einlaufenden Wellenanteil besitzt. Die Streumatrix $S_{F,I}(k_{\alpha'\beta'})$ hat nun eine wesentlich kompliziertere Struktur. Das Betragsquadrat ihres Diagonalelementes $S_{I,I}(k_{\alpha'\beta'}) = e^{2i\eta_I(k_{\alpha'\beta'})}$ gibt das Verhältnis zwischen dem einlaufenden und dem auslaufenden Fluß im Eingangskanal an. Weil diese bei inelastischen Prozessen nicht mehr gleich sind, ist die Streuphase $\eta_I(k_{\alpha'\beta'})$ eine komplexe Zahl.

Den Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $(\alpha', \beta') \rightarrow (\alpha, \beta)$ erhält man wie im Falle der in Abschnitt 3.1 diskutierten elastischen Streuung spinloser Teilchen aus den Elementen der S-Matrix:

$$\sigma_{\alpha'\beta'\alpha\beta}(k_{\alpha'\beta'}) = \frac{\pi}{k_{\alpha'\beta'}^2} (1 + \delta_{\alpha'\beta'}) \left| \sum_{L, M_L, L', M'_L} \sqrt{2L'+1} (S_{F,I}(k_{\alpha'\beta'}) - \delta_{F,I}) \right|^2. \quad (3.30)$$

Für elastische Stöße zwischen identischen Teilchen hat der Ausdruck in Übereinstimmung mit Gleichung (3.12) den Vorfaktor $2\pi/k^2$. Anders als dort werden jedoch hier die Beiträge der Partialwellen vor der Betragsbildung kohärent summiert, da sie durch das anisotrope Potential gekoppelt werden. Für inelastische Kanäle liefert $\delta_{F,I}$ keinen Beitrag in Einklang mit der Tatsache, daß es in diesen Kanälen keine einlaufenden Wellenanteile gibt. Bei der Summation müssen außerdem natürlich die der Situation entsprechenden Auswahlregeln und die Energieerhaltung berücksichtigt werden, wodurch die Anzahl der Beiträge, insbesondere bei geringer Energie der Stoßpartner, überschaubar wird.

Für das Experiment ist das niederenergetische Verhalten der Stoßquerschnitte relevant. Im Limes verschwindender Energie ($L' = M'_L = 0$) läßt sich der Streuphase nach wie vor die Streulänge $a_{\alpha'\beta'}$ zuordnen (vgl. Relation (3.14) in Kapitel 3.1), die den elastischen Stoßquerschnitt bestimmt:

$$\lim_{k_{\alpha'\beta'} \rightarrow 0} \eta_I(k_{\alpha'\beta'}) = -k_{\alpha'\beta'} a_{\alpha'\beta'} \Rightarrow \sigma_{\alpha'\beta'}^{\text{el}} = 4(1 + \delta_{\alpha'\beta'}) \pi |a_{\alpha'\beta'}|^2. \quad (3.31)$$

Dabei sorgt $\delta_{\alpha'\beta'}$ für den zweifach größeren Wirkungsquerschnitt bei Stößen identischer Teilchen. Die Streulänge ist nun, wie die Streuphase, eine komplexe Größe. In der Regel ist ihr Imaginärteil sehr klein und kann daher im Ausdruck für den elastischen Stoßquerschnitt vernachlässigt werden. Erwartungsgemäß wird letzterer im Grenzfall niedriger Energien konstant.

Anders der gesamte inelastische Stoßquerschnitt. Dessen Energieabhängigkeit ergibt sich am schnellsten aus der Unitarität der S-Matrix, die die Teilchenzahlerhaltung beim Stoß sichert und der Forderung entspricht, daß die Summe aller Übergangswahrscheinlichkeiten Eins betragen muß. Mit Gleichung (3.30) führt dies zu

$$\sigma_{\alpha'\beta'}^{\text{inel}}(k_{\alpha'\beta'}) = \sum_{\alpha\beta \neq \alpha'\beta'} \sigma_{\alpha'\beta'\alpha\beta}(k_{\alpha'\beta'}) = \frac{\pi(1 + \delta_{\alpha'\beta'})}{k_{\alpha'\beta'}^2} (1 - |S_{I,I}(k_{\alpha'\beta'})|^2). \quad (3.32)$$

Drückt man das elastische Element der Streumatrix durch die komplexe Streuphase $\eta = \Re[\eta] - i\Im[\eta]$ aus, gilt für den niederenergetischen Grenzfall mit der Definition (3.31) der Streulänge

$$1 - |e^{2i\eta_I(k_{\alpha'\beta'})}|^2 = 1 - e^{-4\Im[\eta_I(k_{\alpha'\beta'})]} \longrightarrow 4k_{\alpha'\beta'} \Im[a_{\alpha'\beta'}]. \quad (3.33)$$

Damit bleibt der totale inelastische Wirkungsquerschnitt mit

$$\sigma_{\alpha'\beta'}^{\text{inel}}(k_{\alpha'\beta'}) = \frac{4\pi(1 + \delta_{\alpha'\beta'})}{k_{\alpha'\beta'}^2} \Im[a_{\alpha'\beta'}] \quad (3.34)$$

im Gegensatz zum elastischen energieabhängig. Wie sich gleich zeigen wird, hat dies ungünstige Auswirkungen auf das Verhältnis zwischen den Raten, mit denen elastische und inelastische Stöße in einem Gas stattfinden.

An diesen Raten ist man in der Praxis interessiert, wo man es mit einem Gas zu tun hat, in dem alle Atome in die Zustände α' und β' präpariert wurden. Aufgrund inelastischer Prozesse zerfällt die Partialdichte $n_{\alpha'}$ (und auf analoge Weise $n_{\beta'}$) über die Zeit gemäß

$$\frac{dn_{\alpha'}}{dt} = - \sum_{(\alpha\beta)} (1 + \delta_{\alpha'\beta'}) (G_{\alpha'\beta' \rightarrow \alpha\beta} n_{\alpha'} n_{\beta'} - G_{\alpha\beta \rightarrow \alpha'\beta'} n_{\alpha} n_{\beta}) . \quad (3.35)$$

Dabei ist berücksichtigt, daß sich durch inelastische Stöße auch Dichten in anderen als den ursprünglichen Zuständen etablieren können, wodurch es anschließend auch zu Rückstreueraten in die Zustände α' und β' kommen kann. Voraussetzung dafür ist, daß die Stoßprodukte gespeichert bleiben. Die Ratenkonstanten $G_{\alpha'\beta' \rightarrow \alpha\beta}$ ergeben sich aus den obigen inelastischen Stoßquerschnitten und der Relativgeschwindigkeit v der Atome vor dem Stoß gemäß

$$G_{\alpha'\beta' \rightarrow \alpha\beta} = \left\langle \frac{1}{1 + \delta_{\alpha'\beta'}} v \sigma_{\alpha'\beta' \rightarrow \alpha\beta}(v) \right\rangle_{\text{th}} , \quad (3.36)$$

wobei $\langle \rangle_{\text{th}}$ für die Mittelung über die Geschwindigkeitsverteilung des Gases steht. Es wird vorausgesetzt, daß inelastische Stöße in der Regel sehr viel seltener stattfinden als elastische. Dann ist davon auszugehen, daß das System thermalisiert ist und daher, unabhängig von den Energiebilanzen der einzelnen Prozesse, alle gespeicherten Zustände die gleiche Geschwindigkeitsverteilung besitzen. Der Faktor $(1 + \delta_{\alpha'\beta'})^{-1}$ ist statistischen Ursprungs [53]: Um die Ratenkonstanten von Zwei-Körper-Stößen zwischen ununterscheidbaren Spinzuständen einerseits und unterscheidbaren andererseits zu vergleichen, müssen die Produkte $n_{\alpha'}^2$ und $n_{\alpha'} n_{\beta'}$ gleich sein. Das bedeutet, daß ein spinpolarisiertes Gas mit N Atomen z.B. mit einem Gas verglichen werden muß, in dem $N_{\alpha'} = N$ und $N_{\beta'} = N$ Atome in zwei verschiedenen Spinzuständen vorliegen. Im ersten Fall gibt es $N(N-1)/2$ Stoßpaare, im zweiten jedoch $N_{\alpha'} N_{\beta'} = N^2$.

In einem Gas der Temperatur T ist der zu einem exothermen Prozeß $\alpha'\beta' \rightarrow \alpha\beta$ inverse, endotherme Prozeß gegenüber ersterem um den Faktor $e^{[-(\epsilon_{\alpha'} + \epsilon_{\beta'} - \epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\beta})/k_B T]}$ unterdrückt. Bei extrem tiefen Temperaturen sind endotherme Prozesse daher vernachlässigbar. Zu dieser Schlußfolgerung hatten bereits die Überlegungen im Zusammenhang mit der Energieerhaltung beim Spinaustausch und der dipolaren Relaxation geführt. In einem BEK-Experiment führen zudem alle exothermen Stöße zum Verlust beider Atome, da die freigesetzte Energie sehr viel höher als die Grundzustandsenergie des Kondensats und meistens auch höher als die Tiefe des Speicherpotentials ist. Oft kommt ein spinpolarisiertes Gas zum Einsatz, in dem sich alle Atome im gleichen Zustand befinden. Die Beobachtungsgröße ist in diesem Fall die Gesamtratenkonstante $K_2^{\alpha'\alpha'}$, die die zeitliche Entwicklung der Dichte $n_{\alpha'}$ gemäß

$$\frac{dn_{\alpha'}}{dt} = -K_2^{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'}^2 \quad \text{mit} \quad K_2^{\alpha'\alpha'} = \sum_{(\alpha\beta)} 2 G_{\alpha'\alpha' \rightarrow \alpha\beta} \quad (3.37)$$

bestimmt, wobei sich die Summe über alle erlaubten exothermen Prozesse erstreckt.

f_1	$m_{f,1}$	f_2	$m_{f,2}$	L	M_L	E/k_B	$G [\text{cm}^3/\text{s}]$
2	2	2	2	2	0	0	extrem klein
1	1	2	2	2	1	328 mK	$0,89 \times 10^{-16}$
2	1	2	2	2	1	67 μK	$0,14 \times 10^{-17}$
1	0	2	2	2	2	328 mK	$0,65 \times 10^{-17}$
1	1	1	1	2	2	656 mK	$0,13 \times 10^{-15}$
1	1	2	1	2	2	328 mK	$0,12 \times 10^{-15}$
2	0	2	2	2	2	134 μK	$0,89 \times 10^{-17}$
2	1	2	1	2	2	134 μK	$0,28 \times 10^{-16}$

Tabelle 3.1: Ratenkonstanten G und freigesetzte Energie für die Zerfallskanäle der dipolaren Relaxation eines maximal spinpolarisierten ^{87}Rb -Gases für $T \rightarrow 0$ und ein Magnetfeld von 2 G.

Mit dem totalen inelastischen Wirkungsquerschnitt (3.34) gilt für die Gesamtratenkonstante für $T \rightarrow 0$:

$$K_2^{\alpha'\alpha'} = \left\langle v \sigma_{\alpha'\alpha'}^{\text{inel}}(k_{\alpha'\alpha'}) \right\rangle_{\text{th}} \longrightarrow \frac{8\pi\hbar}{m_r} \text{Im}[a_{\alpha'\alpha'}] . \quad (3.38)$$

Damit verliert die Ratenkonstante ihre Energieabhängigkeit. Dies bedeutet, daß das Verhältnis $\langle v \rangle_{\text{th}} \sigma_{\alpha'\alpha'}^{\text{el}} / K_2^{\alpha'\alpha'}$ von „guten“ zu „schlechten“ Stößen mit sinkender Temperatur immer ungünstiger wird.

Die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Experimente wurden mit ^{87}Rb im maximal spinpolarisierten Zustand $\alpha' = |f=2, m_f=2\rangle$ bei einem Magnetfeld von 2 G und Temperaturen unterhalb 1 μK durchgeführt. Für diesen Zustand gibt es unabhängig von der Temperatur ausschließlich exotherme Zerfallskanäle. Jedoch ist andererseits Spinaustausch nicht erlaubt (s. dort), und das Gas kann allein durch dipolare Relaxation zerfallen. Da die Atome den Stoß mit $M_F' = 4$, $L' = 0$ und $M_L' = 0$ angehen, führt Relaxation stets zu $L = 2$, und für die Spinprojektion gilt daher $\Delta M_F = 0, -1, -2$ unter der Bedingung $\Delta M_F + \Delta M_L = 0$. In Tabelle 3.1 sind die möglichen Zerfallskanäle, die entsprechenden Ratenkonstanten $G_{\alpha'\alpha' \rightarrow \alpha\beta}$ und die bei dem Prozeß freigesetzte Energie für die experimentelle Situation zusammengefaßt. Die Konstanten wurden numerisch in der Arbeitsgruppe von B. J. Verhaar in Eindhoven berechnet und uns freundlicherweise mitgeteilt.

Gemäß Gleichung (3.37) ergibt sich der theoretische Wert für die Gesamtratenkonstante aus den in Tabelle 3.1 aufgeführten Beiträgen zu

$$K_2 = 7,7 \times 10^{-16} \text{ cm}^3/\text{s} \quad (3.39)$$

bei einem Feld von 2 G. Dieser Wert ist mit der experimentell ermittelten oberen Schwelle von $2 \times 10^{-15} \text{ cm}^3/\text{s}$ bei 1,26 G konsistent [72] und außergewöhnlich klein¹¹. Er entspricht einem Imaginärteil der Streulänge von $\text{Im}[a_{2,2,2,2}] = 4 \times 10^{-4} a_0$, der im elastischen Stoßquerschnitt (3.31) völlig vernachlässigbar ist. Da elastische Stöße im Zustand

¹¹ Rechnungen von Julianne et al. liefern für $B \rightarrow 0$ die Ratenkonstante $1,4 \times 10^{-15} \text{ cm}^3/\text{s}$ und für 1 G die Abschätzung $2 - 4 \times 10^{-15} \text{ cm}^3/\text{s}$ [62].

$|2, 2\rangle$ nur entlang des Triplettpotentials stattfinden, ist für letzteren die Triplettstreulänge $a_T = 99 a_0$ einzusetzen. Für eine typische Temperatur von $1 \mu\text{K}$ bedeutet das, daß nur etwa jeder 17.000-ste Stoß inelastisch ist. Daher bietet der Zustand $|2, 2\rangle$ sehr gute Voraussetzungen für die BEK. Diese glückliche Konstellation beruht zum einen auf der ähnlichen Stärke der beiden Dipolbeiträge V_{SS} und V_{SB} , die mit entgegengesetzten Vorzeichen zum Streupotential beitragen [52], und zum anderen auf der ähnlichen Größe der Singulett- und Triplettstreulängen [62, 63].

3.2.6 Auswirkungen der Kohärenz

An dieser Stelle muß noch kurz auf die Rolle von Dichtefluktuationen in dem Gas eingegangen werden. Für Stöße ist offensichtlich relevant, wie oft sich im Mittel zwei Teilchen zum gleichen Zeitpunkt am gleichen Ort befinden. Daher sind Korrelationen zwischen den Teilchen wichtig. Mit der räumlichen Korrelationsfunktion zweiter Ordnung läßt sich schreiben:

$$\langle n^2 \rangle = g^{(2)}(r=0) \langle n \rangle^2. \quad (3.40)$$

In einem thermischen Gas sind die Atome unkorreliert, und daher treten Dichtefluktuationen auf. Dies führt zu $g^{(2)}(0) = 2$, wie unlängst experimentell nachgewiesen werden konnte [73]. In einem Kondensat befinden sich hingegen alle Atome im gleichen Quantenzustand und sind somit kohärent, in vollständiger Analogie zu den Photonen im Laserlicht. Daher gibt es keine Dichtefluktuationen und es gilt $\langle n^2 \rangle = \langle n \rangle^2$, also $g^{(2)}(0) = 1$. Bei der gleichen mittleren Dichte $\langle n \rangle$ finden deswegen in einem Kondensat um einen Faktor Zwei weniger Stöße statt als in einem thermischen Gas¹². Mit der Beobachtung dieser Eigenenschaft gelang tatsächlich einer der ersten Nachweise für die Kohärenz zweiter Ordnung von Kondensaten [75]. Da Gleichung (3.37) für ein thermisches Gas gilt, muß für ein Kondensat $K_2^{\alpha'\alpha'}/2$ angesetzt werden.

3.3 Inelastische Drei-Körper-Stöße: Rekombination

Heutige BEK-Experimente befinden sich in aller Regel im Regime verdünnter Gase mit $na^3 \ll 1$. In solchen Systemen führt die Berücksichtigung der Wechselwirkung auf der Grundlage von elastischen Zwei-Körper-Stößen (siehe Kapitel 4) zu einer ausgesprochen guten Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Die Notwendigkeit, elastische Drei-Körper-Stöße in die Theorie einzubeziehen, ergibt sich neuerdings aus den ersten erfolgreichen Versuchen, die Wechselwirkung und damit die Verdünnung in Kondensaten durch die Manipulation der Streulänge zu variieren (vgl. Kapitel 3.2).

Dagegen beeinflussen *inelastische* Drei-Körper-Stöße in Alkali-Kondensaten bereits bei moderaten Dichten die Lebensdauer und sind in diesem Zusammenhang daher nicht zu

¹² Eine ausführliche Diskussion dieses Effektes ist in Referenz [74] nachzulesen.

vernachlässigen. Für das stark unterkühlte Gas sind solche Stöße die einzige Möglichkeit, sich durch Molekülbildung dem thermodynamischen Grundzustand zu nähern. Der Prozeß, bei dem zwei Atome in der Anwesenheit eines dritten ein Molekül bilden, wird als Rekombination bezeichnet. Aufgrund des verhältnismäßig großen mittleren Abstandes zwischen den Atomen eines verdünnten Gases ist ein signifikanter Überlapp der Ortswellenfunktionen vor und nach dem Stoß nur für stark ausgedehnte Molekülzustände gegeben. Daher bildet sich das Molekül in der Regel im höchsten gebundenen Zustand des Potentials, dessen Bindungsenergie höchstens einige mK beträgt. Diese Energie wird im Verhältnis 1:2 auf das Molekül und das Atom verteilt und ist zwar etwa sechs Größenordnungen geringer als die Potentialtiefe (vgl. Abbildung 3.5), andererseits aber auch mehr als drei Größenordnungen höher als die Energie der kondensierten Atome. Dadurch gehen bei dem Prozeß drei Atome verloren. Im Experiment ist man an der Rate K_3 interessiert, mit der dies geschieht. Analog zu Gleichung (3.37) gilt nun für die zeitliche Entwicklung der Dichte

$$\frac{dn}{dt} = -K_2 n^2 - K_3 n^3. \quad (3.41)$$

Offensichtlich wird Rekombination bei ausreichend hoher Dichte zum dominanten Verlust.

Dem frühen Interesse an Wasserstoff als Kandidat für die BEK ist es zu verdanken, daß der Formalismus und die numerischen Methoden zur Bestimmung der Stoßquerschnitte und Übergangsraten für inelastische Zwei-Teilchen-Stöße eine bereits 15 Jahre währende Entwicklungszeit hinter sich hatten, als die BEK 1995 zum ersten Mal beobachtet werden konnte. Gemessen daran befindet sich die Theorie der Rekombination noch in den Kinderschuhen. Dies liegt nicht allein an der wesentlich komplizierteren Struktur des Problems, sondern auch an der Tatsache, daß der Prozeß bei spinpolarisiertem Wasserstoff eine viel geringere Rolle spielt und daher wenig untersucht wurde: Da das Triplettpotential des H-Dimers keine gebundenen Zustände aufweist, ist Molekülbildung nur im Singulettpotential möglich und erfordert somit den Spinflip mindestens eines der Atome. Dies führt zu Rekombinationsraten, die um etwa zehn Größenordnungen kleiner sind als jene von Alkaliatomen [65].

Bei einem Drei-Körper-Stoß im Regime $na^3 \ll 1$ wechselwirken die Atome in guter Näherung paarweise miteinander. Qualitativ ist daher zu erwarten, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Drei-Körper-Stoß mit der Streulänge zunimmt, da sie die effektive Reichweite der Paarwechselwirkung bestimmt. Erste Prognosen für die Rekombinationsraten von Alkaliatomen beruhten auf einem störungstheoretischen Ansatz, der für Wasserstoff entwickelt worden war, dessen Gültigkeit allerdings für die wesentlich stärker wechselwirkenden Alkaliatome fraglich ist [76, 77]. Das Ergebnis dieser Analysen ist eine Proportionalität der Rekombinationsraten zu a^2 . Für den Fall sehr großer positiver Streulängen haben Fedichev et al. und Nielsen et al. nachgewiesen, daß diese Prognose nicht zutreffen kann und tatsächlich eine Proportionalität zu a^4 zu erwarten ist [78, 79]. Im wesentlichen haben Esry et al. diese Abhängigkeit im Rahmen der zur Zeit einzigen Methode, die beliebige Werte der Streulänge zuläßt, reproduziert [80]. Die von ihnen ermittelten Ratenkonstanten sind außerdem in guter quantitativer Übereinstimmung mit (den wenigen) experimentell bestimmten. Von einem völlig anderen Ansatz ausgehend, kamen schließlich Bedaque et al. zu ähnlichen Prognosen für positive Streulängen [81]. In keiner der

genannten Arbeiten ist jedoch das volle Wechselwirkungspotential (3.17) berücksichtigt, insbesondere werden die Hyperfein- und die Zeeman-Wechselwirkungen vernachlässigt. Dieser Umstand ist auf die Komplexität des Problems zurückzuführen. Es ist daher zu erwarten, daß sich in bestimmten Situationen Abweichungen vom Experiment ergeben. Im folgenden sind die Wesenszüge der sog. adiabatisch-hypersphärischen Methode nach den Referenzen [82, 83, 80, 53] grob zusammengefaßt.

Der entscheidende Ansatz dabei ist, das Drei-Körper-Problem durch eine Koordinatentransformation auf die Streuung eines Teilchens an einem effektiven Potential zurückzuführen. Dies geschieht durch die Transformation in hypersphärische Koordinaten. Die neun kartesischen Koordinaten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ der drei Atome werden dabei stufenweise reduziert. Zunächst erfolgt die Transformation in sechs Jacobi-Koordinaten, was einer Abseparation der unwichtigen Schwerpunktsbewegung entspricht:

$$\begin{aligned}\vec{\rho}_1 &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \\ \vec{\rho}_2 &= \left[\vec{r}_3 - \frac{(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)}{2} \right].\end{aligned}\quad (3.42)$$

Die beiden neuen Radien entsprechen somit dem relativen Ortsvektor zweier Teilchen und der Position des dritten Teilchens bezüglich deren Schwerpunkt. Aufgrund der Permutationssymmetrie gibt es drei gleichberechtigte Koordinatensysteme. Eine Beschreibung der Streuung identischer Teilchen in diesen Koordinaten hätte also eine lästige Symmetrisierung zur Folge. Analog zum Zwei-Teilchen-Stoß kann nun aber auch in diesem Fall davon ausgegangen werden, daß bei niedrigen Energien der gesamte Bahndrehimpuls des Systems vor dem Stoß $L = 0$ ist. Vernachlässigt man Korrekturen zum Wechselwirkungspotential, die den Drehimpuls nicht erhalten, gilt Gleiches auch nach dem Stoß. Dann können die drei Euler-Winkel, die Drehungen des von den Atomen aufgespannten Dreiecks bestimmen, ebenfalls absepariert werden. Die verbleibenden drei hypersphärischen Koordinaten sind dann wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\mu R^2 &= \mu_1 \rho_1^2 + \mu_2 \rho_2^2 \quad \text{mit} \quad \mu_1 = \frac{m}{2} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \frac{2m}{3}, \\ \tan \phi &= \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \frac{\rho_2}{\rho_1}, \\ \cos \theta &= \frac{\vec{\rho}_1 \cdot \vec{\rho}_2}{\rho_1 \rho_2}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Während μ_1 und μ_2 die reduzierten Massen darstellen, die den beiden Jacobi-Radien zugeordnet sind, ist μ ein frei wählbarer Skalierungsparameter. In der Regel wird hierfür $m/\sqrt{3}$ gewählt. Dann ergibt sich der Hyperradius aus den Abständen r_{ij} der Atome gemäß

$$R^2 = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{13}^2}{\sqrt{3}} \quad (3.44)$$

und stellt also ein Maß für die Größe des Drei-Körper-Systems dar. Wie zu erwarten war, ist er unabhängig von der Wahl eines der drei möglichen Jacobi-Koordinatensysteme. Somit ist die Permutationssymmetrie in die Formulierung eingebaut worden.

Die stationäre Schrödingergleichung läßt sich nun in den neuen Koordinaten darstellen, wobei für das Wechselwirkungspotential in guter Näherung die Summe der Zwei-Teilchen-Potentiale $V = V_{12} + V_{13} + V_{23}$ angesetzt werden kann. Durch eine Skalierung der Wellenfunktion gemäß $\Psi(R, \theta, \phi) = R^{-5/2} \psi(R, \theta, \phi)$, lassen sich die ersten Ableitungen aus der Differentialgleichung eliminieren, und zu lösen gilt schließlich

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{\Lambda^2(\theta, \phi) + 15/4}{R^2} \right) + V(R, \theta, \phi) \right] \psi(R, \theta, \phi) = E \psi(R, \theta, \phi), \quad (3.45)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}\psi(0, \theta, \phi) &= 0, \\ \psi(R, \theta, 0) &= \psi(R, \theta, \frac{\pi}{2}) = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} &= \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = 0.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Der Term $\Lambda^2(\theta, \phi)$ ist der Drehimpulsoperator des Systems in hypersphärischen Koordinaten. Er hat die Form:

$$\Lambda^2(\theta, \phi) = -\frac{1}{\sin 4\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin 4\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\cos^2 2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.47)$$

Um einen intuitiven Zugang zu dem Streuprozess zu erhalten, ist man wie im Falle einfacher Potentialstreuung daran interessiert, die dreidimensionale Schrödingergleichung (3.45) auf ein System eindimensionaler Differentialgleichungen zurückzuführen. Die Lösung beginnt daher mit der Expansion

$$\psi(R, \theta, \phi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu}(R) \Phi_{\nu}(R; \theta, \phi, \chi) \quad (3.48)$$

nach sog. adiabatischen Streukanälen $\Phi_{\nu}(R; \theta, \phi, \chi)$ wobei χ die Spinfreiheitsgrade bezeichnet. Die Streukanäle sind Eigenfunktionen der Schrödingergleichung (3.45) zu festem Hyperradius R :

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\Lambda^2(\theta, \phi) + 15/4}{R^2} + V(R; \theta, \phi) \right) \Phi_{\nu}(R; \theta, \phi, \chi) = U_{\nu}(R) \Phi_{\nu}(R; \theta, \phi, \chi). \quad (3.49)$$

Diese Gleichung wird nun numerisch gelöst, wodurch ein Satz adiabatischer Potentiale $U_{\nu}(R)$ und ein Satz von Eigenfunktionen bestimmt werden. Letztere hängen parametrisch von R ab. In der Folge zerfällt die Schrödingergleichung (3.45) mit dem Ansatz (3.48) in ein System gekoppelter, eindimensionaler Hyperradialgleichungen:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dR^2} F_{\mu}(R) + 2 \sum_{\nu} P_{\mu\nu} \frac{d}{dR} F_{\nu}(R) + \sum_{\nu} Q_{\mu\nu} F_{\nu}(R) \right) + U_{\mu}(R) F_{\mu}(R) = E_{\mu} F_{\mu}(R). \quad (3.50)$$

Die Kopplungsmatrizen $P_{\mu\nu} = \langle \Phi_{\mu} | \frac{d}{dR} \Phi_{\nu} \rangle$ und $Q_{\mu\nu} = \langle \Phi_{\mu} | \frac{d^2}{dR^2} \Phi_{\nu} \rangle$ kommen durch die nicht verschwindenden Ableitungen der Streukanäle Φ_{ν} nach dem Hyperradius zustande.

Die Terme $U_\mu(R)$ spielen die Rolle effektiver Potentiale. Aufgrund der parametrischen Abhängigkeit der Streukanäle von R werden durch die Lösung des Gleichungssystems (3.50) die Energieeigenzustände des Drei-Körper-Systems vollständig bestimmt.

Jeder gebundene Zustand des Moleküls (einschließlich des dritten, freien Atoms) stellt einen sog. Rekombinationskanal dar und entspricht asymptotisch genau einem der Drei-Körper-Energieeigenzustände. Die verbleibenden Drei-Teilchen-Zustände entsprechen elastischen Streuresonanzen, die asymptotisch zu drei freien Atomen führen. Es zeigt sich, daß die Gesamtzahl der Eigenzustände von der Größe der Streulänge abhängt und für endliche Werte von a ebenfalls endlich ist [84]. Daher eignet sich der S-Matrix-Formalismus für die weitere Behandlung der Hyperradialgleichungen. Dies kommt der Beschreibung gleich, die bereits in Abschnitt 3.2 am Beispiel der Spinrelaxation vorgestellt wurde. Anders als dort hat man es aber in diesem Fall mit einer unbeherrschbaren Anzahl von Zuständen zu tun¹³. Aus den oben erwähnten Gründen des Überlapps ist jedoch anzunehmen, daß Moleküle hauptsächlich in ihrem höchsten gebundenen Zustand entstehen. Es liegt daher nahe, in den Rechnungen statt des exakten Triplettpotentials ein Modellpotential zu verwenden, das nur wenige gebundene Zustände (und damit auch Rekombinationskanäle) zuläßt. Durch Skalierung dieses Potentials läßt sich, wie in Kapitel 3.1 veranschaulicht wurde, auch die Streulänge variieren und deren Auswirkung auf die Rekombinationsrate untersuchen.

Die Analyse von Esry et al. zeigt, daß es im wesentlichen ausreicht, Molekülpotentiale mit nur einem gebundenen Zustand zu betrachten [80]. Daher ist die Rekombinationsrate fast ausschließlich durch die Streulänge bestimmt und nur gering von der exakten Form des Zwei-Teilchen-Potentials abhängig. Für $T \rightarrow 0$ kommt zudem als Eingangskanal nur der tiefste Energieeigenzustand des Drei-Körper-Systems in Frage, der asymptotisch drei freien Atomen entspricht. Die Verlustratenkonstante ergibt sich dann im wesentlichen aus nur einem S-Matrixelement¹⁴:

$$K_3 = 3456\pi^2 \frac{\hbar}{\mu k^4} |S_{A_2+A \leftarrow A+A+A}|^2. \quad (3.51)$$

Anschaulich erhält man in der hypersphärischen Darstellung ein zum Spinaustausch beim Zwei-Teilchen-Stoß analoges Bild (vgl. Kapitel 3.2). Am Ort der Kopplung wird die Amplitude der einlaufenden Welle durch Projektion auf die beiden Kanäle aufgeteilt. An der gleichen (Hyperradial-)Position erfolgt nach der Reflexion an den effektiven Potentialen $U_\nu(R)$ die Projektion auf die Endzustände. Das Ergebnis hängt von der relativen Phase der Teilamplituden ab. Anders als beim Spinaustausch bestimmt jetzt die Triplettstreulänge beide Potentiale und so auch den Phasenunterschied. Bei bestimmten Werten der Streulänge wird daher eine unterdrückte Rekombinationsrate erwartet. Tatsächlich ergibt sich für $|S_{A_2+A \leftarrow A+A+A}|^2$ im Falle großer, positiver Streulängen und geringer Energien eine Proportionalität zu $(ka)^4 \sin^2 \phi$, wo ϕ den erwähnten Phasenunterschied darstellt. Er hängt vom Verhältnis der Streulänge zur Reichweite des Zwei-

¹³ Die Anzahl der Rekombinationskanäle für maximal spinpolarisierte ^{87}Rb -Atome beträgt 1466 und nimmt allgemein mit der atomaren Masse zu [53].

¹⁴ Aus Gründen der Konsistenz bezeichnet hier K_3 die Verlustrate und nicht wie in Referenz [80] die Rekombinationsrate.

Teilchen-Wechselwirkungspotentials ab. Mit Gleichung (3.51) führt dies schließlich zu einer energieunabhängigen Ratenkonstante mit einer modulierten a^4 -Abhängigkeit. Auf dieses Ergebnis kommen im wesentlichen auch Bedaque et al. in Referenz [81].

Für ^{87}Rb im Zustand $|2, 2\rangle$ geben Esry et al. die Ratenkonstante

$$K_3 = 1,15 \times 10^{-28} \text{ cm}^6/\text{s} \quad (3.52)$$

an. Dieses Ergebnis ist in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem experimentell ermittelten Wert von $1,08 (\pm 0,3) \times 10^{-28} \text{ cm}^6/\text{s}$ [72]. Beide Werte gelten für ein inkohärentes Ensemble. Analog zur Situation bei Zwei-Körper-Stößen, bestimmt in diesem Fall die Dichtekorrelationsfunktion dritter Ordnung die Wahrscheinlichkeit, drei Atome zeitgleich am selben Ort anzutreffen. In einem kohärenten Ensemble sind Dichtefluktuationen unterdrückt, und $g^{(3)}(0)$ ist um den Faktor $3!$ kleiner als in einem thermischen Gas. In einem Kondensat finden Rekombinationsverluste daher mit der Rate $K_3/6$ statt. Durch die Beobachtung dieses Effektes konnte experimentell nachgewiesen werden, daß Kondensate in dritter Ordnung kohärent sind [85].

Ein Vergleich der Verlustraten (3.39) und (3.52) durch inelastische Zwei- und Drei-Körper-Stöße zeigt, daß Rekombination in einem maximal polarisierten Rb-Gas bei Teilchendichten in der Größenordnung von $n = K_2/K_3 \approx 7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ bereits den dominanten Verlustprozeß darstellt¹⁵. Da alle elastischen Stoßraten energieabhängig bleiben, gilt auch hier wieder, daß das Verhältnis von „guten“ zu „schlechten“ Stößen mit sinkender Temperatur ungünstiger wird.

Für das Experiment ist schließlich noch die Energie von Bedeutung, die bei dem Rekombinationsprozeß freigesetzt und in kinetische Energie der Stoßprodukte umgewandelt wird. Neuesten spektroskopischen Ergebnissen zufolge beträgt die Bindungsenergie des höchsten gebundenen Vibrationszustands im Triplettpotential von ^{87}Rb in Temperatureinheiten $E/k_B = 1,2 \text{ mK}$ [47].

¹⁵ In einem kohärenten Ensemble tritt diese Situation bei einer dreifach höheren Dichte ein.

Kapitel 4

Der Grundzustand in der Molekularfeldnäherung

Im Lichte der Ausführungen des letzten Kapitels wird klar, daß sich im Experiment Abweichungen von der idealen Gastheorie offenbaren müssen. Im folgenden sollen diese quantifiziert werden. Als Ausgangspunkt ergibt sich aus der Analyse der elastischen und inelastischen Streuvorgänge in einem atomaren Gas folgendes Bild:

- Um die BEK in ihrer „Reinkultur“ studieren zu können, muß die Wechselwirkung in dem System gering gehalten werden. Dies wird durch eine ausreichende Verdünnung des Gases gewährleistet. Das bedeutet zunächst, daß die kritische Phasenraumdichte des Gases gewährleistet ist. In diesem Fall wird die $n\lambda_T^3 \sim 1$ nur mit ultrakalten Atomen erreicht werden kann. Unter dieser Voraussetzung läßt sich das Kriterium für Verdünnung lautet $na^3 \ll 1$. In diesem Fall wird die Zwei-Teilchen-Wechselwirkung durch elastische s-Wellen-Streuung beschrieben, und die N-Teilchen-Wechselwirkung als Summe aller Paarwechselwirkungen darstellen, was die theoretische Untersuchung des Systems, wie sich gleich zeigen wird, ungemein erleichtert. Zusätzlich ist durch die Verdünnung auch für eine ausreichende Lebensdauer des Kondensats gesorgt, da die inelastischen Stoßraten schnell mit der Dichte abnehmen und endotherme Prozesse bei den zwangsweise tiefen Temperaturen unterdrückt sind.
- Die s-Wellen-Streuung ist nicht von den Details des Streupotentials abhängig. Daher läßt dieses sich im Zuge einer theoretischen Beschreibung des Systems durch ein beliebiges Potential ersetzen, das zur gleichen Streulänge führt. Da letztere experimentell bestimmt werden kann, ist man, sofern man an elastischen Stößen interessiert ist, nicht auf die Kenntnis des Wechselwirkungspotentials angewiesen.
- In einem verdünnten Gas ist neben der Streulänge auch die charakteristische Reichweite R_0 des Potentials sehr viel kleiner als der mittlere Teilchenabstand. Es liegt daher nahe, sich für das Kontaktpotential $V(\vec{r}) = g\delta(\vec{r})$ zu entscheiden, wo g ein Maß für die Stärke der Wechselwirkung darstellt. Die exakte Streutheorie liefert jedoch für ein solches Potential (mit $g \rightarrow \infty$ für $R_0 \rightarrow 0$) eine verschwindende

Streulänge¹. Allerdings impliziert das Erreichen der kritischen Phasenraumdichte in einem verdünnten Gas, daß $a/\lambda_T \ll 1$ gilt. Damit wird auch die Ausdehnung der Grundzustandswellenfunktion wesentlich größer sein als der Wirkungsbereich des Potentials, das somit – trotz der niedrigen Stoßenergie – als kleine Störung betrachtet werden kann. Dies rechtfertigt die Bornsche Näherung, in der das Kontaktpotential mit

$$g = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \quad (4.1)$$

wie gewünscht zur Streulänge a führt. Davon kann man sich mit Hilfe von Gleichung (3.4) leicht überzeugen.

Die obigen Schlußfolgerungen müssen natürlich in der Umgebung von Streuresonanzen einer sorgfältigen Prüfung unterzogen werden.

4.1 Die Gross-Pitaevskii-Gleichung

Nun kann man sich auf die Suche nach dem Grundzustand des wechselwirkenden N-Teilchensystems in dem äußeren Potential $U(\vec{r})$ begeben. In der Ortsdarstellung der zweiten Quantisierung ist der Hamilton-Operator unter Beschränkung auf die Paarwechselwirkungen durch

$$\mathcal{H} = \int d^3r \Psi^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \Psi(\vec{r}') \Psi(\vec{r}) \quad (4.2)$$

gegeben. Dabei sind $\Psi^\dagger(\vec{r})$ und $\Psi(\vec{r})$ die Feldoperatoren, die ein Teilchen am Ort $\vec{r}$ erzeugen oder vernichten. Der bosonischen Statistik des Systems wird durch die Kommutatorrelationen

$$[\Psi(\vec{r}), \Psi^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad [\Psi(\vec{r}), \Psi(\vec{r}')] = 0, \quad [\Psi^\dagger(\vec{r}), \Psi^\dagger(\vec{r}')] = 0 \quad (4.3)$$

Rechnung getragen. Im Heisenberg-Bild ergibt sich gemäß $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = [\Psi(\vec{r}, t), \mathcal{H}]$ die Bewegungsgleichung für den Feldoperator Ψ zu

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + g \Psi^\dagger(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t). \quad (4.4)$$

Dabei ist die Bornsche Näherung als gerechtfertigt vorausgesetzt und das Kontaktpotential eingesetzt worden. Da $\Psi^\dagger(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t)$ den Dichteoperator darstellt, verursacht die Kontaktwechselwirkung für das Atom am Ort $\vec{r}$ ein effektives Potential, das proportional

¹ Üblicherweise wird das Problem durch eine Regularisierung des Kontaktpotentials gelöst. Der Einsatz dieser sog. Methode der Pseudopotentiale [35] ist jedoch nicht erforderlich, falls die Grundzustandswellenfunktion die Voraussetzungen für die Bornsche Näherung erfüllt.

zur lokalen Dichte ist. Ob es attraktiv oder repulsiv ist, hängt wegen (4.1) allein vom Vorzeichen der Streulänge ab, in Einklang mit den Überlegungen in Kapitel 3.1.

In der Regel läßt sich Gleichung (4.4) nicht exakt lösen, und numerische Methoden stoßen bereits bei geringen Teilchenzahlen an ihre Grenzen. Beherrschbar wird das Problem jedoch in der Molekularfeld-Näherung (engl. mean field). Sie besteht darin, den Feldoperator Ψ durch seinen Erwartungswert $\langle \Psi(\vec{r}, t) \rangle \equiv \Phi(\vec{r}, t)$ zu ersetzen. Ein solcher Ansatz ist unter zwei Voraussetzungen sinnvoll. Zum ersten muß der Grundzustand des Systems nahezu alle Teilchen enthalten, was der Annahme entspricht, daß sich das Gas weit unterhalb der Übergangstemperatur befindet und die Wechselwirkung gering ist. Dann erzeugen und vernichten die Feldoperatoren hauptsächlich kondensierte Teilchen, und Konfigurationen mit N bzw. $N+1$ Atomen im Grundzustand sind physikalisch äquivalent. In diesem Fall kann man den ersten Kommutator in (4.3) vernachlässigen, wodurch die Feldoperatoren effektiv durch ein klassisches Feld mit einer definierten Phase ersetzt werden. Wie grob die Fehler sind, die dabei unterlaufen können, wird zum zweiten empfindlich von der Reichweite der Wechselwirkung abhängen. Durch die Beschränkung auf den Erwartungswert $\Phi(\vec{r}, t)$ vernachlässigt man nämlich sämtliche Korrelationen zwischen den Teilchen. Diese können aber den Beitrag der Wechselwirkung zum Hamilton-Operator (4.2) auf Skalen, auf denen V eine Rolle spielt, stark beeinflussen. Die Molekularfeldnäherung wird daher gut sein, wenn die Wellenfunktion über die Reichweite des Wechselwirkungspotentials nur wenig variiert. Genau dies wurde aber im Zusammenhang mit der Bornschen Näherung vorausgesetzt.

Ersetzt man in Gleichung (4.4) die Feldoperatoren durch ihren Erwartungswert $\Phi(\vec{r}, t)$, erhält man die Gross-Pitaevskii-Gleichung [86, 87]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + g|\Phi(\vec{r}, t)|^2 \right) \Phi(\vec{r}, t) \quad (4.5)$$

für den Erwartungswert². Sie beschreibt gleichzeitig die Bewegung eines Teilchens im äußeren Potential und dem durch alle kondensierten Teilchen zustande kommenden Molekularfeld. Im Kontext von Phasenübergängen zweiter Ordnung stellt $\Phi(\vec{r}, t)$ den Ordnungsparameter des Systems dar.

Im stationären Fall kann die triviale Zeitabhängigkeit gemäß $\Phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r})e^{-i\mu t/\hbar}$ absepariert werden, und man erhält schließlich die stationäre, nichtlineare Schrödingergleichung

$$\mu\phi(\vec{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + g|\phi(\vec{r})|^2 \right) \phi(\vec{r}) \quad (4.6)$$

für den Ordnungsparameter bzw. die *Kondensat-Wellenfunktion*. Über die Normierung $\int |\phi(\vec{r})|^2 d^3r = N_0$ hängt die Anzahl der kondensierten Atome mit dem chemischen Potential μ zusammen. Erwartungsgemäß erhält man im wechselwirkungsfreien Fall mit $g = 0$

² Analog zu den Hartree- bzw. Hartree-Fock-Gleichungen kann sie auch ausgehend vom Ritzschen Variationsprinzip gewonnen werden, wobei die Variation im Raum der Testwellenfunktionen durchgeführt wird, die sich als Produkt von N identischen Ein-Teilchen-Zuständen schreiben lassen (siehe z.B. [88]).

für die Dichteverteilung $n_0(\vec{r}) = |\phi(\vec{r})|^2$ in einem harmonischen Potential die Lösung (2.27) mit $\mu = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

Von dem Wechselwirkungsterm $gn(\vec{r})$ ausgehend, lassen sich bereits einige Prognosen mit Bezug auf den Grundzustand ableiten. Zunächst ist zu erkennen, daß es im Falle negativer Streulängen an Orten hoher Dichte zu einer Absenkung der Grundzustandsenergie kommt. Ein homogenes Gas mit negativer Streulänge wird daher unter dem Einfluß der attraktiven Wechselwirkung instabil sein (und Moleküle bilden), sobald der Grundzustand besetzt wird. Dieser Effekt kann in einem äußeren Potential verhindert werden. Hier kann die endliche kinetische Energie der Teilchen im Grundzustand (der sog. Quantendruck) die Wechselwirkungsenergie kompensieren. Erst wenn letztere mit zunehmender Anzahl kondensierter Teilchen überwiegt, wird das Gas instabil. Tatsächlich läßt sich die dann eintretende „Implosion“ der Wellenfunktion im Experiment beobachten [89, 90]. Eine anschauliche Erklärung dieses Schwellverhaltens findet sich für den Fall eines harmonischen äußeren Potentials in Referenz [91]: Aufgrund der minimalen Unschärfe des Grundzustandes kann die Ausdehnung der Wellenfunktion zunächst nicht, wie für den Kollaps des Gases erforderlich, abnehmen. Erst wenn die Wechselwirkungsenergie von der Größenordnung $\hbar\omega$ wird, ist die Besetzung angeregter Zustände möglich und die Wellenfunktion kann im Ortsraum schmaler werden. In der Tat bestimmt dieses Kriterium die maximale Anzahl kondensierter Atome in einem System mit negativer Streulänge. Mit ^7Li etwa lassen sich unter typischen experimentellen Bedingungen Kondensate mit gut 1000 Atomen erzeugen.

Der Vergleich mit der Energie $\hbar\omega$ hat auch für positive Werte von a eine hohe Aussagekraft. In diesem Fall wird die repulsive Mean-Field-Energie, sobald sie überwiegt, zu einer vergrößerten Ausdehnung des Grundzustands führen. Im Experiment kann sie leicht einige zehnmals größer als die Oszillatorlänge $\sqrt{\hbar/(m\omega)}$ werden, die man für ein ideales Gas erwarten würde. Unter diesen Umständen läßt sich die kinetische Energie der kondensierten Atome gegen die Wechselwirkungsenergie völlig vernachlässigen. Der Grundzustand ist dann vollständig durch die Form des äußeren Potentials, die Streulänge, die Masse und die Anzahl kondensierter Atome bestimmt. In dieser sog. Thomas-Fermi-Näherung, die Gegenstand des folgenden Abschnitts ist, vereinfacht sich die Gross-Pitaevskii-Gleichung erheblich.

In der Regel lassen sich (4.5) und (4.6) nicht analytisch lösen, mit numerischen Methoden kommt man jedoch häufig ans Ziel. Dies gilt auch für die Linearisierung und die zahlreichen Verallgemeinerungen der Gross-Pitaevskii-Gleichung, die ihren Einsatz auch ermöglichen, wenn bei höheren Temperaturen eine signifikante Anzahl von Atomen nicht kondensiert ist. Dann muß in einem Mean-Field-Ansatz auch die Wechselwirkung mit dem nichtkondensierten Gas berücksichtigt werden. Eine gute Übersicht liefern in diesem Zusammenhang die Beiträge von K. Burnett und A. Griffin in Referenz [24]. Allgemein ist die Übereinstimmung der Mean-Field-Theorie mit den Experimenten beeindruckend (eine Übersicht liefern etwa die Referenzen [26, 24]). Daher stellt der Einsatz der Gross-Pitaevskii-Gleichung im Zusammenhang mit der BEK gering wechselwirkender atomarer Gase eine Erfolgsgeschichte dar.

4.2 Hohe Teilchenzahlen: Die Thomas-Fermi-Näherung

Wie bereits erwähnt, kann die Wechselwirkungsenergie der Atome im Grundzustand beträchtlich höher werden als ihre kinetische Energie. Ausgehend von der Grundzustandsdichte (2.27) des harmonischen Potentials mit typischen Oszillationsfrequenzen von $\bar{\omega} = \omega \simeq 2\pi \times 150$ Hz, erhält man aus der Forderung $g\langle n_0 \rangle \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\hbar\bar{\omega}$ die kritische Teilchenzahl

$$N_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\bar{\omega}}{\omega} \frac{a_{\text{ho}}}{|a|} \simeq 100, \quad \text{mit} \quad a_{\text{ho}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad (4.7)$$

bei der die Wechselwirkung zwischen ^{87}Rb -Atomen einen zur kinetischen Energie vergleichbaren Beitrag liefert^{3,4}. Im Falle von ^7Li führt diese einfache Abschätzung zu $N_{\text{crit}} \simeq 1400$, in sehr guter Übereinstimmung mit der tatsächlich beobachteten maximalen Zahl von ca. 1200 kondensierten Atomen [89]. In ^{87}Rb -Experimenten können jedoch mehrere Millionen Atome kondensiert werden, und es ist daher klar, daß dann die Wechselwirkung den Grundzustand bestimmen wird.

In dieser Situation kann man den Operator der kinetischen Energie in Gleichung (4.6) vernachlässigen. Ausgehend von dem Ansatz eines effektiven, ortsabhängigen chemischen Potentials läßt sich zeigen, daß dies eine Analogie zur Thomas-Fermi-Näherung darstellt, die im Zusammenhang mit der Berechnung der Elektronendichte schwerer Atome auftaucht (auch lokaler Dichte-Ansatz genannt) [92]. Aus Gleichung (4.7) ist ersichtlich, daß $N_0 \gg N_{\text{crit}}$ der Forderung $N_0 a \gg a_{\text{ho}}$ entspricht. In der Thomas-Fermi-Näherung (im folgenden TF-Näherung genannt) wird die nichtlineare Schrödingergleichung (4.6) zu einer algebraischen Gleichung, die sich sofort nach der Dichteverteilung

$$n_0(\vec{r}) = |\phi(\vec{r})|^2 = \max \left\{ \frac{\mu - U(\vec{r})}{g}, 0 \right\} \quad (4.8)$$

des Kondensats auflösen läßt. Der Zusammenhang zwischen dem chemischen Potential und der Anzahl kondensierter Teilchen ergibt sich aus der Normierung der Kondensat-Wellenfunktion. Im harmonischen Potential (2.16) erhält man

$$\mu = \frac{1}{2} \hbar \omega \left(15 \frac{N_0 a}{a_{\text{ho}}} \right)^{2/5} \quad (4.9)$$

und eine parabelförmige Dichteverteilung (4.8). Sie stellt das Spiegelbild des äußeren Potentials bezüglich der Achse dar, die durch das chemische Potential gegeben ist. Die Wellenfunktion erreicht die maximale Ausdehnung

$$W_i = \sqrt{\frac{8\mu}{m\omega_i^2}}. \quad (4.10)$$

³ Es gilt $n_p = n_0(0) = \sqrt{8}\langle n_0 \rangle$, mit $\langle n_0 \rangle = \frac{1}{N_0} \int n_0^2(\vec{r}) d^3r$.

⁴ Zur Erinnerung: ω bezeichnet das geometrische, $\bar{\omega}$ das arithmetische Mittel der Oszillationsfrequenzen.

Damit gilt jetzt $W_i \propto 1/\omega_i$, anders als in einem idealen Gas, für das nach Gleichung (2.27) der Zusammenhang $a_{\text{ho},i} \propto 1/\sqrt{\omega_i}$ erwartet wird. Im Experiment kann die Ausdehnung W_i zur Bestimmung der Teilchenzahl gemäß

$$N_0 = \frac{1}{480} \frac{m^2 \omega_i^5}{\hbar^2 \omega^3 a} W_i^5 \quad (4.11)$$

herangezogen werden.

Zu beachten ist, daß mit der TF-Näherung nicht nur ein globales, sondern auch ein lokales Gültigkeitskriterium verbunden ist. Es ist intuitiv verständlich, daß die Voraussetzungen für die Vernachlässigung des Quantendrucks am äußersten Rand des Kondensats nicht erfüllt sind. In dem Randbereich mit einer charakteristischen Ausdehnung ΔR ist die Wellenfunktion durch die Beiträge der kinetischen Energie und der Lageenergie im äußeren Potential bestimmt. Dies führt dazu, daß die Wellenfunktion bei $R = W/2$ tatsächlich nicht mit unendlicher Steigung, sondern stetig differenzierbar verschwindet. Dieser Bereich ist durch das Gleichgewicht

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\Delta R^2} \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \Big|_R \Delta R = m \omega^2 R \Delta R \quad (4.12)$$

zwischen der Abnahme der kinetischen und der Zunahme der potentiellen Energie definiert [93, 26], wobei hier der Einfachheit halber ein isotropes Potential betrachtet wurde. Daraus ergibt sich das charakteristische Verhältnis

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{a_{\text{ho}}}{R} \right)^{4/3}. \quad (4.13)$$

Je kleiner es ist, desto sinnvoller ist die TF-Näherung.

In Abbildung 4.1 ist die Auswirkung der Wechselwirkung auf den Grundzustand veranschaulicht. Dabei wurden die für das Experiment typischen Parameter $\omega_x = \omega_y = 2\pi \times 240$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 24,5$ Hz und $N_0 = 10^6$ gewählt. Mit $W_z/(\sqrt{2} a_{\text{ho},z}) \simeq 25$ ist die Ausdehnung des wechselwirkenden Kondensats (c) etwa 25 Mal größer als die doppelte Standardabweichung des idealen Kondensats (b) im gleichen Potential. Entsprechend ist die zentrale Dichte infolge der repulsiven Wechselwirkung um ca. den Faktor 250 erniedrigt. Dafür, daß die TF-Näherung in dieser Situation gerechtfertigt ist, spricht auch das chemische Potential von $\mu/k_B \simeq 250$ nK, das die Energie $\hbar\omega$ fünfzigmal übertrifft. Wählt man für R und a_{ho} jeweils die geometrischen Mittel bezüglich der drei Raumrichtungen, erhält man nach (4.13) das charakteristische Verhältnis $\Delta R/R \simeq 0,03$. Damit reicht der „physikalische“ Bereich der TF-Parabel in Abbildung 4.1 bis auf etwa $1,5 \mu\text{m}$ an $R = W/2 = 45 \mu\text{m}$ heran. In diesem Zusammenhang erweist sich die Methode, auf die man in den meisten Fällen bei der Detektion des Kondensats zurückgreift, als vorteilhaft (siehe Kapitel 5). Dabei wird der Schatten, den die Atomwolke in einem nah-resonanten Laserstrahl durch Absorption erzeugt, auf eine Kamera abgebildet und die optische Dichte somit ortsaufgelöst gemessen. Bei dem Verfahren „integriert“ der Laserstrahl die Teilchendichte entlang seiner Propagationsrichtung auf, und der Beitrag der Randbereiche zum Signal wird weiter reduziert⁵.

⁵ Der gleiche Effekt liegt auch bei der Phasenkontrastmikroskopie des Kondensats vor.

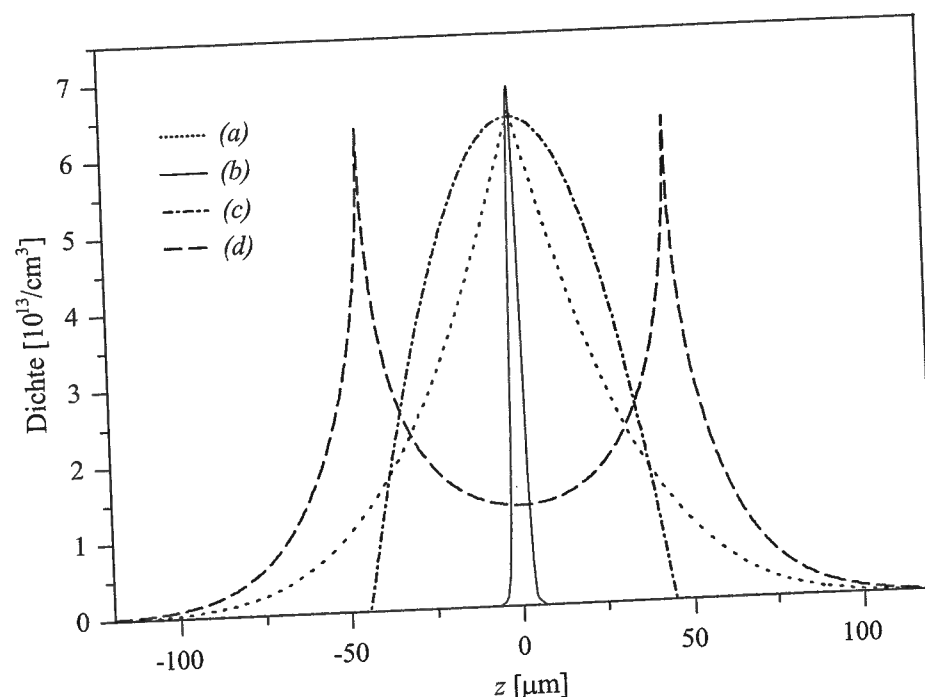


Abbildung 4.1: Auswirkungen der Wechselwirkung auf die Dichteverteilungen eines ^{87}Rb -Gases im harmonischen Potential mit $\nu_z = 24,5$ Hz und $\nu_x = \nu_y = 240$ Hz. (a): Verteilung von etwa 2×10^5 nichtkondensierten Teilchen bei $T = 300$ nK $\ll T_C$, ohne Berücksichtigung der Wechselwirkungen. (b): Wechselwirkungsfreies Kondensat mit 10^6 Atomen, um einen Faktor 2500 gestaucht. (c): Wechselwirkendes TF-Kondensat gleicher Teilchenzahl, um einen Faktor 10 gestaucht. (d): Wie (a), jedoch unter Berücksichtigung der durch (c) zustandekommenden, repulsiven Potentials. Im Vergleich zu (a) befinden sich bei $T = 300$ nK mehr als doppelt so viele Atome in angeregten Zuständen.

Auch wenn die Gross-Pitaevskii-Gleichung streng genommen nur im Limes $T \rightarrow 0$ gilt, kann ihr Einsatz sinnvoll sein, solange die Mean-Field-Wechselwirkung zwischen dem Kondensat und dem nichtkondensierten Teilensemble klein gegenüber der Wechselwirkung im Kondensat selbst bleibt. Dies ist der Fall, wenn die Dichte der sich in angeregten Zuständen befindlichen Atome viel geringer ist als jene des Kondensats. Eine solche Situation ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Unter Vernachlässigung aller Wechselwirkungen ist die Dichte $n_T(\vec{r})$ der nichtkondensierten Atome durch die Bose-Verteilung (2.25) gegeben (Kurve (a)). Bei $T = 300$ nK erreicht sie im Zentrum einen zehnmal geringeren Wert als die Dichte des wechselwirkenden Kondensats und entspricht nach Gleichung (2.19) insgesamt etwa 2×10^5 Atomen. Wegen $n_T(0)^2 < n_T(0)n_0(0) < n_0^2(0)$ muß im nächsten Schritt die Auswirkung des Kondensats auf die thermische Verteilung berücksichtigt werden, während das Kondensat zunächst als von der thermischen Wolke ungestört betrachtet werden kann. In dieser Näherung besteht die Rolle des Kondensats allein darin, das äußere Potential für die „idealen“ thermischen Atome um den Beitrag $2gn_0(\vec{r})$ abzuändern (für die daher immer noch $\mu_T = 0$ bzw. $\tilde{z} = 1$ gilt). Der Faktor 2 ist darauf zurückzuführen, daß der Beitrag in diesem Fall durch Stöße zwischen inkohärenten Atomen zustandekommt und

daher $g^{(2)}(0) = 2$ anzusetzen ist (vgl. auch Kapitel 3.2). Die Dichte in den angeregten Zuständen nimmt somit die Form

$$n_T(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left(e^{-\beta|\mu - U(\vec{r})|} \right) \quad (4.14)$$

an. Dabei ist μ das chemische Potential des Kondensats in der TF-Näherung. Für die thermischen Atome wird offensichtlich durch die Wechselwirkung das harmonische Potential über die Ausdehnung des Kondensats effektiv umgeklappt und somit repulsiv. Kurve (d) in Abbildung 4.1 entspricht der Verteilung (4.14) und verdeutlicht diesen Effekt, der in gewisser Weise zu einer Phasentrennung zwischen den Teilensembles führt⁶. Er beruht allein auf dem oben erwähnten Faktor 2 und damit auf der Kohärenz des Kondensats.

4.3 Auswirkungen auf den Phasenübergang

Eine der wichtigsten Fragen, die es im Zusammenhang mit der Wechselwirkung zu beantworten gilt, ist, inwieweit der Verlauf der Grundzustandsbesetzung über die Temperatur von ihr beeinflusst wird. Leider kann weder die Wechselwirkung der thermischen Atome untereinander noch jene zwischen diesen und dem Kondensat auf einfache Weise einbezogen werden. Ihre Berücksichtigung ist in der Nähe der Übergangstemperatur jedoch zwingend notwendig. Hier ist natürlich auch die Verwendung der Gross-Pitaevskii-Gleichung in der Form (4.6) nicht erlaubt. Nichtsdestotrotz lassen sich aus den obigen Ausführungen bereits einige qualitative Prognosen ableiten. Zum einen muß erwartet werden, daß die kritische Phasenraumdichte $n_p \lambda_T^3 = 2,612$ im Vergleich zum inhomogenen, idealen Gas bei einer niedrigeren Temperatur erreicht wird, weil die repulsive Wechselwirkung zu einer Reduktion der zentralen Dichte führt⁷. Zum zweiten resultiert der oben erläuterte Phasentrennungseffekt für das thermische Gas in einer Vergrößerung seines effektiven Speichervolumens. Dadurch finden bei der gleichen Temperatur mehr Teilchen in den angeregten Zuständen Platz, als in einem idealen Gas (siehe Abbildung 4.1). Schließlich ist davon auszugehen, daß aufgrund der Wechselwirkung die maximale Besetzung des Grundzustandes nicht mehr hundert Prozent beträgt. Ein extremes Beispiel für diesen Effekt stellt flüssiges ^4He dar. In diesem sehr stark wechselwirkenden System wächst die Besetzung des Grundzustandes nie über etwa 10 % hinaus [94, 95].

Ausgehend von der sog. Popov-Verallgemeinerung der Gross-Pitaevskii-Gleichung (4.6), die ihren Einsatz in der Nähe der Übergangstemperatur erlaubt [96], haben Giorgini et al. die Temperaturabhängigkeit der Grundzustandsbesetzung untersucht [97]. Auf die Methode kann an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden, von Bedeutung für diese

⁶ Die tatsächliche Dichteverteilung des thermischen Gases ist das Ergebnis aller Wechselwirkungen und wird aufgrund der Rückwirkung auf das Kondensat glatter als Kurve (d) in Abbildung 4.1 sein. Die Phasentrennung bleibt jedoch prinzipiell erhalten.

⁷ Das Gegenteil wird für negative Streulängen der Fall sein.

Arbeit ist jedoch das Ergebnis für die Verschiebung der Übergangstemperatur infolge der Wechselwirkung:

$$\frac{\delta T_c}{T_c^{(0)}} \simeq -1,33 \frac{a}{a_{ho}} N^{1/6}. \quad (4.15)$$

Für positive Streulängen hat die Verschiebung das gleiche Vorzeichen wie jene, die aufgrund der endlichen Teilchenzahl zustande kommt und durch Gleichung (2.22) gegeben ist. Während letztere jedoch mit zunehmender Teilchenzahl vernachlässigbar wird, muß gerade dann der Effekt der Wechselwirkung berücksichtigt werden. In heutigen Rb-Experimenten werden Verschiebungen von 10 % und mehr erwartet.

In der Mean-Field-Theorie befinden sich bei $T \rightarrow 0$ alle Atome im gleichen, niedrigsten Ein-Teilchen-Zustand (der jedoch durch die Wechselwirkung aller Atome bestimmt ist). Dieser Umstand ist eine direkte Folge der Vernachlässigung von Teilchenkorrelationen. Dadurch läßt sich die Grundzustandswellenfunktion des Systems als Produkt der Ein-Teilchen-Wellenfunktionen darstellen. In der exakten Theorie hingegen würde das Wechselwirkungsintegral im Hamilton-Operator (4.2) unter Berücksichtigung der Kommutatorrelationen (4.3) dazu führen, daß sich der Grundzustand des N-Teilchen-Systems nicht mehr als N-faches Produkt von Ein-Teilchen-Zuständen schreiben läßt. Das bedeutet de facto, daß sich selbst bei $T = 0$ aufgrund der Korrelationen, die durch die Wechselwirkung vermittelt werden, einige Teilchen in energetisch höheren Zuständen befinden, auch wenn es in diesem Fall streng genommen keinen Sinn mehr macht, von einzelnen Teilchen zu sprechen. Die Größe dieses neudeutsch als *quantum depletion* bezeichneten Effekts stellt ein Maß für die Güte der Mean-Field-Beschreibung des Systems dar. Ausgehend von einem lokalen Dichte-Ansatz läßt sich zeigen, daß die Anzahl N_{nc} nichtkondensierter Teilchen bei $T = 0$ in erster Ordnung durch

$$\frac{N_{nc}}{N} = \frac{5\sqrt{\pi}}{8} \sqrt{a^3 n(0)} \quad (4.16)$$

gegeben ist [98, 26]. Es ist also im wesentlichen das Kriterium für Verdünnung, das in diesem Zusammenhang wieder auftaucht. Unter typischen experimentellen Bedingungen beträgt der Effekt lediglich etwa 1 %. Damit ist das Erstaunliche an der BEK verdünnter atomarer Gase, daß sich die Wechselwirkung zwar auf der einen Seite dramatisch auf den Grundzustand auswirkt (s.o.), auf der anderen Seite aber wiederum so gering ist, daß sich das Gas in statistischer Hinsicht nahezu ideal verhält. Aus der Möglichkeit, die Streulänge über weite Bereiche zu variieren (siehe Kapitel 3.2), ergibt sich neuerdings die einmalige Perspektive, den Übergangsbereich zwischen dem idealen und dem stark wechselwirkenden Gas zu erkunden.

4.4 Freie Expansion als Signatur des Kondensats

In Kapitel 2.3 wurde darauf hingewiesen, daß die freie Expansion eines zuvor anisotrop gespeicherten idealen Kondensats auch anisotrop erfolgen muß. Ursächlich dafür ist die minimale Unschärfe des Grundzustands. Im TF-Regime ist diese Voraussetzung nicht

mehr erfüllt, und es stellt sich daher die Frage, inwieweit die Expansion als Signatur der BEK erhalten bleibt. Daß es überhaupt zu einer Expansion kommt, liegt in diesem Fall allein an der Wechselwirkungsenergie

$$E_{ww} = \frac{1}{2} \int g n_0^2(\vec{r}) d^3r = \frac{2}{7} \mu N_0 \propto N_0^{7/5}, \quad (4.17)$$

die im System gespeichert ist und während der Expansion in kinetische Energie umgewandelt werden kann.

Die freie Expansion des TF-Kondensats läßt sich klassisch verstehen [99]. In dem Gas wirkt auf ein Teilchen am Ort $\vec{r}$ die Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\nabla [U(\vec{r}, t) + g n_0(\vec{r}, t)], \quad (4.18)$$

die dem Gradienten der Gesamtenergie entspricht und im Gleichgewicht, also für $t < 0$, verschwindet. An dieser Gleichung ist bereits zu erkennen, daß die Expansion auch in diesem Fall anisotrop erfolgen wird, wenn das Speicherpotential selbst anisotrop ist: Mit dem Verschwinden des Potentials zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt die Expansion unter der Wirkung der Kraft $\vec{F}(\vec{r}, 0) = -\nabla g n_0(\vec{r}, 0) = \nabla U(\vec{r})$. Die Anfangsbeschleunigung in einer gegebenen Richtung hängt damit von der Steilheit des Speicherpotentials in dieser Richtung ab.

Im einfachsten Ansatz kann man davon ausgehen, daß die Form der Dichteverteilung während der Expansion in jeder Richtung erhalten bleibt. Dann bewegen sich die Atome entlang der Trajektorien

$$r_i(t) = \lambda_i(t) r_i(0), \quad \text{mit} \quad i = x, y, z, \quad (4.19)$$

deren Skalenparameter $\lambda_i(t)$ nicht vom Ort abhängen. Ausgehend von einem harmonischen Potential ist die Dichte zu einem beliebigen Zeitpunkt folglich durch

$$n_0(\vec{r}, t) = \max \left\{ \frac{\mu - \sum_i \frac{m \omega_i^2 r_i^2}{2 \lambda_i^2(t)}}{g \lambda_x(t) \lambda_y(t) \lambda_z(t)}, 0 \right\} \quad (4.20)$$

gegeben. Das Newtonsche Kraftgesetz $F_i(t) = m \ddot{r}_i(t)$ führt mit den Gleichungen (4.18), (4.19) und (4.20) sofort auf das Differentialgleichungssystem

$$\ddot{\lambda}_i(t) = \frac{\omega_i^2}{\lambda_i(t) \lambda_x(t) \lambda_y(t) \lambda_z(t)} \quad (4.21)$$

mit den Anfangsbedingungen $\lambda_i(0) = 1$ und $\dot{\lambda}_i(0) = 0$. Da es nicht vom Ort $r_i(0)$ abhängt, ist der Ansatz (4.19) der Dichteskalierung selbstkonsistent. Damit behält das Kondensat tatsächlich seine Parabelform, expandiert aber anisotrop, wenn zuvor mindestens zwei der Oszillationsfrequenzen verschieden waren. Das gleiche Ergebnis liefern quantenmechanische Rechnungen [99, 100, 101, 102]. Damit unterscheidet sich das Kondensat auch im

TF-Regime von einem thermischen Bose-Gas durch seine anisotrope Expansion, solange die Wechselwirkungsenergie des letzteren gegenüber seiner thermischen Energie vernachlässigbar ist (siehe auch Anhang A). Diese Voraussetzung ist bei $T > T_c$ gut erfüllt.

In den Experimenten, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführt wurden, kommt ein axialsymmetrisches äußeres Potential mit $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$ und $\epsilon = \omega_z/\omega_\perp \approx 0,1$ zum Einsatz. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die Skalenparameter nach ϵ entwickeln, und das Differentialgleichungssystem (4.21) läßt sich näherungsweise analytisch lösen [99]. In niedrigster Ordnung erhält man

$$\lambda_\perp(t) = \sqrt{1 + \omega_\perp^2 t^2} \quad (4.22)$$

und $\lambda_z(t) = 1$. Um eine Zeitabhängigkeit von λ_z zu erhalten, muß die zweite Ordnung in ϵ berücksichtigt werden, was auf

$$\lambda_z(t) = 1 + \epsilon^2 \left(\omega_\perp t \arctan(\omega_\perp t) - \ln \sqrt{1 + \omega_\perp^2 t^2} \right) \quad (4.23)$$

führt. Nach einer Zeit $t \approx \epsilon/\omega_\perp$ wird das ursprünglich zigarrenförmige Kondensat vorübergehend eine sphärische Form annehmen und im weiteren Verlauf der Expansion zunehmend zu einer Scheibe werden.

Um die Anisotropie der Expansion mit den Vorhersagen zu vergleichen, bietet es sich an, das Achsenverhältnis

$$\frac{W_z(t)}{W_\perp(t)} = \frac{\lambda_z(t)}{\lambda_\perp(t)} \frac{1}{\epsilon} \quad (4.24)$$

des Kondensats über die Expansionszeit aufzuzeichnen. Anders als bei der Untersuchung der Breiten $W(t)$, die von der Anzahl kondensierter Teilchen abhängen, ist man in diesem Fall allein auf die Kenntnis der Oszillationsfrequenzen angewiesen. Die Vorhersage (4.24) ist in sehr guter quantitativer Übereinstimmung mit unseren experimentellen Ergebnissen [103, 104].

Kapitel 5

Experimentelle Methoden

Das vorliegende Kapitel befaßt sich mit den experimentellen Methoden, die in dieser Arbeit zum Kühlen und Speichern neutraler Atome eingesetzt wurden. Um deren Einordnung zu erleichtern, wird zunächst der prinzipielle Ablauf des Experiments vorgestellt. Es folgt eine kurze Beschreibung der Schritte im einzelnen. Nicht eingegangen wird auf die Optimierung der magnetooptischen Dampfzellenfalle. Aufgrund der Schlüsselrolle, die ihr im Experiment zukommt, ist ihr ein eigenes Kapitel gewidmet.

5.1 Das Konzept des Experiments

In einem BEK-Experiment vollzieht das atomare Gas geradezu eine Odyssee im Phasenraum, die ihre Entsprechung in einem hohen technischen Aufwand hat. Dafür gibt es im wesentlichen zwei Gründe: Zum einen ist die Phasenraumdichte zu Beginn des Experimentes etwa 19 Größenordnungen von der kritischen Phasenraumdichte entfernt. Zum anderen ist es bis heute noch nicht gelungen, die BEK mit rein optischen Kühlmethoden zu erreichen. Zwar gibt es auf diesem Gebiet beeindruckende Fortschritte [105, 106], und es scheint nur eine Frage der Zeit zu sein, bis der Durchbruch gelingt, noch ist aber die Verdampfungskühlung als letzter Kühlschritt im Experiment unerlässlich. Ein Großteil des experimentellen Aufwandes ist darauf ausgelegt, die Startbedingungen für die Verdampfungskühlung zu optimieren.

So einfach nämlich das Prinzip der Verdampfungskühlung und deren Implementierung in das Experiment auch sind, so ineffizient ist das Verfahren an sich. Es beruht darauf, dem Ensemble kontinuierlich jene Teilchen zu entziehen, die überdurchschnittlich viel Energie besitzen. Dies ist möglich, weil durch elastische Stöße zwischen den verbleibenden Atomen immer wieder auch hochenergetische Teilchen erzeugt werden. Mit ihnen verliert das Gas stets mehr als die mittlere Teilchenenergie und kühlt somit ab. Die Nachteile der Methode liegen auf der Hand: Erstens fällt ein Großteil der Atome dem Kühlverfahren zum Opfer. Unter typischen Bedingungen müssen für jedes kondensierte Atom etwa tausend

Atome verdampft werden. Dies erschwert die Herstellung von Kondensaten hoher Teilchenzahl. Zweitens ist die Zeitskala, auf der der Prozeß abläuft, durch die Rate bestimmt, mit der das Gas hochenergetische Teilchen nachliefert. Insbesondere zu Beginn der Verdampfungskühlung ist diese in der Regel so gering, daß für den gesamten Kühlprozeß einige bis einige zehn Sekunden veranschlagt werden müssen¹. Während dieser Zeit muß gewährleistet sein, daß Verlustprozesse, die nicht durch die Verdampfung zustandekommen, mit viel geringeren Raten stattfinden. Da auch Stöße mit heißen Atomen aus dem Hintergrundgas von dieser Forderung betroffen sind, muß das zu kühlende Gas von äußerst gutem Vakuum umgeben sein. Dies ist freilich auch für die angestrebte Lebensdauer des Kondensats Voraussetzung. Der Experimentator steht somit vor dem Dilemma, einerseits möglichst viele Atome einfangen zu müssen und dies andererseits unter möglichst guten Vakuumbedingungen bewerkstelligen zu wollen.

Die einfachste Lösung dieses Problems besteht darin, den Einfang der Atome und die Verdampfungskühlung durch den Einsatz eines **Doppel-MOT-Systems**² räumlich zu trennen. Es besteht aus zwei magneto-optischen Fallen, die sich in zwei unterschiedlichen Bereichen eines Vakuumsystems befinden. Eine der beiden wird als sog. Dampfzellenfalle betrieben. Hier werden Atome aus dem Hintergrundgas eingefangen, dessen Partialdruck betrieben. Hier werden Atome aus dem Hintergrundgas eingefangen, dessen Partialdruck betrieben. Hier werden Atome aus dem Hintergrundgas eingefangen, dessen Partialdruck betrieben. Die mit sich von außen einstellen läßt und in der Größenordnung von 10^{-8} mbar liegt. Die mit Hilfe von Laserlicht gespeicherte und auf einige zehn bis einige hundert μ K vorgekühlte Atomwolke wird anschließend durch den Lichtdruck eines resonanten Laserstrahls in Richtung der zweiten MOT beschleunigt und in dieser eingefangen. Die Vakuumbedingungen am Ort der zweiten Falle (im folgenden als UHV-MOT bezeichnet) sind bei einem Druck von etwa 10^{-10} mbar sehr gut für die Verdampfungskühlung geeignet. Erreicht wird dies durch den Einsatz einer differentiellen Pumpstrecke, die so konzipiert ist, daß sie von der beschleunigten Atomwolke passiert werden kann. Der Transfer von Atomwolken in die UHV-MOT wird so oft wiederholt, bis einige 10^9 Atome zur Verfügung stehen.

Dem vergleichsweise geringen Aufwand, der zum Laden der UHV-MOT betrieben wird, steht ein beeindruckender Anstieg der Phasenraumdichte von etwa zwölf Größenordnungen gegenüber, wie in Abbildung 5.1 zu erkennen ist. An dieser Stelle stößt man jedoch an die Grenzen der konventionellen Laserkühlung: Die MOT beruht auf der Absorption und Emission von nahresonantem Licht. Die gleichen Prozesse sind es nun, die sowohl die Teilchendichte als auch die Temperatur der gespeicherten Atomwolke begrenzen. Mit der Dichte wächst auch die Wahrscheinlichkeit, daß ein spontan emittiertes Photon von einem benachbarten Atom reabsorbiert wird. Durch die Impulsüberträge bei einem solchen Photonen austausch werden die Atome auseinandergetrieben. Hinzu kommt, daß in einer MOT an Orten hoher Dichte Teilchenverluste durch sog. lichtunterstützte Stöße auftreten. Durch beide Effekte ist die Dichte auf etwa 10^{11} cm^{-3} beschränkt. Schließlich sind die Atome durch die ständigen Impulsüberträge der absorbierten und emittierten Photonen

¹ Wie die folgenden Ausführungen gilt dies insbesondere für BEK-Experimente der ersten Generation, wo die Verdampfungskühlung an magnetisch gespeicherten Atomen stattfindet. Bei einer optischen Speicherung lassen sich wesentlich günstigere Anfangsbedingungen realisieren, dafür wird der Prozeß gegen Ende ineffizienter [19].

² MOT steht für *magneto-optical trap*, die englische Bezeichnung der magneto-optischen Falle.

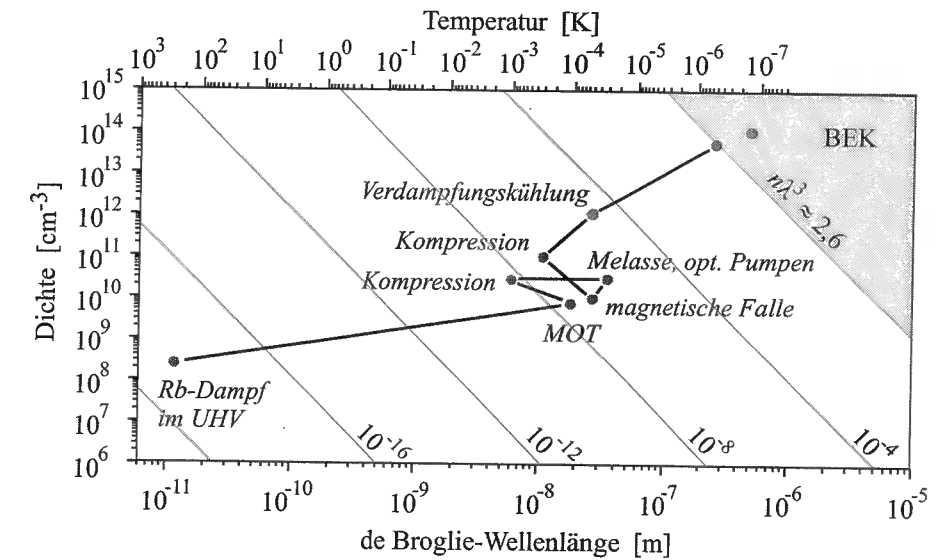


Abbildung 5.1: Die experimentelle Realisierung der BEK gleicht einer Odyssee im Phasenraum. In sechs Schritten wird die Phasenraumdichte des Rubidiumdampfes im UHV-System um 19 Größenordnungen erhöht.

einer Diffusion im Impulsraum unterworfen, die die Breite der Geschwindigkeitsverteilung und mit ihr die Temperatur des Gases auf einige $100 \mu\text{K}$ nach unten begrenzt.

Aus obigen Gründen ist die Phasenraumdichte eines magneto-optisch gespeicherten Alkali-Gases typischerweise etwa sieben bis acht Größenordnungen geringer als für die BEK erforderlich. Diese Lücke wird durch die Verdampfungskühlung geschlossen. Da die Anwesenheit nahresonanten Lichts von nun an vermieden werden muß, wird das Gas vor dem letzten Kühlschritt in eine **magnetische Falle** überführt³. Diese ist der UHV-MOT räumlich genau überlagert. Der Transfer geschieht durch instantanes Umschalten zwischen den beiden Fallen. Da die Wechselwirkung der Atome mit dem Magnetfeld von deren magnetischer Quantenzahl abhängt, wird die Wolke vor dem Transfer durch **optisches Pumpen** polarisiert. Soll schließlich die Phasenraumdichte bei der Überführung des Gases nicht abnehmen, muß das magnetische Speicherpotential so beschaffen sein, daß Temperatur und Dichte der Atomwolke bei dem Transfer erhalten bleiben.

Es zeigt sich jedoch, daß die elastische Stoßrate $\gamma_{el} \propto n\sigma_s\sqrt{T}$ selbst nach einem optimalen Transfer in die magnetische Falle noch zu klein ist, um eine effiziente Verdampfungskühlung zu ermöglichen: Im Falle von Rubidium beträgt der elastische s-Wellen-Stoßquerschnitt (3.14) bestenfalls ein Hundertstel des Absorptionsquerschnitts für Licht mit den für die MOT typischen Parametern. Das bedeutet, daß die Dichte durch Reabsorption auf Werte begrenzt ist, bei denen die mittlere freie Weglänge $1/(n\sigma_s)$ eines Atoms viel größer als die Ausdehnung der Wolke ist. Daher muß ein Atom das Gas häufig durchqueren, um einmal zu stoßen. Vor der Verdampfungskühlung sind drei weitere Schritte erforderlich, um die Effizienz des Prozesses zu steigern.

³ Eine Alternative hierzu stellt die Speicherung in einer weit verstimmtten optischen Dipolfalle dar [19].

Zwei davon erfolgen noch vor dem Transfer in die magnetische Falle: Zunächst wird die Atomwolke in der UHV-MOT innerhalb von 100 ms durch die Erhöhung der Potentialsteilheit **komprimiert**. Dabei läßt sich die Dichte bei nahezu konstanter Teilchenzahl in etwa verdoppeln. Dies ist möglich, da lichtunterstützte Stöße auf einer solch kurzen Zeitskala die Teilchenzahl nicht signifikant reduzieren. Im Anschluß daran wird die UHV-MOT abgeschaltet und die Atomwolke innerhalb von 5 ms in einer sog. **optischen Melasse** auf etwa $40\text{ }\mu\text{K}$ gekühlt. Während dieses auch als Polarisationsgradientenkühlen bekannten Verfahrens bleibt die Dichte der Wolke nahezu erhalten. Ausgehend von den Verhältnissen in der UHV-MOT wird die Phasenraumdicke durch die beiden Schritte um etwa zwei Größenordnungen erhöht. Das bedeutet auch, daß nun auf dem Weg zur BEK weniger Atome verdampft werden müssen.

Der letzte Schritt vor der Verdampfungskühlung findet nach dem Transfer in die magnetische Falle statt und besteht in der **adiabatischen Kompression** der Atomwolke. Dazu wird innerhalb von 4 s die Steilheit des Speicherpotentials so weit wie technisch möglich erhöht. Die Phasenraumdicke des Gases bleibt dabei in guter Näherung erhalten, die mittlere Stoßrate wächst jedoch etwa von 3/s auf 40/s an und bietet schließlich gute Voraussetzungen für den letzten Kühlschritt.

Das „**Verdampfen**“ erfolgt durch Elektronenspinresonanz-Übergänge zwischen Zeeman-Zuständen des Atoms. Sie werden von einem Radiofrequenz-Feld getrieben, das von einer Antenne in der unmittelbaren Umgebung der Wolke abgestrahlt wird. Durch die Speicherung in einem Magnetfeldminimum ist die Energieselektivität des Prozesses gewissermaßen bereits in das System eingebaut worden: Da die Zeeman-Aufspaltung der Atome in dem inhomogenen Magnetfeld ortsabhängig ist und Elektronenspinresonanz-Übergänge eine geringe Linienbreite aufweisen, läßt sich die Resonanzbedingung auf eine scharf definierte Äquipotentialfläche eingrenzen. Je mehr kinetische Energie ein Atom am Potentialminimum, also im Zentrum der Wolke besitzt, bei desto höheren Magnetfeldern liegt sein klassischer Umkehrpunkt. Ist die Resonanzbedingung bei hohen Magnetfeldern erfüllt, werden nur energiereiche Atome adressiert. Deren ursprünglich parallel zum Magnetfeld ausgerichtete Spins werden bei dem Übergang antiparallel ausgerichtet. Dadurch befinden sich die Atome plötzlich auf einem Potentialberg und werden aus der Speicherregion heraus beschleunigt. Während des Kühlprozesses wird die Radiofrequenz kontinuierlich von hohen zu niedrigen Werten durchgestimmt, wodurch der stetig abnehmenden Temperatur der Atomwolke Rechnung getragen wird. Nach 10 bis 20 s setzt die Kondensation bei einer Temperatur von knapp $1\text{ }\mu\text{K}$ und einer Teilchenzahl von knapp 10 Millionen Atomen ein.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Messungen an zwei Apparaturen durchgeführt. An der Universität Konstanz wurden Kondensate von Herbst 1997 bis Herbst 1999 erzeugt. Dieses Experiment ist in der Dissertation von U. Ernst auf dem Stand vom Frühjahr 1998 dokumentiert [32] und wird daher in dieser Arbeit weniger ausführlich beschrieben, sofern in der Folgezeit keine Änderungen vorgenommen wurden. Der Umzug der Arbeitsgruppe im Herbst 1999 an das MPQ in München bot die Gelegenheit, wichtige Erfahrungen aus den Konstanzer Jahren in den Aufbau einer neuen Apparatur einfließen zu lassen. Die Ziele dabei waren, zum einen die Repetitionsrate und die Reproduzierbarkeit des Experimentes zu verbessern und zum anderen die Kondensation mit höheren Teilchenzahlen zu erreichen.

Dem Münchner System sind die Kapitel 7 und 8 gewidmet. In ihrem prinzipiellen Ablauf, dessen Beschreibung nun folgt, unterscheiden sich die beiden Experimente jedoch nicht.

5.2 Die magnetooptische Falle

Bald fünfzehn Jahre nach ihrer ersten Realisierung [14] hat sich die magnetooptische Falle als eines der wichtigsten Instrumente der Atomphysik etabliert. Sie wird heute in Experimenten zur Präzisionsspektroskopie an Atomen und Molekülen, zur Stoßphysik, zur Atom- und Quantenoptik und zur Quanteninformationsverarbeitung eingesetzt. Nicht zuletzt ihre Entwicklung ist im Jahre 1997 mit der Verleihung des Nobelpreises an Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji und William D. Phillips gewürdigt worden.

Dieser Erfolg ist darauf begründet, daß sich mit einer MOT neutrale Atome einfangen, speichern und auf Temperaturen in der Größenordnung von $100\text{ }\mu\text{K}$ kühlen lassen. Zudem steht diesem Potential ein verhältnismäßig geringer technischer Aufwand gegenüber. Während ersteres die MOT zum zentralen Bestandteil eines Experimentes zur BEK neutraler Atome macht, ist es auch letzterem zu verdanken, daß im sechsten Jahr nach der ersten Beobachtung [9] bereits über dreißig Arbeitsgruppen in zehn Ländern in der Lage sind, Kondensate zu erzeugen.

5.2.1 Die Spontankraft

Absorption und Emission eines Photons übertragen auf ein Atom jeweils den Rückstoß $\hbar\vec{k}$. Bei der Absorption vieler Photonen aus einem gerichteten Lichtfeld addieren sich die Rückstöße der Photonen zu einem Nettoimpuls. Anders bei der spontanen Emission: Da sie ungerichtet ist, verschwindet ihr Impulsübertrag im Mittel über viele Prozesse. In einem gerichteten Lichtfeld hat daher die Absorptionsrate des Atoms ihre Entsprechung in einem sich zeitlich ändernden Impuls und somit in einer auf das Atom wirkenden Kraft konstanter Richtung. Sie kann beachtliche Auswirkungen haben: Unter ihrem Einfluß lassen sich Atome bis zu zehntausendmal stärker beschleunigen als im Gravitationsfeld. Weil sie erst durch den besonderen Charakter der spontanen Emission zustande kommt, wird sie häufig als „Spontankraft“ bezeichnet. In einer MOT gelingt es, dieser Kraft durch Nutzung des Doppler- und des Zeeman-Effektes eine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und vom Ort des Atoms aufzuprägen. Dadurch können Atome mit Hilfe von Licht sowohl eingefangen als auch gekühlt werden.

Die dazu erforderliche Anordnung ist schematisch in Abbildung 5.2 dargestellt. Als einfachstes Beispiel wird ein Zwei-Niveau-Atom mit den Zuständen $|F_g = 0\rangle$ und $|F_e = 1\rangle$ in einer Dimension betrachtet. Es befindet sich in einem inhomogenen Magnetfeld der Form $B(z) = bz$ und wird von links und rechts mit zirkular polarisiertem Licht der Kreisfrequenz ω_L beleuchtet. Das Licht ist gegenüber der atomaren Resonanz um $\delta = \omega_L - \omega_0$ „rotverstimmt“. Bezüglich der lokalen Magnetfeldrichtung hat der elektrische Feldvektor der beiden Strahlen entgegengesetzten Drehsinn. Die Zeeman-Aufspaltung des angereg-

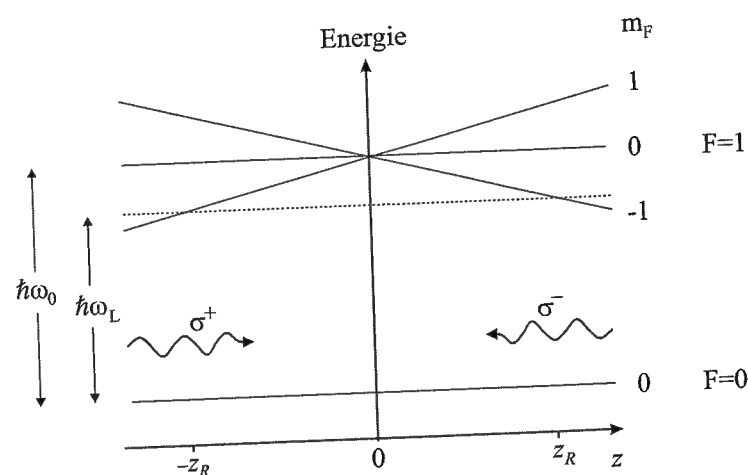


Abbildung 5.2: Funktionsprinzip der MOT. Gezeigt ist die Zeeman-Aufspaltung eines Modellatoms in einem Magnetfeld der Form $B(z) = bz$. Sie bewirkt, daß sich die Absorptionsraten des Atoms aus zwei gegenläufigen Strahlen unterscheiden, wenn deren Polarisationen entgegengesetzten Drehsinn haben.

ten Zustands bewirkt, daß sich das Atom bei $\pm z_R$ mit dem Licht in Resonanz befindet. Unter Berücksichtigung der Auswahlregeln kann das Atom an beiden Orten jedoch nur aus jeweils einem der Strahlen Photonen absorbieren. Durch die entsprechende Wahl der Feldpolung bzw. der Polarisationen läßt sich also erreichen, daß die Spontankraft stets zum Ursprung gerichtet ist. Unter ihrem Einfluß wird daher das Atom gespeichert.

Nun muß noch die Geschwindigkeit v_z des Atoms in die Überlegungen einbezogen werden. Im Ruhesystem des bewegten Atoms unterscheiden sich aufgrund des Doppler-Effektes die Verstimmungen der beiden Strahlen um $2kv_z$. Daher werden die Positionen der beiden Resonanzen gemäß $\pm z_R \rightarrow \pm z_R \mp kv_z$ geschwindigkeitsabhängig. Je schneller sich etwa das Atom vom Zentrum der Falle aus nach rechts bewegt, desto näher rückt z_R an den Ursprung und desto größer ist somit die rücktreibende Kraft. Sie erhält in dieser Situation also zusätzlich den Charakter einer Reibungskraft. Unter ihrem Einfluß wird das Gas in einer MOT gekühlt (man spricht in diesem Zusammenhang von „Dopplerkühlung“). Interessant ist die Situation, in der die Doppler-Verstimmung kv_z größer als die Zeeman-Aufspaltung $\mu bz_R/\hbar$ ist. In diesem Fall absorbiert ein Atom, das sich nach rechts bewegt, sich aber noch links vom Ursprung befindet, bevorzugt aus dem Strahl, der ihm entgegenläuft. Für schnelle Atome zeigt daher die Spontankraft stets vom Ursprung weg. Dies ermöglicht den Einfang der Atome.

Quantitativ ergibt sich die Spontankraft aus der Differenz der spontanen Streuraten [107]

$$n_{\sigma^{\pm}} = \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_S}{1 + I/I_S + 4(\delta \mp \mu bz/\hbar \mp kv_z)^2/\Gamma^2}, \quad (5.1)$$

wo Γ die Linienbreite, I_S die Sättigungsintensität und μ das magnetische Moment des angeregten Zustands darstellen. Für $|(\mu bz/\hbar + kv_z)/\delta| \ll 1$, also Atome, die sich langsam in unmittelbarer Umgebung des Ursprungs bewegen, lassen sich die Raten (5.1) entwickeln.

Die Spontankraft $F(z, v_z) = \hbar k(n_{\sigma^+} - n_{\sigma^-})$ erhält dann in niedrigster Ordnung von z und v_z die Form

$$F(z, v_z) \simeq \kappa z + \beta v_z \quad (5.2)$$

mit den Koeffizienten

$$\kappa = \frac{8 k \mu b}{\Gamma} \frac{\delta \frac{I}{I_S}}{\left(1 + \frac{I}{I_S} + 4 \frac{\delta^2}{\Gamma^2}\right)^2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{8 \hbar k^2}{\Gamma} \frac{\delta \frac{I}{I_S}}{\left(1 + \frac{I}{I_S} + 4 \frac{\delta^2}{\Gamma^2}\right)^2}. \quad (5.3)$$

Für $\delta < 0$ ist die Bewegungsgleichung des Atoms unter dem Einfluß der Kraft (5.2) die eines gedämpften harmonischen Oszillators.

In drei Dimensionen besteht die experimentelle Anordnung aus drei orthogonalen Paaren gegenläufiger Laserstrahlen, die sich in einer Vakuumapparatur am gleichen Ort kreuzen. Jeder der zunächst linear polarisierten Strahlen durchläuft vor dem Eintritt in das Vakuum eine Viertelwellenplatte, mit deren Hilfe sich die jeweils erforderliche zirkuläre Polarisation einstellen läßt. Zwei koaxiale Spulen mit entgegengesetzter Stromrichtung erzeugen einen dreidimensionalen magnetischen Quadrupol, dessen Ursprung mit dem Kreuzungspunkt der Strahlen zusammenfällt. Auf diese Weise wird in jeder der drei Raumrichtungen die in Abbildung 5.2 dargestellte Konfiguration realisiert.

Die Gleichgewichtstemperatur

Im obigen Modell ist die Diffusionsbewegung des Atoms nicht berücksichtigt. Sie ist das Ergebnis der Photonenrückstöße bei Emission und Absorption, da jede der Absorptionsraten für sich genommen, anders als ihre Differenz, nie verschwindet. Die Diffusion im Impulsraum bewirkt eine „Aufheizung“ des Atoms und stellt einen Konkurrenzprozeß zu der Dissipation unter dem Einfluß des Reibungsterms βv_z dar. Im Gleichgewicht bleibt daher die mittlere kinetische Energie des Atoms endlich. Über den Gleichverteilungssatz läßt sich dieser Energie eine Temperatur zuordnen.

Im Rahmen des oben diskutierten eindimensionalen Modells erhält man eine einfache Abschätzung der Gleichgewichtstemperatur unter der Annahme geringer Intensität, wenn Absorptionen und Emissionen völlig unkorreliert und damit Poisson-verteilt sind [108, 109]. Die mittlere Anzahl der in einem festen Zeitintervall absorbierten oder emittierten Photonen entspricht in diesem Fall gleichzeitig der Varianz ihrer Verteilung. Der mittlere quadratische Impuls wächst dann gemäß $\langle p_z^2 \rangle = (n_{\sigma^+} + n_{\sigma^-}) t \hbar^2 k^2$ linear mit der Zeit. Die Zeitableitung dieser Größe ist ein Maß für die Rate, mit der die kinetische Energie des Atoms zunimmt und läßt sich über die Beziehung $d\langle p_z^2 \rangle/dt = 2p dp/dt = 2pF$ formal dem Einfluß einer Kraft zuschreiben. Im Gleichgewicht hält sie sich mit der Reibungskraft βv_z die Waage. Mit $p v_z \stackrel{!}{=} k_B T$ ergibt sich die Temperatur aus dieser Bedingung zu

$$T = \frac{\hbar}{k_B} \frac{\Gamma^2 + 4\delta^2}{8|\delta|}. \quad (5.4)$$

Sie ist von der Verstimmung abhängig und erreicht für $\delta = -\Gamma/2$ das Minimum $T_D = \hbar\Gamma/(2k_B)$. Diese als *Dopplerlimit* bekannte Temperatur beträgt für Rubidium $143 \mu\text{K}$.

In der Regel werden in einer MOT geringfügig tiefere (sog. Sub-Doppler-)Temperaturen gemessen [110]. Die ersten Beobachtungen dieser Tatsache gaben insofern Rätsel auf, als Abweichungen von der Poisson-Statistik im Falle hoher Intensität und die Reabsorption von Photonen im Falle hoher Teilchenzahlen den Effekt der Diffusion verstärken [108, 111]. Unter realistischen Bedingungen war also mit höheren Temperaturen zu rechnen, als sie von Gleichung (5.4) prognostiziert werden. Sub-Doppler-Temperaturen sind das Ergebnis eines zusätzlichen Kühlmechanismus. Er wird durch die Bewegung des Atoms in den Polarisationsgradienten induziert, die sich durch die Überlagerung der sechs Laserstrahlen ausprägen. In einer MOT ist dieser Mechanismus auf die Region geringen Magnetfeldes beschränkt und spielt daher keine entscheidende Rolle. Er wird jedoch im späteren Verlauf des Experiments dazu genutzt, die Temperatur der Atomwolke *nach* der magnetooptischen Speicherung um etwa eine Größenordnung zu reduzieren (siehe Kapitel 5.4.2).

5.2.2 Die Populationsdynamik

Zum Laden einer MOT kommen zwei Mechanismen in Frage: Der Einfang von Atomen aus einem gepulsten oder einem Dauerstrich-Atomstrahl einerseits und jener aus einem thermischen Hintergrundgas andererseits. Beide Mechanismen gibt es mittlerweile in einer Vielzahl von technischen Varianten. In der vorliegenden Arbeit sind zwei dieser Varianten realisiert. Die im Experiment als „Teilchenquelle“ eingesetzte MOT wird aus dem Rubidium-Hintergrundgas eines Vakuumsrezipienten geladen und ist damit eine sog. *Dampfzellenfalle* [112]. Aus dieser Falle wird ein gepulster Atomstrahl ausgekoppelt und in einer zweiten MOT wieder eingefangen (man spricht daher von einem „Doppel-MOT-System“ [113]). Für das Experiment ist die Populationsdynamik der Dampfzellenfalle entscheidend, auf die in den folgenden Abschnitten eingegangen wird.

Laderate einer Dampfzellenfalle

Zwei Größen bestimmen die Laderate einer Dampfzellenfalle: Die Oberfläche A ihres Einfangvolumens und ihre sog. Einfanggeschwindigkeit v_c . Hierbei handelt es sich um die Geschwindigkeit, die ein Atom aus dem Hintergrundgas höchstens besitzen darf, um unter dem Einfluß der Spontankraft soweit abgebremst zu werden, daß seine kinetische Energie nicht zur Überwindung des Speicherpotentials ausreicht. Die Laderate ergibt sich dann durch Integration des differentiellen Teilchenflusses

$$dR(v) = \rho(v) v \cos \theta d^3v dA, \quad (5.5)$$

der durch das Oberflächenelement dA in Richtung der Flächennormalen in das Einfangvolumen eintritt. Dabei ist

$$\rho(v) = n_{bg} \left(\frac{m}{2\pi k_B T_{bg}} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T_{bg}} \right) \quad (5.6)$$

die über den Ort abintegrierte Phasenraumverteilungsfunktion des Hintergrundgases mit der Dichte n_{bg} und der Temperatur T_{bg} . Die Integration hat über die Oberfläche A , alle Geschwindigkeiten kleiner v_c und den halben Raumwinkel zu erfolgen. Sie führt zu dem Ergebnis

$$R = \frac{n_{bg} A}{4\sqrt{\pi}} \frac{v_c^4}{v_{bg}^3} \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{v_c^2}{v_{bg}^2} \right) \right] \approx \frac{n_{bg} A}{4\sqrt{\pi}} \frac{v_c^4}{v_{bg}^3}, \quad \text{mit } v_{bg} = \sqrt{\frac{2k_B T_{bg}}{m}}. \quad (5.7)$$

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_{bg} der Hintergrundgasatome liegt in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit.

Das Einfangvolumen läßt sich als Kubus mit der Oberfläche $A = 6d^2$ abschätzen, wo d den $1/e^2$ -Intensitätsdurchmesser der Laserstrahlen bezeichnet. Zu einer einfachen Abschätzung für die Einfanggeschwindigkeit gelangt man im Rahmen des oben diskutierten eindimensionalen Modells [114]. Es wird angenommen, daß ein Atom mit der Anfangsgeschwindigkeit v_c nach Durchlaufen der Strecke $d/2$ im Fallenzentrum zum Stillstand kommt und dabei im Mittel der halben maximalen Spontankraft $\langle F \rangle = m\langle a \rangle \approx \hbar k \Gamma/4$ ausgesetzt ist (das Atom ist somit mehrfach gesättigt). Mit $v_c = \sqrt{\langle a \rangle d}$ gilt dann

$$v_c = \sqrt{\frac{\hbar k \Gamma}{4m}} d. \quad (5.8)$$

Unter typischen experimentellen Bedingungen liegt die Einfanggeschwindigkeit im Bereich $10 \dots 40 \text{ m/s}$. Die Einfangrate (5.7) ergibt sich schließlich zu

$$R = \frac{6}{64\sqrt{\pi}} \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma^2}{m^2} \frac{n_{bg}}{v_{bg}^3} d^4. \quad (5.9)$$

Prognosen, die auf Gleichung (5.9) oder ähnlichen Abschätzungen beruhen, liegen in der Regel um bis zu einer halben Größenordnung unterhalb der experimentellen Ergebnisse (siehe Kapitel 8 und z.B. Referenz [115]). In Anbetracht des vergleichsweise naiven Modells ist eine solche Übereinstimmung erstaunlich gut. Da für den Einfang hauptsächlich der gegenläufige Laserstrahl verantwortlich ist, erwartet man, daß der Einfangbereich größer ist als das im Modell angesetzte Schnittvolumen der Laserstrahlen. Vor allem aber resultiert die Annahme einer geraden Trajektorie zum Fallenzentrum in einer unteren Abschätzung für die Einfanggeschwindigkeit.

Der Ausdruck (5.9) lehrt insbesondere, daß der Strahldurchmesser eine entscheidende Rolle bei der Optimierung der Laderate spielt. Wie dies im Experiment geschieht, ist in Kapitel 8 beschrieben.

Verlustrate durch Stöße mit dem Hintergrundgas

In einer Dampfzellenfalle bedingt die Anwesenheit des Hintergrundgases auch erhebliche Teilchenverluste. Aus der Einfanggeschwindigkeit der MOT läßt sich die Tiefe des Speicherpotentials zu etwa $E_T/k_B = 1 \dots 5 \text{ K}$ abschätzen. Da sich das Hintergrundgas bei

Raumtemperatur befindet, wird bei einem Stoß zwischen einem freien und einem gespeicherten Atom in der Regel mehr Energie auf letzteres übertragen, als es zum Verlassen der Falle benötigt.

Während Stöße zwischen gespeicherten Atomen aufgrund deren geringer Energie quantenmechanisch behandelt werden müssen (vgl. Kapitel 3.1), läßt sich im vorliegenden Fall der Streuprozess klassisch beschreiben. Dies ist zum einen durch die hohe Energie der Atome im Hintergrundgas und zum zweiten durch die Tatsache bedingt, daß Verluste die Folge eines vergleichsweise hohen Impulsübertrags sind. Quanteneffekte spielen keine Rolle, weil diesem Impulsübertrag eine de Broglie-Wellenlänge entspricht, die viel kleiner als der Stoßparameter ist.

Um die Verlustrate zu quantifizieren, muß allein der Stoßparameter b_T bestimmt werden, der zu dem Energieübertrag E_T führt. Da alle kleineren Stoßparameter in höheren Energieüberträgen resultieren, ist die Verlustrate durch das Integral über den differentiellen Teilchenfluß

$$d\gamma(v_{bg}) = \frac{1}{4} v_{bg} n_{bg} f(v_{bg}) dv_{bg} dA(b_T) \quad (5.10)$$

bestimmt, der durch die Oberfläche $A(b_T)$ einer Kugel mit dem Radius b_T tritt und mit der Geschwindigkeitsverteilung $f(v_{bg})dv_{bg}$ bzw. der Dichte n_{bg} des Gases verknüpft ist⁴. Für die Bestimmung des Stoßparameters muß nur der langreichweitige Bereich des Wechselwirkungspotentials bekannt sein. Dies ist darin begründet, daß der geringe Energieübertrag Kleinwinkelstreuung impliziert. Im Falle homonuklearer Stöße oder solcher zwischen Alkali- und Edelgasatomen handelt es sich hierbei um die van der Waals-Wechselwirkung $V = -C_6/r^6$ (siehe Kapitel 3.2). Da sich jedoch in der MOT eine signifikante Anzahl von Atomen in angeregten Zuständen befinden kann und im Vakuum zumeist das einzufangende Element dominiert, ist auch die resonante Dipolwechselwirkung $V = -C_3/r^3$ zwischen einem angeregten und einem Grundzustandsatom in Betracht zu ziehen⁵.

Für ein Potential der Form C_α/r^α liefert die klassische Streutheorie in der sog. Impulsnäherung den Zusammenhang

$$b_{T,\alpha}(v_{bg}) = \left(\frac{\alpha C_\alpha a_\alpha}{p_T v_{bg}} \right)^{1/\alpha} \quad \text{mit} \quad a_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \quad (5.11)$$

zwischen dem Stoßparameter und dem Impuls $p_T = \sqrt{2mE_T} = mv_c$, den ein Atom benötigt, um die Falle zu verlassen [116]. Die Ratenkonstante für Hintergrundgasstöße ergibt sich dann durch Integration von $n_{bg}[4\pi b_{T,\alpha}^2(v_{bg})]v_{bg}f(v_{bg})dv_{bg}/4$ über die Geschwin-

⁴ Dieser Ausdruck ist analog zu (5.5), bis auf die Tatsache, daß hier die Raumwinkelintegration bereits durchgeführt wurde und den Faktor 1/4 geliefert hat.

⁵ Im Falle von Rb ist die Lebensdauer des angeregten Zustands $5p^2P_{3/2}$ etwa tausendmal länger als die typische Dauer der hier betrachteten Stöße. Deswegen spielt die Dynamik der inneren Freiheitsgrade keine Rolle.

Stoßpartner	m_{bg} [u]	α	C_α [a.u.]	Ref.	$\gamma_\alpha v_c^{2/\alpha} / p_{bg}$ [$s^{-1}(m/s)^{2/\alpha} mbar^{-1}$]
Rb-Rb	85,47	6	4700	[30]	$8,33 \times 10^7$
Rb*-Rb	85,47	3	18,4	[117]	$2,33 \times 10^9$
Rb-H ₂	2,02	6	140	[118]	$9,01 \times 10^7$
Rb-He	4	6	36,6	[118]	$4,58 \times 10^7$
Rb-Ne	19,99	6	71,7	[119]	$3,35 \times 10^7$
Rb-Ar	39,96	6	290,9	[119]	$4,25 \times 10^7$

Tabelle 5.1: Ratenkonstanten für Verluste von Rubidiumatomen aus einer MOT (Einfanggeschwindigkeit v_c) durch Stöße mit verschiedenen Hintergrundgasen (Partialdrücke p_{bg}).

digkeit, wobei die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung anzusetzen ist. Für ein Gas mit der Masse m_{bg} lautet das Ergebnis:

$$\gamma_\alpha = 2\sqrt{\pi} \Gamma\left[\frac{2\alpha-1}{\alpha}\right] \left(\frac{2k_B T}{m_{bg}}\right)^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}} \left(\frac{\alpha C_\alpha a_\alpha}{p_T}\right)^{\frac{2}{\alpha}} n_{bg}. \quad (5.12)$$

In Tabelle 5.1 sind die Ratenkonstanten für einige der potentiellen Stoßpartner in einer Rubidium-Dampfzellenfalle angegeben, deren Hintergrundgas sich bei Raumtemperatur befindet⁶. Dabei sind $p_{bg} = n_{bg} k_B T$ der Partialdruck des Hintergrundgases und v_c die Einfanggeschwindigkeit der MOT. Auffällig ist, daß die Verluste durch Stöße zwischen Grundzustandsatomen nur gering von der Potentialtiefe und von der Zusammensetzung des Hintergrundgases abhängen.

Die Ratenkonstante wächst jedoch mit der relativen Besetzung der angeregten Zustände in der MOT, wie am Beispiel des Stoßpaares Rb*-Rb zu erkennen ist. Unter der Voraussetzung, daß im Zentrum der MOT alle Übergänge zwischen den Zeeman-Niveaus des angeregten Zustands $|F_e = 3\rangle$ und des Grundzustands $|F_g = 2\rangle$ getrieben werden und Kohärenzen keine Rolle spielen, ist die gesamte (relative) Besetzung angeregter Zustände durch

$$\zeta(I, \delta) = \frac{7s(I, \delta)}{15 + 12s(I, \delta)} \quad \text{mit} \quad s(I, \delta) = \frac{I/I_s}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (5.13)$$

gegeben⁷. Dabei ist im Ausdruck für den Sättigungsparameter s die Sättigungsintensität I_s mit der Gesamtintensität aller Strahlen ins Verhältnis zu setzen. Da die Dopplerbreite des Hintergrundgases mit einigen hundert MHz sehr groß im Vergleich zur natürlichen Linienbreite ist, kann dessen Anregung vernachlässigt werden. Dominiert Rubidium im Hintergrundgas, setzt sich daher die Ratenkonstante gemäß

$$\gamma = [1 - \zeta(I, \delta)] \gamma_6 + \zeta(I, \delta) \gamma_3 \quad (5.14)$$

⁶ Die Umrechnung der Dispersionskoeffizienten aus atomaren Einheiten (a.u.) in S.I.-Einheiten erfolgt gemäß $C_\alpha[\text{S.I.}] = C_\alpha[\text{a.u.}] \cdot E_h \cdot a_0^\alpha$, wobei $E_h = 4,3597 \times 10^{-18}$ J die Hartree-Energie und a_0 der Bohrsche Radius sind.

⁷ Hierbei handelt es sich um die stationäre Lösung des Einsteinschen Ratenmodells.

aus den beiden homonuklearen Raten in Tabelle 5.1 zusammen. Das bedeutet, daß Verluste aus einer ^{87}Rb -MOT (mit $F_g = 2$ und $F_e = 3$) bei gleichbleibender Einfanggeschwindigkeit von z.B. $v_c = 30$ m/s und starker Sättigung mit einer etwa fünffach höheren Rate stattfinden als im Limes geringer Sättigung. Im Experiment läßt sich diese Abhängigkeit der Verlustrate jedoch nicht durch eine Variation der Intensität isolieren. In Kapitel 8 zeigt sich nämlich, daß die Einfanggeschwindigkeit der MOT (und mit ihr die Falltiefe) ebenfalls mit der Intensität wächst und erst im Limes starker Sättigung etwa den Wert (5.8) erreicht.

Die Verlustrate $dN/dt = -\gamma N$ ist unabhängig von der Dichte der gespeicherten Atome und führt daher zu einem exponentiellen Zerfall der Teilchenzahl. Spielen keine weiteren Verlustprozesse eine Rolle, gibt der Kehrwert $\tau = 1/\gamma$ die Lebensdauer der Atome in der Falle bzw. die charakteristische Ladezeit der Dampfzellenfalle an.

Verlustrate durch lichtunterstützte Stöße

Verluste aus einer Atomfalle können auch die Folge von inelastischen Stößen zwischen gespeicherten Atomen sein. Beispiele dafür sind die Spinrelaxation und die Rekombination, die in Kapitel 3 diskutiert wurden. Im Normalfall spielen diese beiden Prozesse bei der magnetooptischen Speicherung jedoch keine Rolle, weil die freigesetzte Energie in beiden Fällen geringer als die Potentialtiefe der MOT ist. Außerdem finden sie aufgrund ihres geringen Wirkungsquerschnittes bei den für eine MOT typischen Dichten sehr selten statt. Einen weitaus größeren Wirkungsquerschnitt haben allerdings Stöße zwischen angeregten und Grundzustandsatomen. Wie eben gesehen, wächst dadurch die Rate für *elastische* Stöße zwischen gespeicherten Rb-Atomen und solchen aus dem Hintergrundgas mit der mittleren Besetzung angeregter Zustände. Anders als dort stoßen gespeicherte Atome untereinander mit einer wesentlich geringeren Relativgeschwindigkeit. Dadurch kann erstens die Dauer eines Stoßes die Lebensdauer des angeregten Zustands überschreiten. Zweitens spielen nun Quanteneffekte eine entscheidende Rolle, wie etwa Kopplungen zwischen den Quasimolekülpotentialen des Stoßpaares. Beides bewirkt in einer MOT Verluste, die im letzten Jahrzehnt unter dem Begriff *lichtunterstützte Stöße* Gegenstand zahlreicher experimenteller und theoretischer Untersuchungen waren. Eine ausgezeichnete Zusammenfassung des derzeitigen Wissensstandes findet sich in Referenz [120].

Das Zustandekommen von Verlusten durch lichtunterstützte Stöße zwischen Alkaliatomen ist schematisch in Abbildung 5.3 dargestellt. Die van der Waals-Wechselwirkung C_6/r^6 zwischen Grundzustandsatomen ist kurzreichweitiger als die resonante Dipolwechselwirkung C_3/r^3 eines einfach angeregten Stoßpaares. In dem bezüglich der D_2 -Linie $S_{1/2} \rightarrow P_{3/2}$ rotverstimmten Lichtfeld der MOT ist daher eine Anregung bei r_R am wahrscheinlichsten. Nach der Anregung wird das Paar in einem der bindenden Quasimolekülpotentiale beschleunigt, die asymptotisch in die Konfiguration $S_{1/2} + P_{3/2}$ freier Atome übergehen (hier durch eine Kurve dargestellt). Erfolgt die Abregung während dieser Phase, hat das emittierte Photon aufgrund der kürzeren Reichweite des Grundzustandspotentials eine geringere Energie als das zuvor absorbierte. Diese Energiedifferenz findet sich in der kinetischen Energie der Atome wieder und befähigt letztere zumeist, das

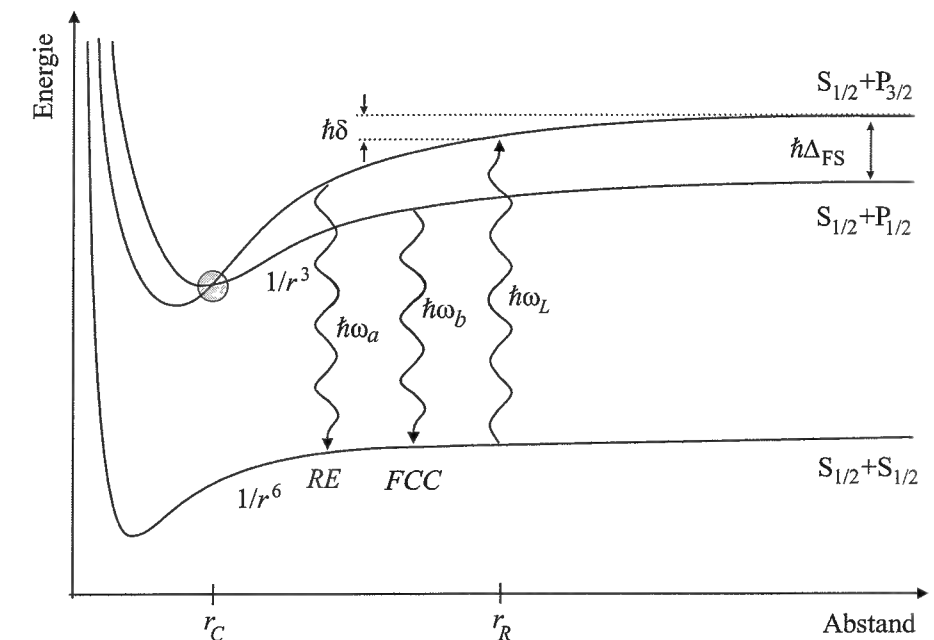


Abbildung 5.3: Zustandekommen von Verlusten durch lichtunterstützte Stöße. Bei r_R entsteht durch Photoassoziation ein angeregtes Dimer, das entweder vor Erreichen von r_C emittiert (RE) oder so lange oszilliert, bis es infolge eines nicht-adiabatischen Übergangs innerhalb der Feinstruktur (bei r_C) entlang des Quasimolekülpotentials $S_{1/2} + P_{1/2}$ dissoziieren kann (FCC). Beide Prozesse sind exotherm.

Speicherpotential zu verlassen. In der Fachliteratur wird ein solcher Prozeß als *radiative escape* (RE) bezeichnet. Überlebt das Molekül länger, erreicht es die Abstandsregion r_C , in der die Austauschwechselwirkung der Leuchtelektronen und die Spin-Bahn-Kopplung jedes einzelnen von ihnen vergleichbare Stärke haben. In dieser Region, die das Dimer während seiner Oszillation mehrfach passieren kann, finden Übergänge innerhalb der Feinstruktur statt. Dies geschieht in völliger Analogie zu den Übergängen innerhalb der Hyperfeinstruktur, die zur Spinrelaxation polarisierter Atome führen und in Kapitel 3.2 ausführlich diskutiert wurden. Aufgrund der geringeren Dissoziationsenergie von Molekülpotentialen, die asymptotisch in die Konfiguration $S_{1/2} + P_{1/2}$ übergehen, können sich die Atome entlang dieser Potentiale voneinander entfernen. Die Feinstrukturaufspaltung von Rb beträgt $\hbar\Delta_{FS} \approx k_B \times 340$ K und liegt nach dem spontanen Zerfall als kinetische Energie vor. Sie übertrifft die Potentialtiefe der MOT um ein Vielfaches. Man spricht in diesem Zusammenhang neudeutsch von *fine structure changing collisions* (FCC).

Die Verlustrate durch inelastische Zwei-Körper-Stöße ist gemäß

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\beta \int n^2(\vec{r}, t) d^3r = -\beta \langle n(t) \rangle N(t) \quad (5.15)$$

von der Dichte $n(\vec{r}, t)$ bzw. der dichtegemittelten Dichte $\langle n(t) \rangle$ der gespeicherten Atome bestimmt. Die Ratenkonstante β ist von Intensität und Verstimmung abhängig und liegt für Rubidium im Bereich $10^{-12} \dots 10^{-11}$ cm³/s. Eine solche Abhängigkeit läßt sich intuitiv verstehen, weil I und δ die Anregungsrate und die Position r_R bestimmen, an der sie ihr

Maximum erreicht. Je näher r_R an die Kopplungsregion um r_C rückt, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Region auch erreicht wird, bevor die spontane Emission stattfindet. Gleichzeitig nimmt die Energiedifferenz der Molekülpotentiale mit sinkenden Werten von r_R immer schneller ab, wodurch die im Mittel bei einem RE-Prozeß freigesetzte Energie wächst. Sie reicht daher auch bei einem frühen Zerfall zur Überwindung des Speicherpotentials aus. Schließlich ist β auch von der Temperatur des Gases abhängig: Bei tiefen Temperaturen kommt es durch die Zentrifugalbarrieren der Molekülpotentiale (vgl. Kapitel 3.1) zu einer Abschirmung der Streuregion, in der lichtunterstützte Stöße zu Verlusten führen.

Teilchenzahl und Dichte in einer MOT

Mit obigen Raten gehorcht die Teilchenzahl einer MOT der Differentialgleichung

$$\frac{dN(t)}{dt} = R - \gamma N(t) - \beta \langle n(t) \rangle N(t) \quad (5.16)$$

mit der stationären Lösung

$$N_\infty = \frac{R}{\gamma + \beta \langle n_\infty \rangle} \quad (5.17)$$

Während Verluste durch Stöße mit dem Hintergrundgas in einer Dampfzellenfalle oft dominieren, sind Lebensdauer, Dichte und Teilchenzahl einer MOT, die im tiefen Ultrahochvakuum betrieben wird, durch lichtunterstützte Stöße begrenzt. In diesem Falle ist Gleichung (5.17) implizit, weil die Dichte der Wolke von der Teilchenzahl abhängt. Bei einer genauen Betrachtung stellt sich heraus, daß auch alle weiteren Größen in dem Ausdruck eine mehr oder weniger ausgeprägte Abhängigkeit von der Teilchenzahl aufweisen. Sie ergibt sich aus der optischen Dichte der Atomwolke. Diese wächst mit der Teilchenzahl, und die Intensität der MOT-Strahlen wird zunehmend durch die Wolke abgeschwächt. Mit der Intensität nimmt die Spontankraft ab, Potentialform und Temperatur ändern sich und mit ihnen die Dichteverteilung. Ebenfalls von der Intensität abhängig sind die Ratenkonstanten γ und β . Schließlich erzeugt die Atomwolke einen Schatten in den Laserstrahlen und emittiert im Gegenzug unpolarisiertes, (nahezu) inkohärentes Licht in alle Raumrichtungen. Beides führt zu einer Abnahme der Laderate R . An eine analytische Lösung der Gleichungen (5.16) und (5.17) unter realistischen Bedingungen ist daher nicht zu denken.

Komplex ist insbesondere die Abhängigkeit der Dichte von Teilchenzahl und Intensität [121, 122]. Solange die Falle wenig Atome faßt, ist das Speicherpotential in guter Näherung harmonisch (siehe Abschnitt 5.2.1) und die Dichte so gering, daß spontan emittierte Photonen die Wolke ungehindert verlassen können. In diesem Regime ist die Dichteverteilung gaußförmig. Ihre Standardabweichung ist über $\sigma = [k_B T / (m \omega^2)]^{1/2}$ allein von der Temperatur und der Oszillationsfrequenz $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ abhängig, während ihr zentraler Wert linear mit der Teilchenzahl wächst. Oberhalb einer kritischen Dichte ist die Wahrscheinlichkeit nicht mehr zu vernachlässigen, daß emittierte Photonen von benachbarten Atomen reabsorbiert werden. Der Impulsübertrag von $2\hbar k$ treibt die von einem solchen Photonen-austausch betroffenen Atome auseinander und erzeugt so einen inneren Lichtdruck. Dieser

limitiert die Dichte auf einen über weite Bereiche der Wolke konstanten Wert, der bei Rubidium in der Größenordnung von 10^{11} cm^{-3} liegt⁸. In der Folge wächst nun die Ausdehnung der Wolke mit der Teilchenzahl. Damit halten sich die Atome zunehmend in Regionen höherer Magnetfelder auf. In solchen Regionen ist der zusätzliche Kühlmechanismus, der auf die Bewegung der Atome in den Polarisationsgradienten zurückzuführen ist (siehe Kapitel 5.4.2), unwirksam. Mit wachsender Teilchenzahl prägen sich daher in der Falle zwei Dichteregime aus: Ein kälterer, dichter Kern, der von einer diffusen Wolke geringerer Dichte und höherer Temperatur umgeben ist.

Dies und die Tatsache, daß zusätzlich alle oben genannten Größen auch empfindlich von der Ausrichtung, der Polarisation und dem Intensitätsgleichgewicht der Strahlen abhängen, erschwert die Modellierung einer MOT erheblich. Unbefriedigend daran ist nicht allein das eher vage Verständnis der Prozesse, die sich in einer MOT abspielen, sondern auch die damit verbundene Schwierigkeit, Prognosen für das Experiment abzugeben. In der Praxis erfolgt die Optimierung der MOT im Hinblick auf tiefe Temperaturen oder, wie in Kapitel 8 beschrieben, auf eine hohe Laderate bzw. Teilchenzahl ausgehend von empirischen Ansätzen und Erfahrungswerten.

5.3 Das Doppel-MOT-System

Um für das Experiment eine große Anzahl von Atomen unter sehr guten Vakuumbedingungen bereitzustellen, wird ein sog. Doppel-MOT-System eingesetzt [113]. Bei der Doppel-MOT besteht eine räumliche Trennung zwischen dem Einfang der Atome aus dem Hintergrundgas einerseits und der Kühlung und Speicherung des Gases andererseits. Eine solche Trennung ist sinnvoll, weil diese beiden Stufen des Experiments mit sehr unterschiedlichen Anforderungen an das Vakuum verbunden sind. Daher besteht das Vakuumsystem einer Doppel-MOT-Apparatur aus zwei Kammern, die durch eine differentielle Pumpstrecke miteinander verbunden sind. Sie erlaubt es, die Vakuumbedingungen jeweils lokal zu optimieren. Die technische Realisierung der beiden Vakuumsysteme, die im Rahmen dieser Arbeit zum Einsatz kamen, ist in [32] („Konstanzer System“) bzw. Kapitel 7.1 („Münchener System“) beschrieben. Im folgenden wird auf die Funktionsweise der Doppel-MOT-Systeme eingegangen.

Konstanzer System

Magneto-optische Fallen für ^{87}Rb werden in der Regel mit Licht betrieben, das gegenüber dem sog. MOT-Übergang $|5^2S_{1/2}, F_g = 2\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F_e = 3\rangle$ um wenige Linienbrei-

⁸ Geringfügig höhere Dichten lassen sich mit sog. *dark-SPOT*-Varianten der MOT erzielen [123, 124]. Letztere haben sich jedoch aufgrund ihrer aufwendigen Justage und nachteiliger Auswirkungen auf die Reproduzierbarkeit der Experimente nicht durchgesetzt.

ten rotverstimmt ist⁹. Obwohl es sich hierbei um einen geschlossenen Übergang handelt, gibt es einen Verlustkanal, der durch die nichtresonante Anregung des Hyperfeinzustands $|F_e = 2\rangle$ zustandekommt. Eine solche Anregung ist wegen der geringen Hyperfeinaufspaltung des $P_{3/2}$ -Zustands möglich. Der anschließende Zerfall erfolgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % in das Hyperfeinniveau $|F_g = 1\rangle$. Nun ist es die große Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands, die eine erneute Anregung des Atoms verhindert. Um diesen Verlustkanal zu schließen, wird zusätzlich resonantes Rückpumplicht auf dem Übergang $|F_g = 1\rangle \rightarrow |F_e = 2\rangle$ benötigt. Es kann den Einfangbereich aus einer beliebigen Richtung ausleuchten oder den Fallenstrahlen beigemischt werden.

In Abbildung 5.4 ist rechts die Konstanzer Doppel-MOT-Apparatur schematisch dargestellt. Die Fallen werden in zwei Kammern eines Vakuumsystems betrieben, die mit sehr unterschiedlicher Leistung gepumpt werden und über die angedeutete Röhrchenkombination miteinander verbunden sind. Die obere Kammer beherbergt die Dampfzellenfalle, in der Rubidiumatome aus dem Hintergrundgas eingefangen werden. Da Rubidium eine Schmelztemperatur von lediglich 39 °C hat, stellt sich der erforderliche Dampfdruck durch die Sublimation an der Oberfläche eines Stückchens Rubidium ein. Es befindet sich in einem Reservoir, das mit der oberen Kammer verbunden ist, und hat ein Gewicht von lediglich 1 g. Ist die Dampfzellen-MOT geladen, wird die Atomwolke durch die Röhrchen in die untere Kammer transferiert und in der UHV-MOT gespeichert. Dieser Prozeß wird so oft wiederholt, bis in der UHV-MOT genügend Atome für die Verdampfungskühlung bereit stehen.

Die Besonderheit des Konstanzer Systems besteht in der Kopplung der Fallen. Beide werden in der (Standard-)6-Strahl-Konfiguration betrieben, das vertikale Strahlenpaar wird jedoch gemeinsam genutzt. Dies hat den Vorteil, daß die gesamte erforderliche Lichtleistung sehr gering ist. Aus dem gleichen Grund werden die zwei horizontalen Strahlenpaare der Dampfzellen-MOT jeweils durch die Retroreflexion eines Strahls erzeugt. Das gesamte System kommt daher mit einer Laserleistung von nur 30 mW aus und nimmt diesbezüglich eine Sonderrolle innerhalb aller heute bekannten BEK-Experimente ein. Die gemeinsame Nutzung der vertikalen Strahlen hat jedoch auch einen weiteren Grund. Zunächst wurde bei der Planung des Experimentes davon ausgegangen, daß die Atomwolken aus der Dampfzellenfalle durch freien Fall in die UHV-MOT überführt werden. Dies stellt die mit Abstand einfachste Möglichkeit des Transfers dar und bedingt die vertikale Anordnung der beiden MOT's. Damit lag auch – in gewissen Grenzen – die Orientierung der Magnetfalle (die der UHV-MOT überlagert ist) bezüglich der Vertikalen fest. Hierbei fiel die Entscheidung zugunsten einer „klassischen“ Ioffe-Pritchard Falle¹⁰, mit deren spezieller Geometrie eine vertikale Strahlführung am besten zu vereinbaren ist.

Die gemeinsame Nutzung zweier Strahlen und der ursprünglich geplante Transfer im freien Fall bergen jedoch auch Nachteile. Wie gerade gesehen, läßt sich in der MOT eine hohe Laderate nur erreichen, wenn die Strahldurchmesser signifikant größer als die Ausdehnung

⁹ Die hier relevanten spektroskopischen Eigenschaften von ⁸⁷Rb sind in Anhang E zusammengefaßt.

¹⁰ Design und Vorzüge dieses Fallentyps sind in Kapitel 5.5.1 beschrieben.

der gespeicherten Wolke sind. Da im Konstanzer System die differentielle Pumpstrecke nicht nur von der Atomwolke, sondern auch von zwei der Strahlen passiert wird, legt der kleinste Querschnitt der Pumpstrecke die Strahlgröße fest. Der angestrebte Druckgradient zwischen den beiden Kammern bestimmt seinerseits den Leitwert ihrer Verbindung, die nun wegen des großen Querschnitts entsprechend lang gewählt werden muß. Der Transfer im freien Fall läßt dies aber nur bedingt zu. Weil sich die Wolke im freien Fall nur langsam bewegt, muß ihre Expansion ebenfalls berücksichtigt werden (siehe Anhang A). Soll die Pumpstrecke auf die Wolke nicht als Blende wirken, muß ihr Querschnitt an die Expansionsdynamik der Wolke angepaßt sein und daher nach unten hin zunehmen. Die in Abbildung 5.4 angegebenen Abmessungen der differentiellen Pumpstrecke sind das Ergebnis eines Kompromisses zwischen einem möglichst großen Druckgradienten einerseits und Minimalanforderungen an Strahlgröße und Transfereffizienz andererseits.

Im Experiment wirkt sich dieser Kompromiß zunächst dahingehend aus, daß die extrem hohe Pumpleistung im (unteren) UHV-Bereich durch einen Leitwert des Röhrchensystems von etwa 1 l/s (für Luft) nicht ausreichend abgeschirmt ist, um den effizienten Betrieb der Dampfzellenfalle bei Raumtemperatur zu ermöglichen. Ein Problem stellt dies nicht dar, weil sich der erforderliche Dampfdruck von etwa 10^{-8} mbar durch leichtes Heizen des Rubidium-Reservoirs auf etwa 35 °C erzeugen läßt. Nachhaltiger wirkt sich der gemeinsame Strahlengang der MOT's aus. Er erschwert die Justage beider Fallen erheblich, da sie simultan erfolgen muß. Im Experiment wird insbesondere Wert auf die Justage der UHV-MOT gelegt, weil hier die Voraussetzungen für die Verdampfungskühlung geschaffen werden. Daraus ergeben sich unwillkürlich Grenzen für die Justage der Dampfzellenfalle. Zudem müssen die Fallen mit Licht gleicher Verstimmung und ähnlicher Intensität betrieben werden. Die Maximierung der Laderate aus dem Hintergrundgas einerseits und die Minimierung der Verluste aus der UHV-MOT andererseits würden jedoch zu unterschiedlichen Lichtparametern führen. Auch diesbezüglich muß der UHV-MOT Vorzug gegeben werden. Trotz dieser Komplikationen hat sich die Apparatur bewährt und es zum ersten Mal außerhalb der USA ermöglicht, Kondensate zu erzeugen und zu untersuchen [103]. Was die Größe der Kondensate betrifft, belegt sie auch heute noch im Vergleich mit über zwanzig Experimenten neueren Datums einen der vordersten Ränge. Für einen Großteil der in dieser Arbeit beschriebenen Experimente ist eine hohe Anzahl kondensierter Atome Voraussetzung.

Die Konzeption der Münchner Apparatur hat von den Erkenntnissen im Zusammenhang mit dem Transfer der Atome profitiert, die in Konstanz gewonnen wurden. Das Konstanzer BEK-Experiment wurde sehr bald vom Transfer der Atome durch freien Fall auf die Beschleunigung der Wolke durch einen resonanten Laserpuls umgestellt, eine Methode, die auf Myatt et al. zurückgeht [113] und die Transfereffizienz erheblich verbessert hat. Der Transfer beginnt nach dem Laden der Dampfzellenfalle mit dem Abschalten ihres magnetischen Quadrupolfeldes. Damit verschwindet auch der ortsabhängige Anteil der Spontankraft (5.2), die nun einen rein dissipativen Charakter erhält. Unmittelbar danach trifft ein Laserpuls auf die Wolke (in Abbildung 5.4 mit „Transfer“ bezeichnet) und erzeugt einen zusätzlichen Lichtdruck in Richtung der UHV-MOT. Der Puls ist zum MOT-Übergang resonant. Seine beschleunigende Wirkung hält solange an, bis die Absorptionsraten aus dem Laserpuls und dem nach unten propagierenden MOT-Strahl einerseits und die Ab-

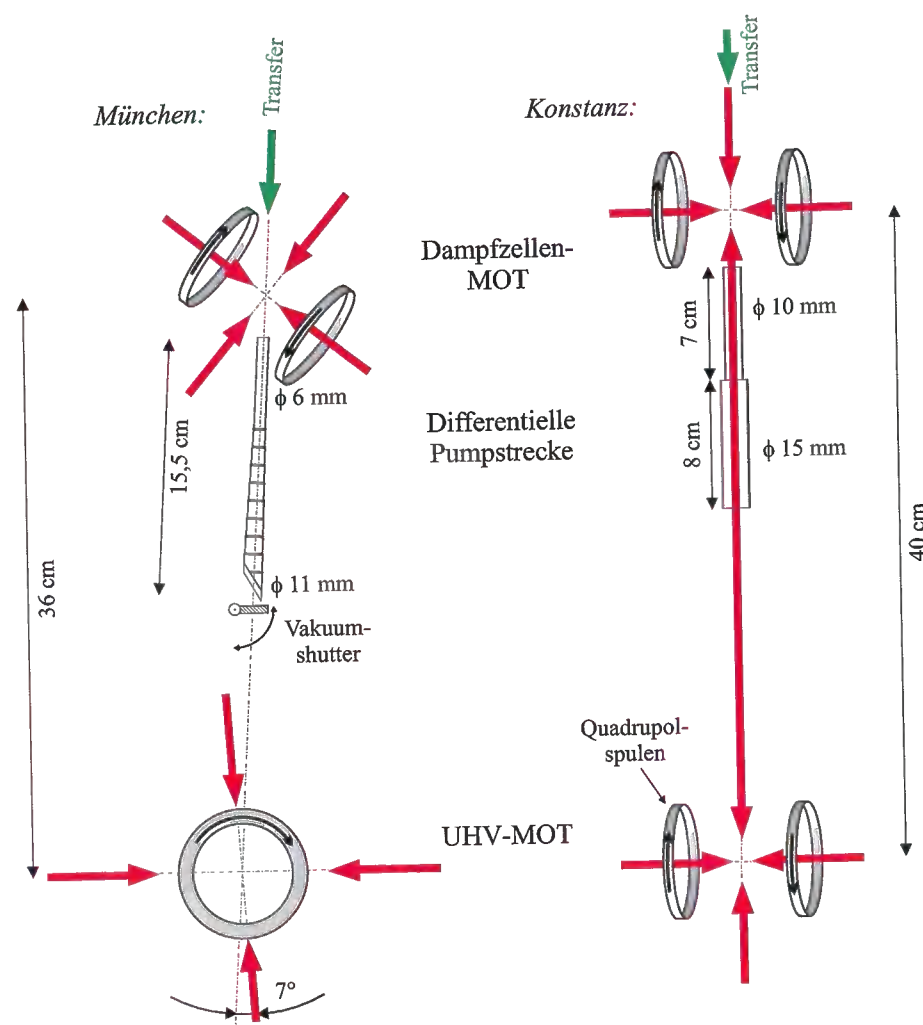


Abbildung 5.4: Prinzipieller Aufbau der beiden Doppel-MOT-Systeme im Vergleich. Das dritte Strahlenpaar der MOT's ist jeweils senkrecht zur Zeichenebene ausgerichtet. Im Münchner System sind die Strahlengänge der beiden Fallen getrennt, und die Verbindung zur Dampfzelle kann mechanisch geschlossen werden.

sorptionsrate aus dem nach oben propagierenden MOT-Strahl andererseits gleich sind. Dieser Ratenausgleich ist durch die entgegengesetzten Doppler-Verstimmungen der Strahlen bezüglich der bewegten Atome bedingt und legt die Endgeschwindigkeit der Atomwolke fest. Unter typischen experimentellen Bedingungen beträgt sie 7 m/s und wird nach einer Pulsdauer von etwa 400 μ s erreicht. Von nun an müssen weitere Absorptionen aus den drei Strahlen vermieden werden, da sie allein die Geschwindigkeitsbreite der Atomwolke vergrößern würden, nicht aber ihre Schwerpunktgeschwindigkeit. Bei einer Flugzeit von 60 ms in den vertikalen MOT-Strahlen würde sich die Wolke infolge der Diffusion so weit „aufblähen“, daß kaum ein Atom den Einfangbereich der UHV-MOT erreichen würde. Weil das Abschalten der MOT-Strahlen den Verlust der bereits überführten Atome zur Folge hätte, werden die Wolken nach der Beschleunigung in den Grundzustand $|F_g = 1\rangle$ gepumpt, aus dem sie von dem MOT-Licht nicht mehr angeregt werden können. Dazu

muß unmittelbar nach dem Beschleunigungspuls das Rückpumplicht der Dampfzellenfalle abgeschaltet und ein weiterer Laserpuls auf die Wolke gerichtet werden, der mit dem Übergang $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 2\rangle$ resonant ist. Erst im Einfangbereich der UHV-MOT geraten die Atome durch die Absorption des dortigen Rückpumplichts wieder unter den Einfluß der Lichtkräfte und können daher eingefangen werden. Die wichtigsten Parameter beider Doppel-MOT-Systeme sind in Tabelle 5.2 zusammengefaßt. Die angegebenen Strahldurchmesser beziehen sich auf die (etwa auf einer IR-Detektorkarte) sichtbaren Strahlgrößen.

Die Entscheidung, im Rahmen des Umzugs der Arbeitsgruppe an das MPI für Quantenoptik eine neue Apparatur aufzubauen, ist auf das Bestreben zurückzuführen, die Dauer des experimentellen Zyklus signifikant zu verkürzen. Um in der Konstanzer Apparatur die größten Kondensate zu erzeugen, mußte eine Ladezeit der UHV-MOT von einer Minute in Kauf genommen werden, in der über hundert Atomwolken transferiert wurden. Da die meisten Untersuchungen am Kondensat destruktiv verlaufen, erforderten Experimente mit einer hohen Datenstatistik sehr lange Meßzeiten. Neben dem Experimentator leidet darunter auch die Datenqualität durch Langzeitdriften oder technisch bedingte Unterbrechungen.

Münchner System

Im Hinblick auf die Verkürzung des experimentellen Zyklus sind beim Aufbau des Münchner Systems, das in Abbildung 5.4 links dargestellt ist, folgende Maßnahmen getroffen worden:

- **TRENNUNG DER FALLEN:** Der Einsatz eines Beschleunigungslasers ermöglicht eine flexible Anordnung der beiden Fallen, weil die Geschwindigkeit der Atomwolke während des Transfers so groß ist, daß ihre Trajektorie nur wenig durch die Gravitation beeinflusst wird. In der Münchner UHV-MOT treffen daher die Atomwolken unter einem Winkel von $3,5^\circ$ bezüglich der Vertikalen bzw. 7° bezüglich eines ihrer Strahlenpaare ein (siehe Abbildung 5.4). Dadurch sind einerseits die Strahlengänge der beiden MOT's vollständig getrennt. Andererseits sind die Winkel so gering, daß sie keine Auswirkungen auf die Orientierung und die Dimensionen des bereits in Konstanz eingesetzten Magnetfallentyps haben. Um diese Anordnung zu ermöglichen, war die Konzeption eines neuen Vakuumsystems erforderlich. Sein Aufbau wird in Kapitel 7.1 beschrieben.
- **VERGRÖßERUNG DES DRUCKGRADIENTEN ZWISCHEN DEN KAMMERN:** Da keiner der Strahlen mehr die differentielle Pumpstrecke durchläuft, besteht wesentlich mehr Freiheit bei ihrer Dimensionierung. Ihr Querschnitt ist daher lediglich an die Expansionsdynamik der beschleunigten Atomwolke angepaßt. Die wiederum läßt nun auch im Austrittsbereich einen geringeren Querschnitt zu, weil die relevante Expansionszeit beim Einsatz eines Beschleunigungslasers wesentlich kürzer ist, als bei dem Transfer im freien Fall. Dementsprechend ist der Leitwert der Verbindung (für Luft) etwa sechsmal geringer als jener der Konstanzer Apparatur. Die Pumpstrecke kann außerdem mit Hilfe einer drehbar gelagerten Blende verschlossen werden, sobald

Parameter	Konstanz		München	
	D-MOT	UHV-MOT	D-MOT	UHV-MOT
Gradient $\partial B_z / \partial z$ [G/cm]	15	17	13	16
Verstimmung $ \delta /2\pi$ [MHz]	16,5	16,5	30	17
Strahldurchmesser [cm]	1,5/1	1,5/1	2,6	1,7
Leistung/Strahl [mW]	4	2,6	65	11
Rückpumpleistung [mW]	2	2	20	6
Laderate [Atome/s]	10^8	4×10^7	7×10^{10}	7×10^9
Gleichgewichtsteilchenzahl	2×10^8	2×10^9	$2,5 \times 10^{10}$	6×10^9
Typische Ladezeit [s]	0,5	70	0,15	1,5

Tabelle 5.2: Parameter der Doppel-MOT-Systeme im Vergleich.

genügend Atome in die UHV-MOT transferiert wurden. Beide Maßnahmen erhöhen den Druckgradienten zwischen den beiden Kammern. Auf diese Weise wird in der Magnetfalle eine Lebensdauer von über zwei Minuten erreicht, die einem Restgasdruck von 7×10^{-11} mbar am Ort der Atome entspricht. In der Münchner Apparatur ist außerdem das Heizen des Rb-Reservoirs nicht mehr erforderlich, die Dampfzelle wird bei einem Partialdruck von lediglich 10^{-8} mbar betrieben.

- VERGRÖßERUNG DER LADERATE AUS DEM HINTERGRUNDGAS: Die Unabhängigkeit der beiden MOT's erlaubt nun die Optimierung der Dampfzellenfalle im Hinblick auf eine möglichst hohe Laderate bei gleichzeitig niedrigem Partialdruck. Da hierbei dem Strahldurchmesser eine Schlüsselrolle zukommt (vgl. Relation (5.9) und Kapitel 8), wurden beim Aufbau des Strahlengangs optische Elemente eingesetzt, die einen Strahldurchmesser von bis zu 27 mm zulassen. Um Rückwirkungen der optischen Dichte auf die Strahlintensitäten zu vermeiden, wird keines der Strahlenpaare durch Retroreflexion erzeugt. Beide Maßnahmen sind nur in Verbindung mit einer im Vergleich zum Konstanzer Experiment wesentlich höheren Lichtleistung sinnvoll. Daher ist das Diodenlasersystem durch ein Titan-Saphir-Lasersystem ersetzt worden, dessen Aufbau in Kapitel 7.2 beschrieben ist. Dies hat außerdem den positiven Nebeneffekt eines wesentlich besseren Strahlprofils und einer geringeren Linienbreite.

Wie dramatisch sich diese Maßnahmen auf das Experiment auswirken, ist anhand von Tabelle 5.2 zu erkennen, wo die Parameter und die Spezifikationen beider Doppel-MOT-Systeme miteinander verglichen werden. In dem Münchner System faßt die UHV-MOT bereits nach 0,5 s eine Teilchenzahl von 2×10^9 . Dies entspricht der höchsten Teilchenzahl, die in Konstanz nach einer Ladezeit von über einer Minute erreicht wurde. Die Spezifikationen des Münchner Systems nehmen im internationalen Vergleich eine Spitzenposition ein und sind im wesentlichen auf die sorgfältige Optimierung der Laderate aus dem Hintergrundgas zurückzuführen. Sowohl die Effizienz des Transfers als auch das Füllvermögen der UHV-MOT sollten sich noch etwas steigern lassen. Beide wurden weniger systematisch optimiert als die Laderate, weil dies nicht mehr zu einer signifikanten Verkürzung des experimentellen Zyklus geführt hätte: Die Zeitskala von 10 s, auf der Kondensate erzeugt werden können, ist unter den aktuellen Voraussetzungen bereits fast ausschließlich durch

die Dauer der Verdampfungskühlung bestimmt. Die Optimierung der Laderate und des Transfers zwischen den beiden Fallen sind in Kapitel 8 beschrieben.

5.4 Präparation für die magnetische Speicherung

Um ein möglichst hohes Füllvermögen zu erreichen, wird die Atomwolke in der UHV-MOT bei einer verhältnismäßig geringen Dichte und einer entsprechend großen Ausdehnung gespeichert. Dies reduziert die Verlustrate durch lichtunterstützte Stöße und führt somit zu einer höheren Gleichgewichtsteilchenzahl. Es geschieht jedoch auf Kosten der Phasenraumdicke, auf die es im Experiment letztlich ankommt. Deswegen wird die Phasenraumdicke der Atomwolke vor der Überführung in die magnetische Falle in drei Schritten erhöht.

5.4.1 Kompression in der MOT

Die Kompression der magnetooptisch gespeicherten Wolke erfolgt durch eine Erhöhung der Potentialsteilheit und eine Reduktion des inneren Lichtdrucks der Wolke auf einer kurzen Zeitskala. Die Methode geht auf Petrich et al. zurück [125] und ist für die Kondensation nicht zwingend erforderlich, erhöht jedoch die Effizienz der Verdampfungskühlung und damit auch die Teilchenzahl im Kondensat. Zum einen wird dabei der Magnetfeldgradient der MOT kontinuierlich erhöht. Um die begrenzende Wirkung der Reabsorption zu höheren Dichten hin zu verschieben, werden zum anderen gleichzeitig die Verstimmung des MOT-Lichts erhöht und seine Intensität reduziert. Mit der Dichte steigt nun allerdings auch die Verlustrate (5.15) durch lichtunterstützte Stöße. Da sich die Wolke tief im Regime der Dichtebegrenzung durch Reabsorption befindet, wirkt sich die erhöhte Verlustrate in der Folgezeit zunächst nur auf die Teilchenzahl und nicht auf die Dichte der Wolke aus. Der Teilchenverlust hält sich jedoch in Grenzen, weil unmittelbar nach der Kompression mit dem Abschalten der MOT auch die Verlustrate durch lichtunterstützte Stöße verschwindet. In einem BEK-Experiment wird eine Kompression in der MOT allerdings erst dadurch sinnvoll, daß sich die Temperaturzunahme, mit der sie einhergeht, in der anschließenden Melassen-Kühlphase bei gleichbleibender Dichte rückgängig machen läßt. Zusammengefasst erhöhen beide Schritte die Phasenraumdicke und die Stoßrate der Atome. Dadurch wird zum einen die Spanne im Phasenraum reduziert, die mit der Verdampfungskühlung überbrückt werden muß. Zum anderen werden die Startbedingungen für die Verdampfungskühlung verbessert.

Die Kompression in der MOT bietet weitere Vorteile, die sich erst auf den zweiten Blick offenbaren. Vor der Kompression ist die Form der Wolke unregelmäßig und wesentlich stärker von der Strahljustage abhängig als danach. Typisch für ihr Erscheinungsbild sind „Schleier“, die den dichten Kern der Wolke umgeben und aus heißen Atomen bestehen. Erfolgt der Transfer in die magnetische Falle ohne die Kompression in der MOT, läßt es sich nicht vermeiden, daß eine erhebliche Anzahl dieser Atome eingefangen wird. Bei der anschließenden Thermalisierung sinkt die Phasenraumdicke in der magnetischen Falle. Es

zeigt sich, daß die Schleier bei der Kompression zum großen Teil verschwinden, wahrscheinlich weil die betroffenen Atome verloren gehen. Im Experiment bestätigt sich außerdem die Erwartung, daß die Position der Wolke nach der Kompression von Tag zu Tag wesentlich weniger variiert. Zurückzuführen ist dies auf die Erhöhung des Magnetfeldgradienten, der eine bessere Lokalisierung der Wolke bezüglich der (völlig reproduzierbaren) Lage des Quadrupolursprungs zur Folge hat. Dieser Effekt erleichtert die Überlagerung der Potentialminima von MOT und Magnetfalle, die für die Erhaltung der Phasenraumdicke beim Transfer Voraussetzung ist, und reduziert Fluktuationen der Teilchenzahl.

Im Konstanzer Experiment erfolgt die Kompression innerhalb von 100 ms. Auf dieser Zeitskala werden der Gradient $\partial B_z/\partial z$ von 17 G/cm nach 60 G/cm, die Verstimmung von $2\pi \times 16,5$ MHz nach $2\pi \times 25$ MHz und die Leistung der Strahlen von 2,6 mW nach 2 mW linear verändert. Bei diesen Parametern handelt es sich um Ergebnisse einer Optimierung des Dichteanstiegs unter der Randbedingung möglichst geringer Teilchenverluste. Während der Kompression nimmt die Halbwertsbreite der Dichteverteilung um etwa 25 % auf typischerweise 2,6 mm ab, während die Dichte der Wolke sich knapp verdoppelt und in der Größenordnung von 10^{11} cm^{-3} liegt. Im Münchner Experiment ist die Kompression der MOT bisher noch nicht erforderlich gewesen.

5.4.2 Polarisationsgradientenkühlen

Bereits in den frühen Experimenten zur Dopplerkühlung von Alkali-Atomen wurden Temperaturen gemessen, die zum Teil erheblich unterhalb der Prognose (5.4) lagen [126]. Dies nährte den Verdacht, daß unter entsprechenden experimentellen Bedingungen ein weiterer Mechanismus wirksam ist, der zur Kühlung des Gases beiträgt. Mittlerweile ist dieser Mechanismus entschlüsselt [127, 128] und wird unter den Bezeichnungen „Polarisationsgradientenkühlung“, „Sisyphus-Kühlung“ oder „Melassenkühlung“ äußerst erfolgreich eingesetzt.

Er beruht auf dem optischen Pumpprozeß, dem ein Mehr-Niveau-Atom ausgesetzt ist, wenn es sich in einem Lichtfeld mit räumlich variierender Polarisation bewegt (daher der Begriff des Polarisationsgradienten). Bei dem hier eingesetzten $\sigma^+ - \sigma^-$ -Kühlschema kommen Polarisationsgradienten durch die Überlagerung zweier gegenläufiger Laserstrahlen gleicher Intensität und Frequenz jedoch (bezüglich der gemeinsamen Strahlachse) entgegengesetzt zirkularer Polarisation zustande. Sie bilden eine Stehwelle, deren Polarisation an jedem Ort linear ist, deren Richtung allerdings entlang der Stehwelle eine Helix mit der Ganghöhe λ beschreibt. Für ein ruhendes Atom ist die Polarisationsrichtung konstant, und die Wechselwirkung mit dem Lichtfeld bewirkt die Orientierung des Atoms bezüglich dieser Richtung: Wiederholte Absorptionen mit der Auswahlregel $\Delta m = 0$ pumpen das Atom bevorzugt in Zeeman-Zustände mit einem kleinen Betrag der magnetischen Quantenzahl. Die Etablierung der Gleichgewichtsbesetzung einzelner Zeeman-Zustände bedarf einer charakteristischen optischen Pumpzeit τ_p , in der das Atom einige Absorptions-Emissions-Zyklen durchlaufen muß. Im Ruhesystem eines Atoms, das sich entlang der Stehwelle bewegt, rotiert nun mit der Polarisation auch die Quantisierungsachse, und zwar mit einer Frequenz, die proportional zur Geschwindigkeit des Atoms ist. Kann die Rotation auf der

Zeitskala der Pumpzeit nicht vernachlässigt werden, „hinken“ die Besetzungen der einzelnen Zeeman-Zustände stets ihrer Gleichgewichtsverteilung hinterher (man spricht dann von „nicht-adiabatischem Folgen“). Die infolgedessen unsymmetrische Besetzungsverteilung der Zeeman-Zustände bezüglich der lokalen Quantisierungsachse führt dazu, daß sich die Absorptionsraten aus den beiden Strahlen unterscheiden. Es zeigt sich, daß bevorzugt Absorptionen aus jenem Strahl stattfinden, dem sich das Atom entgegen bewegt. Wie bei der Dopplerkühlung verschwinden im Mittel die mit der spontanen Emission verbundenen Impulsüberträge, und das Atom sieht sich der Wirkung einer rücktreibenden Kraft ausgesetzt, die zur Geschwindigkeit proportional und damit eine Reibungskraft ist.

Jedes der Strahlenpaare einer MOT erfüllt genau die richtigen Voraussetzungen für die Polarisationsgradientenkühlung. Sie findet daher in einer MOT parallel zur Dopplerkühlung statt. Da jedoch bereits geringe Magnetfelder die Orientierung des Atoms beeinflussen, ist die Polarisationsgradientenkühlung nur im Zentrum der MOT wirksam, wo das magnetische Quadrupolfeld nahezu verschwindet. Will man die Temperatur des Gases signifikant reduzieren, müssen das Magnetfeld der MOT abgeschaltet und magnetische Streufelder kompensiert werden. Für letzteres kommen drei jeweils koaxiale Spulenpaare zum Einsatz, mit deren Hilfe sich in jeder der drei Raumrichtungen ein geeignetes Kompensationsfeld erzeugen läßt.

Mit dem magnetischen Quadrupol werden allerdings auch die rücktreibenden Kräfte der MOT abgeschaltet, die Atomwolke beginnt zu expandieren und sich im Schwerfeld zu bewegen. Aufgrund der erheblichen Reibungskräfte, die in der sog. optischen Melasse auf die Atome wirken, sind beide Bewegungen stark gedämpft und auf der Zeitskala typischer Kühlzeiten von wenigen Millisekunden zu vernachlässigen. Deswegen bleibt die Dichte in guter Näherung erhalten. Unmittelbar nach dieser Kühlphase wird die Wolke in die Magnetfalle überführt, wo sie über die verbleibende Dauer des Experiments gespeichert wird.

Die Gleichgewichtstemperatur in der optischen Melasse ist, wie bereits im Falle der Dopplerkühlung, durch die Diffusion im Impulsraum begrenzt. Im Rahmen eines eindimensionalen Modells läßt sich zeigen, daß sie zum sog. Light-Shift-Parameter proportional und somit gemäß

$$T \propto \frac{I}{|\delta|} \quad (5.18)$$

von der Intensität und der Verstimmung des Lichtfelds abhängen sollte [127]. Eine untere Grenze für die Temperatur ergibt sich allerdings aus der Tatsache, daß der Kühlprozeß für jedes Atom stets mit der spontanen Emission eines Photons endet. Die Rückstöße $p_R = \hbar k$, die dabei auf die Atome übertragen werden, begrenzen die Breite ihrer Geschwindigkeitsverteilung und damit die Temperatur auf das sog. Rückstoßlimit

$$T_R = \frac{\hbar^2 k^2}{3mk_B}. \quad (5.19)$$

Für die D_2 -Linie von Rubidium erhält man den Wert $T_R = 120$ nK, der einer Rückstoßgeschwindigkeit von etwa 6 mm/s entspricht.

Im Konstanzer Experiment dauert die Polarisationsgradientenkühlung 6 ms und beginnt unmittelbar nach der Kompression in der MOT mit dem schnellen Abschalten des Quadrupolfeldes. Gleichzeitig wird die Intensität in den sechs Strahlen auf etwa den Wert zurückgestellt, der in der MOT vor der Kompression vorliegt, während die Verstimmung auf $2\pi \times 30$ MHz erhöht wird. Der Kühlprozeß endet mit dem Abschalten des Lichts. In der Praxis sind die Voraussetzungen für das Erreichen des Rückstoßlimits nicht gegeben: Bei aller Sorgfalt lassen sich magnetische Streufelder nicht vollständig kompensieren. Außerdem unterstützen auch hier Reabsorptionsprozesse die Diffusion im Impulsraum, und schließlich führt die optische Dichte der Atomwolke dazu, daß das Verhältnis I/δ über die Ausdehnung der Wolke variiert. Im Experiment können Wolken geringer Teilchenzahl und Dichte auf Temperaturen von wenigen μK gekühlt werden. Dagegen werden mit Wolken hoher Teilchenzahl und Dichte lediglich Temperaturen von etwa $40 \mu\text{K}$ erreicht. Immerhin nimmt jedoch damit die Temperatur der Wolke in der optischen Melasse um eine Größenordnung ab.

Zu beachten ist schließlich die Tatsache, daß auch die Melasse eine maximale Einfanggeschwindigkeit besitzt, die von den Lichtparametern abhängt. Ändert sich die Richtung der Quantisierungsachse auf der Zeitskala der charakteristischen Pumpzeit zu schnell, kann sich keine Orientierung ausprägen, die eine Absorptionsratendifferenz bedingt. Eine grobe Abschätzung der Einfanggeschwindigkeit ergibt sich aus der einleuchtenden Forderung, daß die Zeit, in der sich die Quantisierungsachse im Bezugssystem des Atoms um 180° dreht, länger als die charakteristische Pumpzeit sein muß [128]. Diese läßt sich gemäß $\tau_p = N_p/n(I, \delta)$ durch die Anzahl N_p der erforderlichen Pumpphotonen und die gesamte Streurate $n(I, \delta)$ ausdrücken. Sie muß mit der Zeit $\lambda/(2v_c)$ verglichen werden, in der ein Atom der Geschwindigkeit v_c eine Strecke zurücklegt, die der halben Ganghöhe der Polarisationshelix entspricht. Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$v_c \approx \frac{\lambda n(I, \delta)}{2 N_p}. \quad (5.20)$$

Bei einem typischen Wert von $N_p \approx 5$ lassen sich danach Einfanggeschwindigkeiten in der Größenordnung von einigen zehn cm/s, wie sie magneto-optisch gespeicherte Atome in etwa haben, nur mit einer verhältnismäßig hohen Absorptionsrate erreichen, die dann wiederum aufgrund der Abhängigkeit (5.18) zu einer hohen Temperatur führt. Dieses Problem wird im Münchner Experiment dadurch umgangen, daß die Intensität der Strahlen über die Dauer der Kühlzeit stetig bis auf Null reduziert wird. Ergebnisse der Polarisationsgradientenkühlung mit einer solchen Intensitätsrampe werden in Kapitel 8 vorgestellt.

5.4.3 Optisches Pumpen

Die Wechselwirkungsenergie der Atome mit einem Magnetfeld geringer Stärke hängt von ihrer magnetischen Quantenzahl m_F ab. Wie sich weiter unten zeigt, muß die magnetische Speicherung aus prinzipiellen Gründen in einem lokalen Feldminimum erfolgen und setzt daher eine parallele Ausrichtung des atomaren magnetischen Moments bezüglich der Feldrichtung voraus. Für die Speicherung im Grundzustand kommen daher im Falle von ^{87}Rb lediglich drei der insgesamt acht Zeeman-Niveaus in Frage (vgl. Abbildung 3.6).

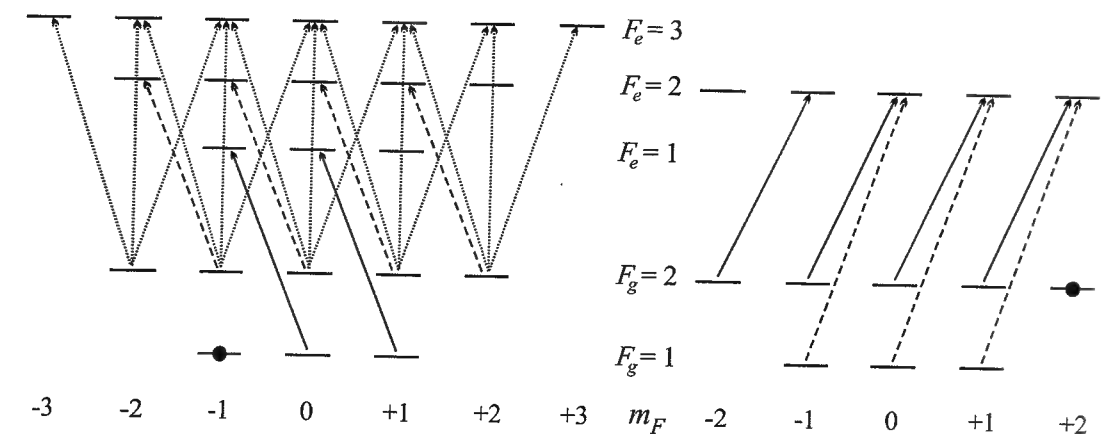


Abbildung 5.5: Beim optischen Pumpen in die Zustände $|F_g=1, m_F=-1\rangle$ bzw. $|F_g=2, m_F=2\rangle$ eingesetzte Schemata. Bei ersterem wird der Übergang $|F_g=2\rangle \rightarrow |F_e=3\rangle$ mit sehr wenig Intensität angeregt.

Die komplexen Polarisationsverhältnisse, die in einer dreidimensionalen optischen Melasse herrschen, lassen es nicht zu, quantitative Aussagen über die nach der Kühlung vorliegende Besetzung einzelner Zeeman-Zustände zu machen. Sicher ist jedoch, daß eine große Anzahl von Atomen verloren ginge, würde die Wolke vor dem Einschalten der Magnetfalle nicht spinpolarisiert werden. Mit der Polarisierung wird außerdem sichergestellt, daß sich in guter Näherung alle magnetisch gespeicherten Atome im gleichen Zustand befinden. Dadurch werden zum einen Anzahl und Dichte identischer Teilchen maximiert, auf die es im Experiment letztlich ankommt. Zum zweiten werden durch die Wahl des gestreckten Zustands $|F_g=1, m_F=-1\rangle$ oder des doppelt polarisierten Zustands $|F_g=2, m_F=2\rangle$ Verluste durch Spinrelaxation minimiert (siehe Kapitel 3.2).

Zum optischen Pumpen in einen dieser beiden Zustände wird auf die in Abbildung 5.5 dargestellten Schemata zurückgegriffen. Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die einzelnen Übergänge sind Anhang E zu entnehmen. Besonders einfach gestaltet sich der Pumpprozeß in den Zustand $|F_g=2, m_F=2\rangle$. Hierzu wird unmittelbar nach dem Abschalten aller zum Melassenkühlen eingesetzten Strahlen zunächst ein homogenes magnetisches Führungsfeld von etwa 1 G eingeschaltet, das die Quantisierungsachse vorgibt. Die Richtung des Führungsfeldes stimmt mit der Vorzugsrichtung jenes Feldes überein, das anschließend für die magnetische Speicherung der Atome zum Einsatz kommt. Daraufhin werden die Atome mit zwei gegenläufigen Laserstrahlen beleuchtet, die bezüglich der Feldrichtung σ^+ -polarisiert sind und jeweils einen der beiden HyperfeinGrundzustände resonant mit dem angeregten Zustand $|F_e=2\rangle$ koppeln. Bereits nach wenigen Absorptions-Emissions-Prozessen befinden sich so gut wie alle Atome in dem gewünschten Zeeman-Niveau, aus dem keine weitere Anregung mehr erfolgen kann. Daher ist die „Aufheizung“ der Wolke durch Diffusion vernachlässigbar. Da zudem aus beiden Strahlen ähnlich viele Photonen absorbiert werden, wird die Wolke auch nicht beschleunigt.

Der Pumpprozeß in den Zustand $|F_g=1, m_F=-1\rangle$ wird von dem Termschema weniger begünstigt. Würde man allein zwei σ^- -polarisierte Strahlen einsetzen, die die Übergänge $|F_g=2\rangle \rightarrow |F_e=2\rangle$ bzw. $|F_g=1\rangle \rightarrow |F_e=1\rangle$ treiben, gäbe es neben dem angestrebten

Zustand mit $|F_g = 2, m_F = -2\rangle$ einen weiteren „dunklen“ Zeeman-Zustand. Zwar würden Atome in diesem Zustand aufgrund ihres negativen magnetischen Moments nicht in der Magnetfalle eingefangen werden, wodurch die Polarisation der Wolke gewährleistet wäre, dafür ginge eine große Anzahl von Atomen bei dem Transfer verloren. Im Experiment hat es sich als äußerst wirkungsvoll erwiesen, neben den zwei Pumpstrahlen die sechs MOT-Strahlen einzusetzen, um den Zustand $|F_g = 2, m_F = -2\rangle$ zu entvölkern. Sie treiben den Übergang $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 3\rangle$ auf Resonanz mit äußerst geringer Intensität und undefinierter Polarisation. Damit beeinflussen sie die Dynamik jener Zustände kaum, aus denen die Anregung durch die beiden σ^- -polarisierten Pumpstrahlen erfolgen kann. Jedoch reicht die geringe Anregungsrate aus, um Atome aus dem Zustand $|F_g = 2, m_F = -2\rangle$ zurück in den Pumpzyklus zu bringen.

Im Rahmen der Meßgenauigkeit sind beide Pumpschemata gleich effizient. Unter identischen Anfangsbedingungen unterscheiden sich nach dem Transfer in die Magnetfalle, der unmittelbar nach dem optischen Pumpen erfolgt, weder die Teilchenzahlen noch die Temperaturen der unterschiedlich polarisierten Atomwolken. Insgesamt werden etwa 75 % der magnetooptisch gespeicherten Atome in die Magnetfalle übertragen und haben dort eine Temperatur von 40-50 μK . Es ist davon auszugehen, daß der Verlust größtenteils während der Kompression in der MOT und der Melassenkühlung zustande kommt. Auf der Zeitskala von knapp 100 μs , die der Pumpprozeß in Anspruch nimmt, können sowohl die Expansion der Wolke als auch ihre Beschleunigung im Gravitationsfeld vernachlässigt werden.

5.5 Magnetische Speicherung

Neutrale Atome können magnetisch gespeichert werden, sofern sie ein permanentes magnetisches Moment $\mu = m_F g_F \mu_B$ besitzen. Der Gradient ihrer Lageenergie in einem statischen, inhomogenen Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ entspricht dann einer ortsabhängigen Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -m_F g_F \mu_B \vec{\nabla} |\vec{B}(\vec{r})|. \quad (5.21)$$

Da das magnetische Moment bezüglich der Feldrichtung sowohl parallel ($m_F > 0$) als auch antiparallel ($m_F < 0$) ausgerichtet sein kann, ist prinzipiell jedes lokale Extremum des Magnetfeldes für die Speicherung geeignet. Im stromfreien Raum verbieten die Maxwell-Gleichungen jedoch für statische Felder die Existenz eines lokalen Maximums [129], und für die Speicherung kommt daher nur ein Minimum in Frage. Die nachteilige Konsequenz dieser Tatsache ist, daß sich Atome magnetisch nie im Grundzustand speichern lassen, da dessen Lageenergie stets mit wachsender Feldstärke abnimmt. Aus diesem Grund können magnetisch gespeicherte Atome prinzipiell exotherm stoßen. Tatsächlich ist es häufig die in Kapitel 3.2 diskutierte Spinrelaxation, die der Lebensdauer des Kondensats Grenzen setzt. Die magnetische Speicherung neutraler Atome gelang erstmalig 1985 mit Natrium [130].

Voraussetzung für die stabile magnetische Speicherung ist also, daß die Spinpolarisation der Atome in guter Näherung eine Erhaltungsgröße ist. Aus dieser Forderung ergibt

sich eine Einschränkung für die Feldstärke am Potentialminimum. Im Bezugssystem eines Atoms, daß sich in der Umgebung des Minimums bewegt, kann sich einerseits die Feldrichtung schnell ändern. Andererseits ist hier die Larmor-Frequenz $\omega_L = g_F \mu_B |\vec{B}(\vec{r})|/\hbar$ am kleinsten. Soll der Spin der lokalen Feldrichtung adiabatisch folgen können, darf sich diese auf der Zeitskala der Spinpräzession nur langsam ändern. Anderenfalls finden sog. Majorana-Übergänge zwischen den Zeeman-Zuständen statt, die den Verlust der Atome zur Folge haben. Für Atome mit Geschwindigkeiten $v \propto \sqrt{T}$ läßt sich diese Forderung durch

$$\left| \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{B}(\vec{r})}{|\vec{B}(\vec{r})|} \right] \right| = \left| (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \left[\frac{\vec{B}(\vec{r})}{|\vec{B}(\vec{r})|} \right] \right| \ll \omega_L \quad (5.22)$$

quantifizieren. Bei typischen Feldgradienten und Temperaturen sollte danach der Betrag des Magnetfeldes an keinem Ort kleiner als wenige 100 mG sein.

In der experimentellen BEK haben sich zwei Fallentypen etabliert, die sich mit der Forderung eines Magnetfeldminimums endlichen Betrags vereinbaren lassen: Die TOP-Falle und die Ioffe-Falle. TOP steht für „time-averaged orbiting potential“ und bezeichnet ein Speicherpotential, das durch die Überlagerung eines statischen und eines zeitlich veränderlichen Feldes zustandekommt [15]. Seine Grundlage ist ein sphärisches Quadrupolfeld. Wie im Falle einer MOT wird es auch hier mit Hilfe eines coaxialen Spulenpaares erzeugt. Mit der linearen Ortsabhängigkeit des Feldes bietet ein Quadrupol beste Voraussetzungen für eine scharfe Lokalisation der Atome am Potentialminimum, an dem das Feld allerdings verschwindet. Um hier Verluste durch Depolarisation zu verhindern, wird dem Quadrupol ein zeitabhängiges Magnetfeld überlagert. Es ist homogen, seine Richtung rotiert jedoch mit der Frequenz ω_R in einer Ebene, die zu einer der Quadrupolachsen senkrecht steht. Die Überlagerung des Quadrupols mit einem homogenen Feld bewirkt eine Verschiebung des Minimums. Mit dem Feld rotiert daher auch das Minimum auf einem Kreis, dessen Radius linear von dem Betrag des homogenen Feldes abhängt. Dieser Radius wird größer gewählt als die Ausdehnung der Atomwolke. Ist ω_R sehr viel größer als die typische Oszillationsfrequenz der Atome im Potential, können diese dem rotierenden Minimum nicht folgen und wechselwirken daher mit dem zeitlich gemittelten Gesamtfeld. Die zu Gleichung 5.22 analoge Bedingung für die Adiabasie der Spindynamik ist erfüllt, wenn $\omega_R \ll \omega_L$ gilt. Unter diesen Voraussetzungen sind die Atome einem effektiven Potential ausgesetzt, das in jeder Richtung harmonisch ist. In einem solchen Potential gelang die erste Beobachtung der BEK [9].

Die Ioffe-Pritchard-Falle wurde in der Plasmaphysik entwickelt [131] und 1983 für die Speicherung neutraler Atome vorgeschlagen [132]. Eine Falle dieses Typs wird in der vorliegenden Arbeit eingesetzt.

5.5.1 Ioffe-Pritchard Magnetfalle

Die zur Speicherung benötigte Feldkonfiguration entsteht in einer Ioffe-Pritchard-Falle durch die Überlagerung dreier statischer Magnetfelder. Sie werden mit Hilfe einer Spulenordnung erzeugt, deren Komponenten in Abbildung 5.6 schematisch dargestellt sind.

Aufgrund der Zylindersymmetrie der Anordnung wird im folgenden zwischen der axialen (z), der radialen (r) und der tangentialen (φ) Dimension unterschieden. Der Koordinatenursprung liegt auf der z -Achse im gleichen Abstand von den sog. „Pinch“-Spulen (a).

Das Ioffe-Potential

Die Pinch-Spulen sind für den axialen Einschluß in einer sog. magnetischen Flasche verantwortlich. Als solche bezeichnet man das Feld, das zwischen zwei coaxialen Spulen gleicher Stromrichtung entsteht, wenn deren Abstand $2A$ größer als ihr Radius R ist (Abb. 5.6(a)). In diesem Falle entsteht in axialer Richtung bei $z = 0$ ein Minimum, in dessen Umgebung der Feldverlauf harmonisch ist. Für kleine Auslenkungen vom Ursprung zeigen die Feldkomponenten das Verhalten [133]

$$\begin{aligned} B_z(r, z, \varphi) &\simeq B_0 + \frac{1}{2} B_2 \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right) \\ B_r(r, z, \varphi) &\simeq -\frac{1}{2} B_2 r z \end{aligned} \quad (5.23)$$

mit den Koeffizienten

$$B_0 = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + A^2)^{3/2}} \quad \text{und} \quad B_2 = B_0 \frac{3(4A^2 - R^2)}{(R^2 + A^2)^2}. \quad (5.24)$$

Dabei bezeichnen μ_0 die Induktionskonstante, I den Spulenstrom, B_2 die Krümmung und B_0 den zentralen Wert des Feldes. Bei vorgegebenem Spulenabstand wird die maximale Krümmung und damit der beste Einschluß für $R_{\text{opt}} \simeq 0,59A$ erreicht.

Das für den radialen Einschluß verantwortliche Feld wird von vier geraden, parallelen Leitern erzeugt, die den vier langen Kanten eines Quaders entsprechen und symmetrisch um die Achse der Pinch-Spulen angeordnet sind (Abbildung 5.6(c)). Die Stromrichtung der vier Stäbe ist alternierend. Sie erzeugen daher ein zweidimensionales Quadrupolfeld in der xy -Ebene. Ist die Länge der Leiter sehr groß im Vergleich zu ihrem Abstand S von der z -Achse, verschwindet die axiale Feldkomponente¹¹. Für kleine Auslenkungen von der z -Achse gelten für die Radial- und Tangentialkomponenten des Feldes die Beziehungen

$$\begin{aligned} B_r(r, z, \varphi) &\simeq B' r \cos(2\varphi) \\ B_\varphi(r, z, \varphi) &\simeq -B' r \sin(2\varphi) \end{aligned} \quad (5.25)$$

mit dem „Gradienten“

$$B' = \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0 I}{S^2} \quad (5.26)$$

des Quadrupolfeldes. Für den Einschluß der Atome ist der Betrag des Feldes relevant, der allein und linear von r abhängt.

¹¹ Wie sich Abweichungen von dieser idealen Anordnung insbesondere auf die im Experiment eingesetzte Falle auswirken, ist in Referenz [134] nachzulesen.

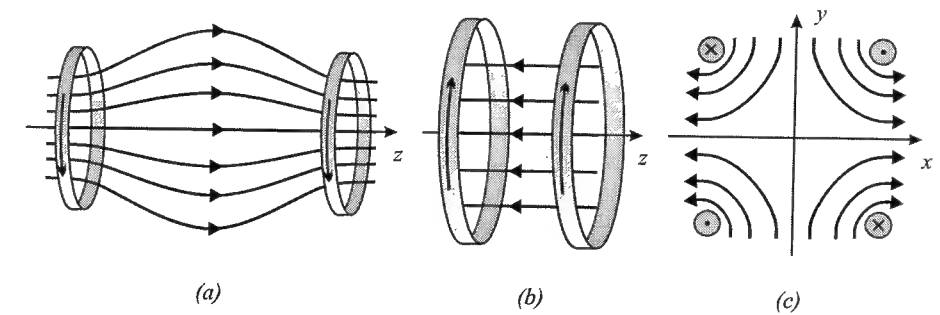


Abbildung 5.6: Zustandekommen der drei statischen Magnetfelder, durch deren Überlagerung das Ioffe-Potential für spinpolarisierte Atome entsteht.

Das Speicherpotential ergibt sich gemäß $V(\vec{r}) = m_F g_F \mu_B |\vec{B}(\vec{r})|$ aus dem Betrag des Gesamtfeldes mit den Komponenten (5.23) und (5.25) zu

$$\begin{aligned} U(r, z, \varphi) &= m_F g_F \mu_B \left[B_0^2 + B_0 B_2 z^2 + \frac{B_2^2}{4} \left(z^4 + \frac{r^4}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. r^2 \left(B'^2 - \frac{1}{2} B_0 B_2 - B' B_2 z \cos(2\varphi) \right) + \dots \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ein radialer Einschluß liegt jedoch offenbar nur vor, wenn die Bedingung

$$2B'^2 - B_0 B_2 - 2B' B_2 z \cos(2\varphi) > 0 \quad (5.28)$$

erfüllt ist. Dann ist auch der Forderung eines endlichen Feldminimums Genüge geleistet. Probleme kann also die Tatsache bereiten, daß die Axialkomponente des Pinch-Feldes bei $r = 0$ ein Maximum bezüglich radialer Richtungen besitzt, für die Speicherung jedoch ein lokales Minimum des Gesamtfeldes erforderlich ist. Bei vorgegebenem Gradienten B' ist daher die zulässige Krümmung B_2 begrenzt. Will man den radialen Einschluß verstärken, muß der axiale Einschluß reduziert werden. Diese Kopplung zwischen den Freiheitsgraden des Potentials wird durch die Überlagerung eines weiteren Feldes auf elegante Weise aufgehoben. Das sog. Kompensationsfeld ist homogen und wird durch ein Spulenpaar in Helmholtz-Anordnung erzeugt (Abbildung 5.6(b)). Während seine Achse mit jener der Pinch-Spulen zusammenfällt, ist sein Feld B_K dem Axialfeld der Pinch-Spulen entgegengerichtet. Es bewirkt somit lediglich eine Reduktion des zentralen Wertes B_0 . Das Speicherpotential behält die Form (5.27), in der allein B_0 durch das sog. Offset-Feld $\tilde{B}_0 = B_0 - B_K$ der Spulenordnung ersetzt werden muß. Für kleine Auslenkungen vom Minimum ist das Potential in jeder Richtung harmonisch. In radialen Richtungen zeigt es mit zunehmendem Abstand von der z -Achse einen linearen Verlauf. An dieser Stelle ist anzumerken, daß sich dieses sog. Ioffe-Potential (5.27) auch mit anderen Leitergeometrien erzeugen läßt. Beispiele hierfür sind die „Baseball“-Falle [133, 42], die „Cloverleaf“-Falle [135], die „4-Dee“-Falle [136], die „Quic“-Falle [137] oder Mikrofallen [17, 18], die ebenfalls erfolgreich bei der Kondensation neutraler Atome eingesetzt werden.

Im harmonischen Potential sind die Bewegungsfreiheitsgrade entkoppelt. Wichtig für das Experiment sind die Oszillationsfrequenzen $\omega_i = [(\partial^2 U / \partial x_i^2)|_0 / m]^{1/2}$ der Atome. Auf-

grund der Zylindersymmetrie unterscheidet man zwischen den radialen und axialen Frequenzen

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{m_F g_F \mu_B}{m} \left(\frac{B'^2}{\tilde{B}_0} - \frac{B_2}{2} \right)} \quad \text{und} \quad \omega_{\parallel} = \sqrt{\frac{m_F g_F \mu_B}{m} B_2}, \quad (5.29)$$

die sich aus (5.27) unter Beschränkung auf quadratische Terme ergeben. Die Entkopplung der Fallenfrequenzen durch den Einsatz eines Kompensationsfeldes erlaubt es insbesondere, bei entsprechender Wahl der Spulenströme ein isotropes Potential zu erzeugen. Wie sich im folgenden Abschnitt zeigt, ist dies für die Überführung der Atomwolke von großem Vorteil. An Gleichung (5.29) ist zu erkennen, daß die radialen Fallenfrequenzen für kleine Werte des zentralen Feldes $\tilde{B}_0$ im Prinzip beliebig hoch werden können, solange die Bedingung (5.22) für die Adiabasie der Spindynamik erfüllt ist. Daher hat die Atomwolke in einem „komprimierten“ Ioffe-Potential stets Zigarrenform. Realisierung und Spezifikationen der Falle sind in Kapitel 7.3 bzw. [32] nachzulesen.

5.5.2 Transfer in die magnetische Falle

Soll die Phasenraumdichte des Gases erhalten bleiben, muß der Transfer der Atome in die Magnetfalle adiabatisch gestaltet werden. Im Hinblick darauf sind drei Forderungen zu erfüllen. Erstens muß der Einschaltvorgang auf Zeitskalen der atomaren Bewegung instantan stattfinden. Ist dies nicht der Fall, prägt sich durch die Expansion des Gases eine Korrelation von Ort und Geschwindigkeit der Atome aus, die nach dem Melassenkühlen zunächst nicht vorliegt (vgl. Anhang A) und das Ergebnis eines irreversiblen Prozesses darstellt¹². Ein solcher Prozeß ist auch die gleichzeitig stattfindende Beschleunigung der Wolke im Schwerfeld. Aus diesen Gründen ist der Einschaltvorgang mit einer Dauer von 300 μ s auf der relevanten Zeitskala nahezu instantan¹³.

Die zweite Forderung besteht in der Überlagerung des Potentialminimums mit dem Schwerpunkt der Wolke. Ist sie nicht erfüllt, würde dem System die potentielle Energie des Schwerpunkts zugeführt werden, was erneut einer Abnahme der Phasenraumdichte entspräche. Bei der Überlagerung ist entlang der Vertikalen die Schwerkraft zu berücksichtigen. Sie spielt in der MOT keine Rolle, weil sie gegenüber der Spontankraft zu vernachlässigen ist. In dem magnetischen Speicherpotential bewirkt sie jedoch eine vertikale Verschiebung des Minimums um $\Delta y = -g/\omega_y^2$. Um diese Strecke muß daher das Magnetfeldminimum bezüglich des Schwerpunktes der Wolke höher liegen. Im Experiment wird die Überlagerung durch eine Positionierung der MOT bezüglich des magnetischen Potentialminimums erreicht. Dabei wird ausgenutzt, daß sich der Ursprung des MOT-Quadrupols mit Hilfe homogener Magnetfelder verschieben läßt. Dafür kommen drei Spulen variabler Windungszahl zum Einsatz, deren Achsen mit jenen des MOT-Quadrupols

¹² Infolge von Stößen verschwindet diese Korrelation zwar nach dem Transfer, jedoch geschieht dies auf Kosten einer Temperaturerhöhung und einer Dichteabnahme.

¹³ Eingedenk der induktiven Last der Falle stellen solch kurze Schaltzeiten eine technische Herausforderung dar, für deren Meisterung B. Sang Dank gebührt.

zusammenfallen. Sie sind mit den Spulen in Serie geschaltet, die zu dessen Erzeugung dienen, wodurch gesichert ist, daß sich der Quadrupolursprung während der Kompression in der MOT nicht bewegt.

Die dritte Forderung schließlich betrifft die Anpassung des Speicherpotentials an Temperatur und Ausdehnung der Wolke. Nach dem Melassenkühlen ist die Geschwindigkeitsverteilung der Atome in guter Näherung gaußförmig, was sich anhand der Expansionsdynamik der Wolke verifizieren läßt (vgl. Kapitel 6.1 und Anhang A). Da die Ortsverteilung der Atome während der Kühlphase eingefroren ist, entspricht sie unmittelbar vor dem Transfer der ebenfalls in guter Näherung gaußförmigen Dichteverteilung in der MOT. Ihre Breite ist jedoch, anders als die der Geschwindigkeitsverteilung, nicht durch die Temperatur bestimmt. Eine in Ort und Geschwindigkeit gaußförmige Phasenraumverteilungsfunktion besitzt das Gas auch in dem harmonischen Potential der magnetischen Falle. Hier ist allerdings die Breite der Ortsverteilung mit $\sigma_{x_i} = [k_B T / (m \omega_i^2)]^{1/2}$ durch die Temperatur und die Fallenfrequenz bestimmt. Der Transfer ist genau dann adiabatisch, wenn die Temperatur und die Breite der Ortsverteilung erhalten bleiben. Sind diese vor dem Transfer bekannt, liegen die Fallenfrequenzen gemäß

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k_B T}{m \sigma_{x_i}^2}} = \frac{\sigma_v}{\sigma_{x_i}} \quad (5.30)$$

fest. Bei typischen Werten von $\sigma_{x_i} \simeq 1,1$ mm und $T \simeq 40$ μ K wird die annähernd sphärische Wolke daher in ein isotropes Potential mit der Oszillationsfrequenz $\omega = 2\pi \times 9$ Hz überführt.

5.5.3 Kompression in der magnetischen Falle

Die adiabatische Kompression in der magnetischen Falle stellt den letzten Schritt vor der Verdampfungskühlung dar. Durch ihn gelingt es, die elastische Stoßrate $\gamma_{el} = \langle nv \rangle \sigma$ der Atome wesentlich zu erhöhen, da während der Kompression sowohl die Dichte n als auch die thermische Geschwindigkeit v der Atome zunehmen.

Erfolgte die Kompression durch eine Skalierung des harmonischen Potentials, bliebe gleichzeitig die Phasenraumdichte des Gases erhalten. Im Experiment gelingt es sogar, die Phasenraumdichte leicht zu erhöhen. Dies liegt daran, daß sich die Ortsabhängigkeit des Potentials während der adiabatischen Kompression verändert. Mit ihr ändert sich auch die Energieabhängigkeit der Zustandsdichte $D(\epsilon)$. Pinkse et al. haben gezeigt, daß die dimensionslose Phasenraumdichte in einem beliebigen Potential durch

$$n_p \lambda_T^3 = \exp \left(\frac{5}{2} + \xi + \frac{S}{N} \right) \quad (5.31)$$

gegeben ist, wo S die Entropie, N die Teilchenzahl und ξ den sog. Potentialparameter darstellen [138]. Letzterer bestimmt über $E_{\text{pot}} = \xi N k_B T$ den Anteil potentieller Energie an der Gesamtenergie und hat für ein harmonisches Potential den Wert 3/2, für ein sphärisches Quadrupolpotential den Wert 3. Nach der Kompression hat die Temperatur des Gases stark zugenommen, und das Ioffe-Potential besitzt in radialen Richtungen

nahezu über die gesamte Wolkenausdehnung eine lineare Ortsabhängigkeit. Der Potentialparameter hat dann in guter Näherung den Wert $\xi = 5/2$. Da die Atome ursprünglich in einem harmonischen Potential gespeichert sind, nimmt die Phasenraumdicke um ca. den Faktor $e^{(5/2-3/2)} = 2,7$ zu, sofern die Kompression adiabatisch ($S = \text{const.}$) und ohne Teilchenverluste erfolgt.

Die Adiabasie ist gewährleistet, wenn erstens die relative Änderung $d\omega/(\omega dt)$ der Oszillationsfrequenzen zu jedem Zeitpunkt klein gegen ω ist. Da sich das thermische Gleichgewicht über Stöße einstellt, muß die Kompression zweitens langsam auf Zeitskalen der inversen Stoßrate erfolgen, was zu der Forderung $d\omega/(\gamma_{\text{el}} dt) \ll \gamma_{\text{el}}$ führt. Um beide Bedingungen zu erfüllen, wird die Wolke innerhalb von 4 s komprimiert. Danach beträgt die axiale Fallenfrequenz in der Regel $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 24,5$ Hz, die radialen Fallenfrequenzen liegen je nach Wahl des Kompensationsfeldes im Bereich $\omega_{\perp} = 2\pi \times 220 \dots 250$ Hz. Bei einer Endtemperatur von knapp $500 \mu\text{K}$ und einer zentralen Dichte von $4 \times 10^{11}/\text{cm}^3$ hat die dichtegemittelte Stoßrate etwa von 3/s auf 40/s zugenommen. Damit liegen gute Voraussetzungen für die Verdampfungskühlung vor.

5.5.4 Charakterisierung des Systems

Die Fallenfrequenzen $\omega_{\parallel}$ und $\omega_{\perp}$ spielen in nahezu allen quantitativen Messungen eine entscheidende Rolle. Dies betrifft insbesondere die Bestimmung der Anzahl kondensierter Atome aus der Ausdehnung des Kondensats auf der Grundlage der Beziehungen (4.11), (4.22) und (4.23). Da die meisten Messungen destruktiv verlaufen und die sukzessive Erzeugung vieler, möglichst identischer Kondensate voraussetzen, ist es zum einen wichtig, daß sich die Fallenfrequenzen über die Dauer der Messung nicht ändern und, zum zweiten, daß sie mit hoher Genauigkeit bekannt sind. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf das Konstanzer Experiment, die in München eingesetzte Falle wird in [139, 140] charakterisiert.

Stabilität des Potentials

Messungen zur Stabilität des Speicherpotentials sind in Kapitel 7.3 zusammen mit dem Aufbau der Konstanzer Falle dokumentiert. Ein Maß für die Stabilität auf der Zeitskala des experimentellen Zyklus ist die Standardabweichung der Wolkentemperaturen, die in aufeinanderfolgenden Zyklen gemessen werden. Über eine Meßzeit von einer Stunde beträgt sie

$$\frac{2\sigma_T}{\langle T \rangle} \simeq 0,06 \quad (5.32)$$

bei $\langle T \rangle \simeq 1 \mu\text{K}$ und entspricht in etwa der relativen Genauigkeit der Temperaturmessung. Fluktuationen auf kurzen Zeitskalen äußern sich in einem Beitrag zur Heizrate des Systems. Für Atomwolken geringer Dichte tragen zusätzlich nur streifende Stöße mit dem Hintergrundgas zur Heizrate bei. In diesem Regime wird die Rate

$$\frac{\dot{T}}{T} \simeq 0,05 \text{ s}^{-1} \quad (5.33)$$

gemessen. Es kann davon ausgegangen werden, daß dieser Wert allein durch Stöße mit dem Hintergrundgas zustandekommt [118, 141, 142]. Daher sind Messungen nicht durch die Kurzzeitstabilität des Potentials limitiert.

Ermittlung der Fallenfrequenzen

Am einfachsten lassen sich die Fallenfrequenzen aus der Oszillation der Atomwolke in dem Speicherpotential bestimmen. Dazu wird die Atomwolke vor ihrer Überführung in die Magnetfalle entweder beschleunigt oder bezüglich deren Potentialminimum ausgelenkt. Anschließend wird die Oszillation des Schwerpunkts der Wolke orts- und zeitaufgelöst beobachtet. Dazu wird die Magnetfalle nach einer variablen Speicherzeit ausgeschaltet und die Position des Wolkenzentrums nach einer kurzen Flugzeit aus Absorptions- oder Fluoreszenzbildern ermittelt. Dieses Procedere wird mit identisch präparierten Atomwolken, jedoch nach unterschiedlichen Speicherzeiten wiederholt. Weil eine Dämpfung allein durch (seltene) Stöße zwischen gespeicherten Atomen zustandekommt, bleibt die Oszillation auch während bzw. nach der Kompression in der magnetischen Falle erhalten. Daher können die Fallenfrequenzen auf diese Weise in jedem Stadium der Kompression gemessen werden.

Eine Frequenzmessung hoher Genauigkeit setzt voraus, daß die Oszillation über die Dauer von vielen Perioden aufgezeichnet wird. Eine Alternative dazu stellt die in Abbildung 5.7 dargestellte kombinierte Messung der Oszillationen zweier unterschiedlich polarisierter Wolken in dem gleichen Potential dar. Die Präparation der Wolken für die beiden dargestellten Meßreihen ist bis auf die optischen Pumpschemata in die Zustände $|F=2, m_F=2\rangle$ bzw. $|F=1, m_F=-1\rangle$ identisch (siehe Kapitel 5.4.3). In dem zur Speicherung eingesetzten Magnetfeld unterscheiden sich daher die Oszillationsfrequenzen der unterschiedlich polarisierten Wolken um den Faktor $(2g_{F=2}/g_{F=1})^{1/2} = \sqrt{2}$. Die Anpassung der Theoriekurven an die Datensätze erfolgt simultan und unter Vorgabe dieses Faktors.

Im Experiment dienen Oszillationsmessungen dieser Art auch als Maß für die Genauigkeit der Überlagerung der MOT mit dem magnetischen Potentialminimum. Aus den beobachteten Amplituden und der Flugzeit von 5 ms läßt sich zurückrechnen, daß die Oszillation das Ergebnis einer Auslenkung von höchstens $100 \mu\text{m}$ vom Potentialminimum ist. Dies stellt in etwa die Genauigkeit dar, mit der sich das Potentialminimum der MOT im Experiment positionieren läßt.

In einem harmonischen Potential sollten die Bewegungsfreiheitsgrade entkoppelt sein. Die Amplitudenmodulation, die in Abbildung 5.7 zu erkennen ist, kann mehrere Ursachen haben. Möglich ist eine Abweichung der Beobachtungsrichtung von der (in diesem Fall) axialen Richtung des Magnetfeldes. Da sich die axialen und radialen Fallenfrequenzen unterscheiden, würde dies zu einer Schwebung führen. Insbesondere bei geringen Fallenfrequenzen oder hohen Schwingungsamplituden kann außerdem die Gravitation das Minimum in vertikaler Richtung so weit verschieben, daß Anharmonizitäten des Potentials eine Rolle spielen. Dies würde sich im Falle des Ioffe-Potentials erstens in einer Kopplung der Bewegungsfreiheitsgrade und zweitens darin äußern, daß die effektive Fallenfrequenz

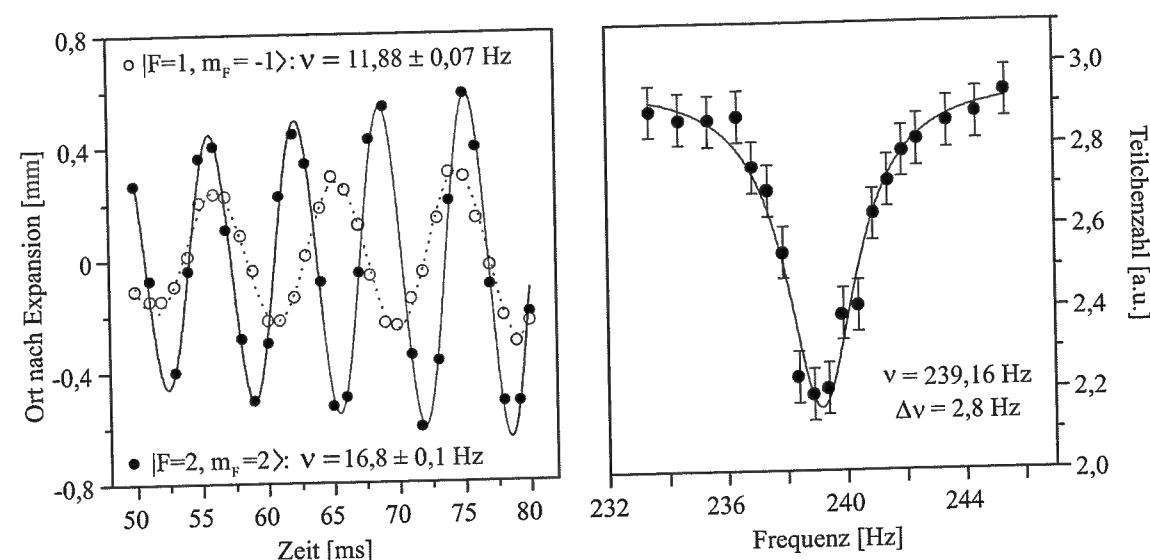


Abbildung 5.7: Bestimmung der Fallenfrequenzen aus der Oszillation der Wolke und durch resonantes Heizen.

über die Ausdehnung der Wolke variiert. Tatsächlich wird während der Oszillation ihres Schwerpunktes auch eine periodische Änderung der Wolkenform beobachtet.

Sowohl Schwebungen als auch Kopplungen erschweren die Frequenzmessung. Nach der Kompression ist zudem die effektive radiale Fallenfrequenz nur für geringe Auslenkungen konstant. Daher wird häufig auf eine andere Methode der Frequenzmessung zurückgegriffen. Dabei wird ausgenutzt, daß dem System durch eine Modulation der Fallenfrequenz oder der Gleichgewichtslage Energie zugeführt werden kann. Dies bedingt eine Heizrate, die im ersten Fall bei einer Modulation mit der Frequenz $2\omega/(2\pi)$ (parametrisches Heizen), im zweiten mit der Frequenz $\omega/(2\pi)$ maximal ist (resonantes Heizen). Die relative Breite der Resonanzen nimmt mit der Amplitude der Modulation zu, die somit im Hinblick auf eine genaue Messung klein gewählt werden sollte. Im Experiment können die Fallenfrequenzen über den Stab-Strom (radial), den Pinch-Strom (axial) oder den Kompensationsstrom (radial) moduliert werden. Die Modulation der Gleichgewichtslage kann in allen Richtungen über ein zusätzliches Magnetfeld erfolgen. Eine hohe Genauigkeit wird bei der Messung dadurch erreicht, daß die Temperaturzunahme in einen (genauer quantifizierbaren) Teilchenverlust konvertiert wird. Dies gelingt, wie bei der Verdampfungskühlung, durch eine Begrenzung der Potentialtiefe mit Hilfe der Radiofrequenz. Dadurch wird gleichzeitig sichergestellt, daß die Oszillation der Atome auf den harmonischen Bereich des Potentials beschränkt ist. In Abbildung 5.7 ist rechts eine Messung der radialen Fallenfrequenz durch resonantes Heizen dargestellt. Für jeden Datenpunkt wurden zwei Atomwolken zunächst durch Verdampfen auf $5\mu\text{K}$ und damit in den harmonischen Potentialbereich gekühlt. Während der anschließenden Speicherzeit von 1 s erfolgt die Modulation der Gleichgewichtslage mit konstanter Frequenz. Nach Abschalten des Potentials dient die Fluoreszenz der Atome in einem resonanten Laserstrahl als Maß für die Teilchenzahl. Lage und Breite der Resonanz werden durch Anpassen eines Lorentz-Profiles ermittelt.

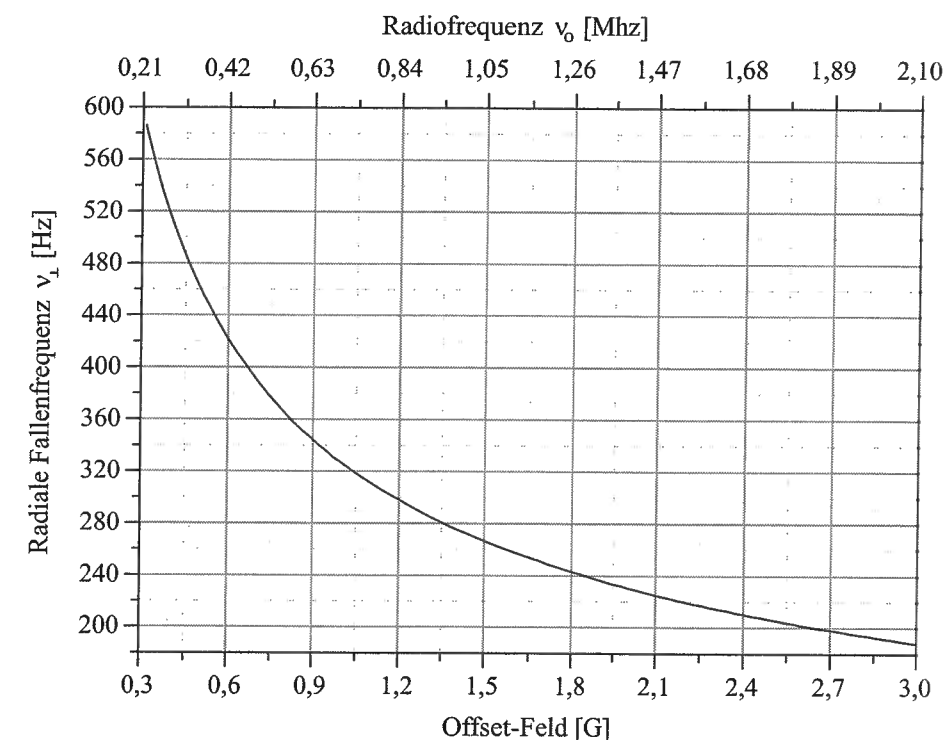


Abbildung 5.8: Radiale Fallenfrequenz für maximal polarisierte Rb-Atome in Abhängigkeit des Offset-Feldes bzw. der Radiofrequenz am Potentialminimum.

Experimente finden in der Regel bei einer axialen Fallenfrequenz von $\omega_{||} = 2\pi \times 24,5\text{ Hz}$ statt, die sich mit hoher Genauigkeit reproduzieren läßt. Die radialen Fallenfrequenzen variieren hingegen geringfügig von Tag zu Tag, was auf ihre empfindliche Abhängigkeit vom Offset-Magnetfeld zurückzuführen ist. Diese Abhängigkeit ermöglicht es allerdings auch, die radialen Fallenfrequenzen über die Position der Kompensationsspulen einzustellen, ohne Änderungen in der Ansteuerung der Falle bzw. ihrer Ströme vorzunehmen. Prognosen für die Fallenfrequenzen, die auf Berechnungen des Speicherpotentials unter Berücksichtigung der vollen Leitergeometrie beruhen, stimmen bis auf wenige Prozent mit den Messungen überein und lassen sich an diese anpassen. Auf diese Weise kann die Abhängigkeit der radialen Fallenfrequenz von dem Offset-Magnetfeld geeicht werden. Dadurch muß nicht in jedem Experiment eine lästige Frequenzmessung durchgeführt werden, es reicht, das Offset-Feld zu bestimmen. Dies geschieht durch vollständiges Entleeren der Falle durch Radiofrequenz-induzierte Elektronenspinresonanz-Übergänge zwischen den Zeeman-Zuständen der Atome (siehe Kapitel 5.6.3). Aus der Radiofrequenz ν_0 , bei der die Falle vollständig entleert wird, läßt sich über die Relation $h\nu_0 = g_F\mu_B\tilde{B}_0$ das Offset-Feld bestimmen. Der endlichen Breite der Spinresonanz läßt sich Rechnung tragen, indem für ν_0 der Mittelwert jener beiden Werte gewählt wird, die man bei einer Annäherung von kleinen und großen Frequenzen aus ermittelt. In Abbildung 5.8 ist die geeichte Abhängigkeit der radialen Fallenfrequenzen von $\tilde{B}_0$ bzw. ν_0 dargestellt. In der Regel wird bei einem Offset-Feld von etwa 2 G und damit bei Fallenfrequenzen von ca. 230 Hz gearbeitet.

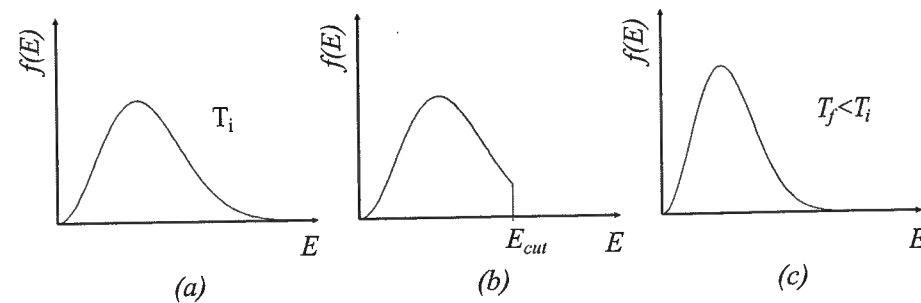


Abbildung 5.9: Prinzip der Verdampfungskühlung. Nach dem Entfernen hochenergetischer Teilchen stellt sich das Gleichgewicht bei einer tieferen Temperatur ein. Gleichzeitig werden überdurchschnittlich energiereiche Atome nachgeliefert.

5.6 Verdampfungskühlung

Auf die Bedeutung der Verdampfungskühlung im Zusammenhang mit der BEK atomarer Gase hat H. Hess 1986 hingewiesen [143]. Von der Demonstration der Methode, die 1988 an magnetisch gespeichertem Wasserstoff gelang [7], bis zur Beobachtung der BEK [9, 10, 16] sollten jedoch noch acht Jahre vergehen. Der Durchbruch gelang erst durch die Anwendung der Kühlmethode auf Alkaligase und die zeitgleich eingeführte Technik der Radiofrequenz-induzierten Verdampfung [144, 145]. Bis dato spielt die Verdampfungskühlung in allen BEK-Experimenten eine zentrale Rolle.

5.6.1 Das Prinzip der Verdampfungskühlung

Das Prinzip der Verdampfungskühlung wird häufig am Beispiel einer Tasse heißen Kaffees erläutert: Durch das Verdampfen überdurchschnittlich energiereicher Moleküle sinkt die Temperatur der zurückbleibenden Flüssigkeit. Dahinter verbirgt sich mehr als eine bloße Selektion im Phasenraum. Eine effiziente Kühlung wird erst dadurch möglich, daß die Flüssigkeit bzw. das Gas durch Stöße thermalisiert. Im thermischen Gleichgewicht nämlich ist sichergestellt, daß stets Teilchen mit weit überdurchschnittlicher Energie nachgeliefert werden. Dadurch kommt die Kühlung viel langsamer zum Erliegen als man zunächst annehmen könnte. Dieser Prozeß ist in Abbildung 5.9 in Schritten veranschaulicht. Entfernt man zunächst die hochenergetischen Teilchen aus der Boltzmann-Verteilung $f(E)$ jenseits von E_{cut} , stellt sich anschließend durch Stöße das thermische Gleichgewicht bei einer tieferen Temperatur ein, und der „Maxwell-Schwanz“ wird regeneriert. Daher kann er in einem zweiten Schritt wieder entfernt werden.

Im Experiment erfolgt die Verdampfungskühlung in der Magnetfalle nicht schrittweise, sondern durch ein kontinuierliches Absenken der Energie E_{cut} , oberhalb derer Teilchen entfernt werden (man spricht dann von „erzwungener Verdampfung“). Es wird also der stetig abnehmenden Temperatur des Gases Rechnung getragen. Damit kann der Prozeß wesentlich effizienter gestaltet werden als in einer Kaffeetasse, in der die Energieschwelle über die (nahezu temperaturunabhängige) Oberflächenspannung festliegt. Erst durch erzwungene

Verdampfung wird es möglich, die Temperatur des Gases um über vier Größenordnungen zu reduzieren. Allerdings geschieht dies, wiederum anders als im Falle der Kaffeetasse, auf Kosten eines immensen Teilchenverlustes von bis zu vier Größenordnungen.

Um den Teilchenverlust so gering wie möglich zu halten, darf sich die Energie E_{cut} auf der Zeitskala der inversen elastischen Stoßrate γ_{el} nur langsam ändern. Luiten et al. haben gezeigt, daß sich das Gas in diesem Falle immer in einem thermodynamischen Quasi-Gleichgewicht befindet, das durch die gekappte Boltzmann-Verteilung

$$f(E) = n_0 \lambda_T^3 e^{-\beta E} \Theta(E_{\text{cut}} - E) \quad (5.34)$$

in Abbildung 5.9(b) beschrieben wird [146]. Dabei sind n_0 die zentrale Dichte, die das Gas in einem unendlich hohen Potential hätte, λ_T die thermische de Broglie-Wellenlänge und Θ die Heavisidesche Stufenfunktion. Auf diese Weise kann dem System zu jedem Zeitpunkt eine Temperatur zugeschrieben werden. Sie ist gemäß

$$E_{\text{cut}} = \eta k_B T \quad (5.35)$$

über den sog. Abschneideparameter η mit der aktuellen Potentialtiefe verbunden. Für $\eta \gg 1$ nimmt die Rate, mit der Atome verdampft werden, die Form

$$\frac{\dot{N}_{\text{ev}}}{N} = \frac{1}{\tau_{\text{ev}}} \approx n_0 \bar{v} \sigma_s e^{-\eta} \quad (5.36)$$

an. Erwartungsgemäß werden zu verdampfende Teilchen durch die elastische Stoßrate $\sim n_0 \bar{v} \sigma_s$ nachgeliefert, jedoch umso seltener, je höher die Potentialtiefe im Vergleich zur mittleren Energie der gespeicherten Atome ist.

Die innere Energie eines inhomogenen Gases ist durch $E = (3/2 + \xi) N k_B T$ gegeben. Dabei ist ξ der bereits in Gleichung (5.31) eingeführte Potentialparameter. In einem Ioffe-Potential ist er temperaturabhängig und variiert zwischen den Werten $5/2$ und $3/2$. Während der Verdampfungskühlung ändert sich die innere Energie entsprechend $\dot{E} = (3/2 + \xi) k_B (\dot{N} T + N \dot{T})$, wobei $\dot{N} = -\dot{N}_{\text{ev}}$ gilt. Diese Änderung läßt sich gemäß $\dot{E} \approx \epsilon \dot{N}$ auch durch den Teilchenverlust und die mittlere Energie ϵ der verdampften Teilchen ausdrücken. Für große η wird dem System in guter Näherung mit jedem Teilchen die Energie $\epsilon = \eta k_B T$ entzogen. Durch Gleichsetzen der obigen Ausdrücke für $\dot{E}$ ergibt sich sofort, daß zwischen Temperatur und Teilchenzahl die Beziehung

$$T \propto N^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\dot{T}/T}{\dot{N}_{\text{ev}}/N} = \frac{\eta}{3/2 + \xi} - 1 \quad (5.37)$$

gilt. Der sog. Effizienzparameter α gibt an, um wieviel die Energie der verdampften Teilchen die mittlere Energie gespeicherter Atome übertrifft. Eine Kühlung des Gases kann nur erreicht werden, wenn durch die Wahl $\eta > 3/2 + \xi$ mehr als die mittlere Energie der Atome abgeführt wird¹⁴. Hier wird ein Dilemma deutlich: Einerseits ist es offenbar erstrebenswert, mit einem möglichst hohen Wert von η (bzw. α) dafür zu sorgen, daß

¹⁴ Dies gilt nur näherungsweise. Tatsächlich sind auch kleinere Werte von η möglich, weil die Quasi-Gleichgewichtsverteilung (5.34) und mit ihr die mittlere Energie von η abhängen.

die Temperatur auf Kosten eines geringen Teilchenverlustes sinkt. Andererseits aber wird damit unter Umständen die Dauer des Kühlprozesses, wie anhand der Gleichungen (5.36) und (5.37) zu erkennen ist, inakzeptabel lang.

Entscheidend ist daher, wie sich die elastische Stoßrate während der Verdampfungskühlung verhält. Je größer sie ist, desto höher kann η bei vorgegebener Kühdauer gewählt werden. Aus den Gleichungen (3.15), (5.37) und der Tatsache, daß das effektive Volumen des Gases wie $V_e \propto T^\xi$ skaliert, ergibt sich die Proportionalität

$$\gamma_{el} \propto T^{(1/\alpha + 1/2 - \xi)}. \quad (5.38)$$

Es kann also mit $\alpha > (\xi - 1/2)^{-1}$ erreicht werden, daß die Stoßrate trotz der Temperaturabnahme zunimmt. Möglich wird dies erst durch das inhomogene Potential. Es bewirkt gewissermaßen eine Kompression des Gases mit abnehmender Temperatur. Oberhalb eines potentialabhängigen Wertes von η wirkt sich die Dichtezunahme stärker auf die Stoßrate aus, als die Abnahme der Relativgeschwindigkeit mit der Temperatur. In diesem sog. „Runaway“-Regime ist die Verdampfungskühlung ein selbstbeschleunigter Prozeß: Will man einerseits η konstant halten, muß die Potentialtiefe E_{cut} mit sinkender Temperatur immer schneller reduziert werden, wodurch wiederum die Temperatur immer schneller abnimmt. Andererseits bietet es sich jetzt natürlich an, nicht an η sondern an der Geschwindigkeit dE_{cut}/dt festzuhalten und damit zu erreichen, daß η mit sinkender Temperatur wächst und somit weniger Teilchen verloren gehen. Eine Wahl zwischen diesen beiden Strategien ist jedoch nur noch sehr eingeschränkt möglich, wenn es Heizraten und zusätzliche Verlustprozesse im System gibt.

5.6.2 „Schlechte“ Stöße und Antievaporation

Durch Verluste, die nicht auf die Verdampfung zurückzuführen sind, nimmt die Anzahl der Teilchen, mit der eine bestimmte Temperatur erreicht wird, nicht nur unmittelbar, sondern auch auf indirektem Wege ab. Dies ist dadurch bedingt, daß Verluste auch die Dichte, die elastische Stoßrate und somit die Effizienz der Verdampfungskühlung reduzieren. Mit der Speicherzeit ist natürlich auch der Dauer der Verdampfungskühlung eine Grenze gesetzt. Für das Experiment ist entscheidend, ob sich unter diesen Bedingungen das Runaway-Regime erreichen bzw. aufrechterhalten läßt. Dies kann nur gelingen, wenn elastische Stöße über die gesamte Dauer des Kühlprozesses wesentlich häufiger stattfinden als Stöße, die ungewollte Verluste bewirken. Wichtig ist daher das Verhältnis

$$\mathcal{R} = \frac{\langle n \rangle \bar{v} \sigma}{1/\tau_{bg} + K_2 \langle n \rangle + K_3 \langle n^2 \rangle} \quad (5.39)$$

der Raten von „guten“ zu „schlechten“ Stößen (siehe Kapitel 3.2 und 3.3). Es sollte mindestens von der Größenordnung 10^2 sein. Das ergeben Simulationen und Abschätzungen, die sowohl in unserer [32], als auch in vielen anderen Gruppen durchgeführt wurden. Aufgrund ihrer unterschiedlichen Abhängigkeiten von Dichte und Temperatur dominieren Verluste durch Stöße mit dem Hintergrundgas, durch Spinrelaxation und durch Rekombination in unterschiedlichen Stadien der Verdampfung. Stöße mit dem Hintergrundgas

spielen unter guten Vakuumbedingungen – wenn überhaupt – dann nur zu Beginn des Prozesses eine Rolle. Spinrelaxation ist im Zustand $|F=1, m_F=-1\rangle$ bei geringen Magnetfeldern und tiefen Temperaturen unterdrückt, wie in Kapitel 3.2 erläutert wurde. Das Verhältnis von elastischen zu Rekombinationsstößen wird jedoch, den Ausführungen in Kapitel 3.3 zufolge, sowohl mit zunehmender Dichte als auch mit sinkender Temperatur ungünstiger. Zumindest theoretisch ist daher die Phasenraumdicke begrenzt, die durch Verdampfungskühlung erreicht werden kann.

Daß sich Heizraten nachteilig auf die Effizienz der Verdampfungskühlung auswirken, liegt auf der Hand, da sie durch die „Kühlrate“ überkompensiert werden müssen. Neben den bereits in Abschnitt 5.5.4 diskutierten technischen Heizraten verursachen dichteabhängige Verluste eine Heizrate durch sog. Antievaporation. Sie kommt dadurch zustande, daß inelastische Stöße in einem inhomogenen System vorzugsweise zwischen Teilchen mit unterdurchschnittlicher potentieller Energie stattfinden. Dieser Prozeß, den man auch als „Verdampfungsheizen“ bezeichnen könnte, soll im folgenden quantifiziert werden.

Verluste durch inelastische Stöße machen sich erst bei hohen Dichten bemerkbar. Im Experiment werden diese erst gegen Ende des Kühlprozesses und somit bei tiefen Temperaturen erreicht. Hier ist das Speicherpotential harmonisch und die Energie, die dem System im Mittel bei einem inelastischen j -Körper-Stoß mit jedem der Teilchen verloren geht, durch

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_j &= \langle E_{kin} \rangle + \int E_{pot}(\vec{r}) \frac{n(\vec{r})^j}{\int n(\vec{r})^j d^3r} d^3r \\ &= \frac{3}{2} k_B T + \frac{1}{j} \frac{3}{2} k_B T = \frac{3(j+1)}{2j} k_B T \end{aligned} \quad (5.40)$$

gegeben. Der erste Beitrag entspricht der mittleren kinetischen Energie der gespeicherten Atome, da die Stoßwahrscheinlichkeit bei tiefen Temperaturen nicht geschwindigkeitsabhängig ist. Wie am zweiten Beitrag zu erkennen, geht jedoch um den Faktor $1/j$ weniger potentielle Energie verloren, als gespeicherte Atome im Mittel besitzen. Dies ist das Ergebnis der Gewichtung der potentiellen Energie mit der ortsabhängigen Wahrscheinlichkeitsverteilung inelastischer Stöße. Mit dem Energieargument, das bereits zur Herleitung von Gleichung (5.37) diente, folgt nun unmittelbar, daß die drei Verlustraten $\dot{N}_j/N = -K_j \langle n(\vec{r})^{j-1} \rangle$ jeweils zu den Heizraten

$$\frac{\dot{T}_j}{T} = -\frac{\dot{N}_j}{N} \left(\frac{j-1}{2j} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } j=1 \\ \frac{1}{4\sqrt{8}} n_p K_2 & \text{für } j=2 \\ \frac{1}{3\sqrt{27}} n_p^2 K_3 & \text{für } j=3 \end{cases} \quad (5.41)$$

führen¹⁵. Erwartungsgemäß ist mit dichteunabhängigen Verlusten keine Heizrate verbunden.

Die Auswirkungen der Antievaporation können insbesondere bei hohen Dichten beachtlich sein: Wird mit Rubidium im Zustand $|F=2, m_F=2\rangle$ die Phasenraumdicke von $n_p \lambda_T^3 \simeq$

¹⁵ Eine etwas ausführlichere Herleitung findet sich in der Diplomarbeit [147].

2 beispielsweise mit $n_p \simeq 3 \times 10^{14}/\text{cm}^3$ und $T \simeq 1 \mu\text{K}$ erreicht, so muß entsprechend den Gleichungen (5.41), (3.39) und (3.52) insgesamt mit einer Heizrate von $\dot{T}/T \simeq 0,7/\text{s}$ gerechnet werden. Wird die gleiche Phasenraumdicke jedoch mit $n_p \simeq 1 \times 10^{14}/\text{cm}^3$ und $T \simeq 480 \text{ nK}$ erreicht, erwartet man lediglich die Rate $\dot{T}/T \simeq 0,08/\text{s}$, die von der gleichen Größenordnung wie die technischen Heizraten des Systems ist.

Im Experiment ist es häufig erforderlich, die Temperatur des Gases nach erfolgter Kühlung konstant zu halten, um Messungen unter definierten Bedingungen durchführen zu können. In diesem Falle muß die Antievaporation durch Verdampfen genau kompensiert werden, was aufgrund der Beziehungen (5.36), (5.37) und (5.41) im (bei tiefen Temperaturen) harmonischen Potential der Forderung

$$\left(\frac{\eta_T}{3} - 1\right) e^{-\eta_T} \stackrel{!}{=} \frac{\frac{K_2 n_p}{4\sqrt{8}} + \frac{K_3 n_p^2}{3\sqrt{27}}}{n_p \bar{v} \sigma_s} \quad (5.42)$$

entspricht. Dominieren im System Verluste infolge inelastischer Stöße, entspricht die rechte Seite in guter Näherung $\mathcal{R}^{-1}$. Durch die Gleichung ist der Wert η_T festgelegt. Für die obigen Zahlenbeispiele erhält man $\eta_T \simeq 9,8$ bzw. $\eta_T = 10,6$. Hier wird deutlich, wie viel effizienter die Verdampfungskühlung im Vergleich zur Antievaporation ist: Soll die Temperatur konstant bleiben, ist für einen inelastischen j -Körper-Prozess das Verhältnis der Verluste infolge von Evaporation und Antievaporation durch

$$L_j = \frac{\dot{N}_{\text{ev},j}}{\dot{N}_j} = \frac{3(j-1)}{2j(\eta_T - 3)} \quad (5.43)$$

gegeben. Für $\eta_T = 10$ erhält man $L_2 = 0,11$ und $L_3 = 0,14$. Da der gesamte Verlust durch $\dot{N}_j + \dot{N}_{\text{ev},j}$ gegeben ist, bedeutet dies de facto, daß die Konstanz der Temperatur auf Kosten einer geringen „Verstärkung“ der inelastischen Ratenkonstanten auf $(1 + L_2)K_2$ bzw. $(1 + L_3)K_3$ erreicht wird.

Schließlich gilt noch anzumerken, daß Antievaporation in einem teilweise kondensierten Gas nur durch Verluste angeregter Atome zustandekommt. Verluste von Atomen aus dem Grundzustand des Potentials machen sich in der Energiebilanz des Systems nicht bemerkbar und führen daher auch nicht zu einer Heizrate. Allerdings reduzieren sie die Gesamtteilchenzahl, was in einem wechselwirkenden System endlicher Teilchenzahl gemäß (4.15) und (2.22) Auswirkungen auf die Übergangstemperatur hat. Wird die Temperatur des Systems konstant gehalten, variiert mit der Teilchenzahl die relative Besetzung N_0/N des Grundzustandes. Ob sie zu- oder abnimmt, hängt davon ab, ob die Verschiebung der Übergangstemperatur infolge der Abnahme der Wechselwirkung oder jene infolge der Abnahme der Teilchenzahl dominiert.

5.6.3 Rf-induzierte Verdampfungskühlung

Bei der Radiofrequenz(Rf)-induzierten Verdampfungskühlung wird ausgenutzt, daß in der magnetischen Falle mit der Zeeman-Aufspaltung auch die Spinresonanz der Atome ortsabhängig ist. Da es sich dabei um Übergänge zwischen Zeeman-Niveaus des Grundzustands handelt, kann die Resonanz bei geringer Rf-Amplitude extrem schmal werden. In

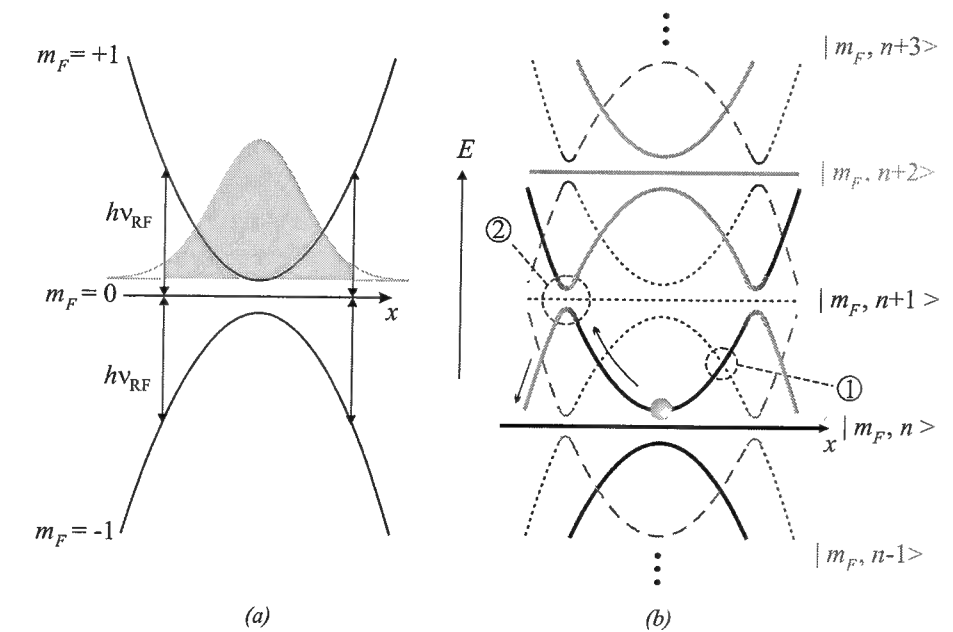


Abbildung 5.10: (a): Prinzip der Rf-induzierten Verdampfung am Beispiel eines ($F = 1$)-Modellsystems. Atome mit hoher Gesamtenergie erreichen die Region, in der ihre Zeeman-Aufspaltung der Energie der Rf-Photonen entspricht, und werden in einen nicht speicherbaren Zustand überführt. (b): Im Bild der „dressed states“ wird deutlich, daß adiabatisches Verdampfen in diesem System durch Zwei-Photonen-Übergänge zustandekommt.

der magnetischen Falle ist sie dann lediglich auf einer scharf definierten Äquipotentialfläche erfüllt, die nur von Atomen mit entsprechend hoher Gesamtenergie erreicht werden kann. Die betroffenen Atome werden dabei in Zeeman-Zustände überführt, die sich nicht mehr für die magnetische Speicherung eignen, und verlassen infolgedessen das Gas. Dies ist in Abbildung 5.10(a) am Beispiel eines ($F = 1$)-Atoms veranschaulicht.

Zur Beschreibung des Prozesses eignet sich das Bild der adiabatischen Potentialkurven (neudeutsch auch „dressed states“) [148]. Als solche werden die Energieeigenzustände $|m_F, n\rangle$ des Systems bezeichnet, das sich aus dem Atom mit den Zeeman-Zuständen $|m_F\rangle$ und dem Rf-Feld mit den Photonenanzahlzuständen $|n\rangle$ zusammensetzt. Mit dem Magnetfeld sind auch die Eigenzustände ortsabhängig, was zu dem in Abbildung 5.10(b) dargestellten Spektrum führt. Der Abstand der Zeeman-Triplets entspricht der Energie der Rf-Photonen und nimmt somit im Verlauf der Verdampfungskühlung ab.

Übergänge zwischen benachbarten Zeeman-Niveaus des Atoms sind mit einer Änderung der Photonenzahl um $\Delta n = \pm 1$ verbunden, jedoch nicht mit einer Änderung der Gesamtenergie des Systems. Sie können daher lediglich an jenen Orten stattfinden, an denen sich zwei Zustände kreuzen, und auch dann nur, falls die Anzahl der Quanten erhalten bleibt. In Abbildung 5.10(b) sind beide Voraussetzungen z.B. am Ort ② erfüllt, nicht jedoch am Ort ①. Im ersten Fall führt die Wechselwirkung des Atoms mit dem Rf-Feld zu einer Kopplung, die sich in einem sog. „avoided crossing“, d.h. einer Aufhebung der Entartung bemerkbar macht. Aufgrund der Äquidistanz der Zeeman-Aufspaltung sind am gleichen

Ort paarweise die Zustände $|m_F = -1, n + 2\rangle$ und $|m_F = 0, n + 1\rangle$ bzw. $|m_F = 0, n + 1\rangle$ und $|m_F = 1, n\rangle$ gekoppelt. Effektiv kommt es dadurch zu einer Kopplung zwischen $|m_F = -1, n + 2\rangle$ und $|m_F = 1, n\rangle$. Bewegt sich ein Atom adiabatisch, so bleibt es stets im gleichen Energieeigenzustand des Gesamtsystems und folgt somit einer adiabatischen Potentialkurve. Ist es zunächst im Zeeman-Zustand $|m_F = 1\rangle$ gespeichert und reicht seine kinetische Energie aus, um die Region ② zu erreichen, wird es dort in den Zeeman-Zustand $|m_F = -1\rangle$ überführt, für den das Potential repulsiv ist. Das adiabatische Verdampfen kommt also durch die induzierte Emission zweier Photonen zustande.

Wahl der Feldamplitude

Im Landau-Zener-Modell (siehe z.B. [149]) läßt sich die Wahrscheinlichkeit für einen adiabatischen Übergang bei der Kreuzung zweier Niveaus quantifizieren. Sie ist durch

$$p = 1 - \exp(-2\pi\Gamma_{LZ}) \quad (5.44)$$

gegeben, wo Γ_{LZ} den Landau-Zener-Parameter bezeichnet. Dieser hängt gemäß

$$\Gamma_{LZ} = \frac{\hbar\Omega_R^2}{[d\varepsilon(r)/dt]_{r_c}} = \frac{\hbar\Omega_R^2}{\mu_B g_F \langle v \rangle [dB/dr]_{r_c}} \quad \text{mit} \quad \Omega_R = \frac{\mu_B g_F B_{rf,\perp}}{2\hbar} \quad (5.45)$$

von der Rabi-Frequenz Ω_R und der Rate ab, mit der sich am Ort der Kopplung r_c die Zeeman-Aufspaltung $\varepsilon(r) = \mu_B g_F B(r)$ der ungestörten Niveaus im Bezugssystem des Atoms ändert. Diese Rate läßt sich durch den Gradienten des Magnetfeldes und die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ der Atome ausdrücken. Für die Rabi-Frequenz ist die zum lokalen Magnetfeld orthogonale Komponente $B_{rf,\perp}$ des Rf-Feldes relevant. Die Adiabasie ist für $p \simeq 1$ gewährleistet und erfordert, wie an Gleichung (5.45) zu erkennen ist, eine Anpassung der Rf-Amplitude an Temperatur und Potential.

Vitanov et al. haben gezeigt, daß sich das Landau-Zener-Modell auf N -Niveau-Kreuzungen verallgemeinern läßt [150]. Die Übergangswahrscheinlichkeiten P_i in die einzelnen Niveaus können analytisch auf das Ergebnis (5.44) für das Zwei-Niveau-System zurückgeführt werden. Erfolgt die Speicherung im energetisch höchsten Niveau mit $n = 1$ und ist das tiefste Niveau mit $n = N$ indiziert, ergeben sich die Übergangswahrscheinlichkeiten gemäß

$$P_n = \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} (1-p)^{(N-n)} p^{(n-1)}. \quad (5.46)$$

Im Experiment sollten die Atome nach Möglichkeit in nicht-speicherbare Zustände mit $n > (N-1)/2$ überführt werden. Strebt man für die Besetzung ungebundener Zustände eine Wahrscheinlichkeit von 0,99 an, so erfordert dies nach (5.44) und (5.46) Landau-Zener-Parameter von 0,367 respektive 0,312 für Rb-Atome im Zustand $|F=1, m_F=-1\rangle$ bzw. $|F=2, m_F=2\rangle$. Für ein bekanntes Potential der Form (5.27) läßt sich aus diesen Werten nach Gleichung (5.45) die minimale Amplitude des Rf-Feldes bestimmen. Entscheidend ist dabei der (steilere) radiale Gradient des Magnetfeldes am Ort der Resonanz. Letzterer ist über $U(r_c, 0, 0) \simeq \eta k_B T$ mit der Temperatur des Gases verbunden. Für die Geschwindigkeit der Atome läßt sich als obere Grenze die zweifache mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle = 2\sqrt{8k_B T / (\pi m)}$ ansetzen. Die erforderliche Feld-Amplitude ist erwartungsgemäß temperaturabhängig und hat den in Abbildung 5.11 dargestellten Verlauf.

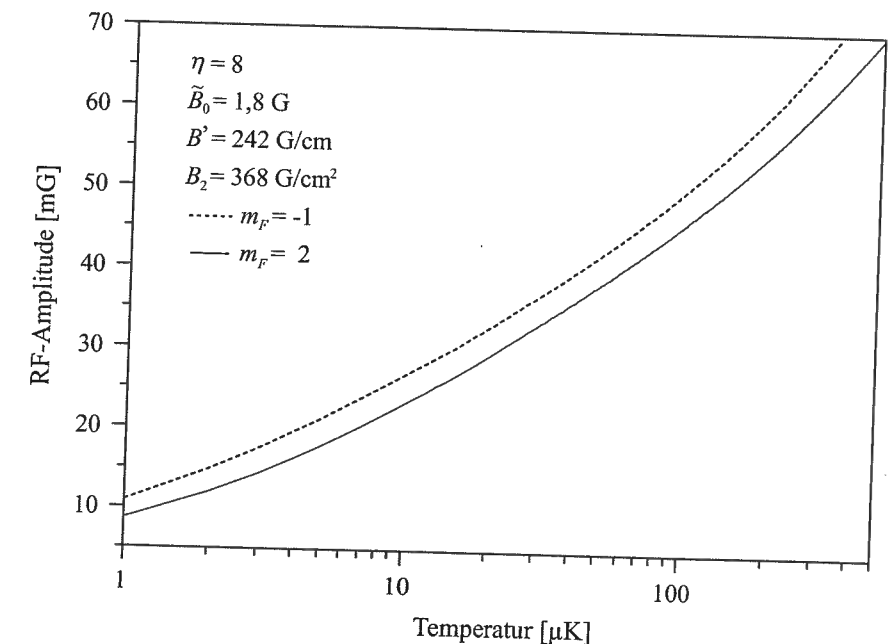


Abbildung 5.11: Erforderliche Orthogonalkomponente der Rf-Amplitude, wenn die Übergangswahrscheinlichkeit in nicht-speicherbare Zeeman-Zustände 0,99 betragen soll.

Wird die Rf-Amplitude kleiner gewählt, prägen sich Populationen in allen Minima der adiabatischen Potentiale aus. Dieser in Abbildung 5.12(a) veranschaulichte Prozeß kann vor allem gegen Ende der Kühlung zerstörerische Auswirkungen haben, wenn jene Atome, die am Ort der Resonanz lokalisiert sind und nicht mitgekühlt wurden, die kalte Wolke durchdringen können. Sie bilden erstens ein „warmes“ Hintergrundgas und bewirken eine Heizrate. Die Speicherung verschiedener Spinzustände führt hier zweitens zu hohen inelastischen Stoßraten.

Insbesondere bei hohen Temperaturen ist die tatsächlich erforderliche Feldamplitude geringfügig größer als in Abbildung 5.11 abzulesen ist. Dies ist darin begründet, daß die Spinresonanz bei hohen Temperaturen in Regionen hoher Magnetfelder lokalisiert ist. Hier ist die Aufspaltung der Energieniveaus aufgrund des quadratischen Zeeman-Effektes nicht mehr exakt äquidistant, wodurch sich auch nicht mehr alle Niveaus am gleichen Ort kreuzen [151, 152, 153]. Mehr-Photonen-Übergänge sind hier nur möglich, wenn die Ortsbreite

$$d_c = \frac{B_{rf,\perp}}{\left| \frac{dB}{dr} \right|_{r_c}} \quad (5.47)$$

der avoided crossings groß im Vergleich zu ihrem Abstand ist.

Gegen Ende der Verdampfungskühlung kann die Rf-Amplitude einen Einfluß auf die Oszillationsfrequenz der gespeicherten Atome haben. Im harmonischen Bereich der Falle sind die adiabatischen Potentiale für den $2 \times F$ -Photonen-Übergang durch

$$U(r)_{1,2} = \frac{1}{2} \left[2F\hbar\omega_{rf} \pm \sqrt{(m\omega_0^2 r^2 - 2F\hbar\Delta_{rf})^2 + (2F\hbar\Omega_R)^2} \right] \quad (5.48)$$

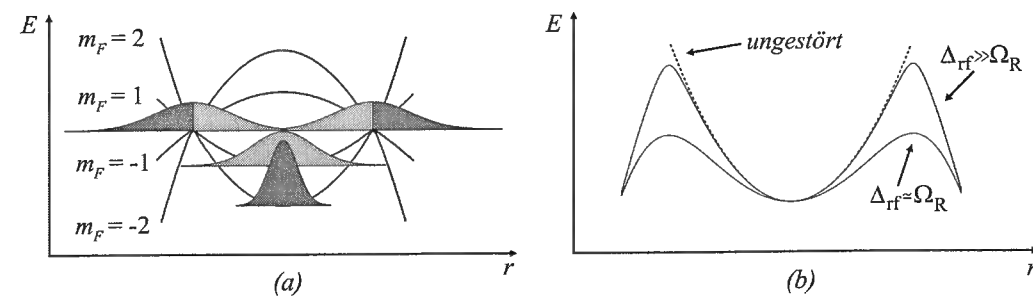


Abbildung 5.12: (a): Ist die Rf-Amplitude zu klein, prägen sich Wolken in allen Minima der adiabatischen Potentiale aus. Grau sind Populationen gekennzeichnet, die sich nicht im Zustand $m_F = 2$ befinden. (b): Ist sie zu groß, beeinflusst sie das Potential.

gegeben (siehe z.B. [149]). Dabei sind ω_0 die Oszillationsfrequenz in Abwesenheit des Rf-Feldes, ω_{rf} die Radiofrequenz und Δ_{rf} deren Verstimmung bezüglich jener Frequenz, bei der die Falle vollständig entleert wird. Über $\omega_{eff} = [(\partial^2 U / \partial r^2|_0) / m]^{1/2}$ ergibt sich daraus die Korrektur

$$\frac{\omega_0}{\omega_{eff}} = \left(1 + \frac{\Omega_R^2}{\Delta_{rf}^2}\right)^{1/4}. \quad (5.49)$$

Der Effekt einer zu hohen Rf-Amplitude ist in Abbildung 5.12(b) zu sehen. Die beiden adiabatischen Potentiale entsprechen den gleichen Werten von ω_0 und Δ_{rf} jedoch unterschiedlichen Rabi-Frequenzen. Da eine genaue Kenntnis der Oszillationsfrequenzen für die Bestimmung aller Systemgrößen Voraussetzung ist und sich die Potentialform während der Verdampfungskühlung nicht ändern sollte, muß stets $\Delta_{rf} \gg \Omega_R$ gelten.

Im Konstanzer Experiment wird das Rf-Feld außerhalb des Vakuums mit Hilfe zweier koaxialen Spulen erzeugt, die um die Atomwolke angeordnet sind. Die Spulen sind quadratisch, ihre Kantenlänge beträgt 4 cm, ihr Abstand ca. 7 cm. Spulenachse und Richtung des Offset-Feldes der Magnetfalle stehen senkrecht aufeinander. Als Quelle wird ein Frequenzgenerator (HP 8116) eingesetzt, der analog (Frequenz) und digital (Amplitude, Frequenzauflösung) über seinen GPIB-Bus gesteuert wird. Da die Frequenz während der Verdampfungskühlung zwischen 50 MHz und 1 MHz variiert, wurde keine Impedanzanpassung vorgenommen. Bei der Implementierung der Verdampfungskühlung in das Münchner Experiment wurde eine andere Strategie verfolgt, die in [139] beschrieben ist.

5.6.4 Optimierung der Verdampfungskühlung

Die Optimierung der Frequenzrampe geschieht mit dem Ziel, den Phasenübergang mit der höchstmöglichen Teilchenzahl zu erreichen. Für $\mathcal{R} \gg 1$ folgt aus Gleichung (5.37) und $V_e \propto T^\xi$, daß die Phasenraumdicke der Proportionalität $\rho = n_p \lambda_T^3 \propto N^{1-\alpha(\xi-3/2)}$ gehorcht. Damit muß α bzw. die Größe $\chi = -d(\ln \rho) / d(\ln N)$ maximiert werden. Vorgegeben sind dabei die Potentialform, die Anfangswerte von Temperatur und Teilchenzahl sowie alle Ratenkonstanten, die mit Heiz- und Verlustprozessen verbunden sind.

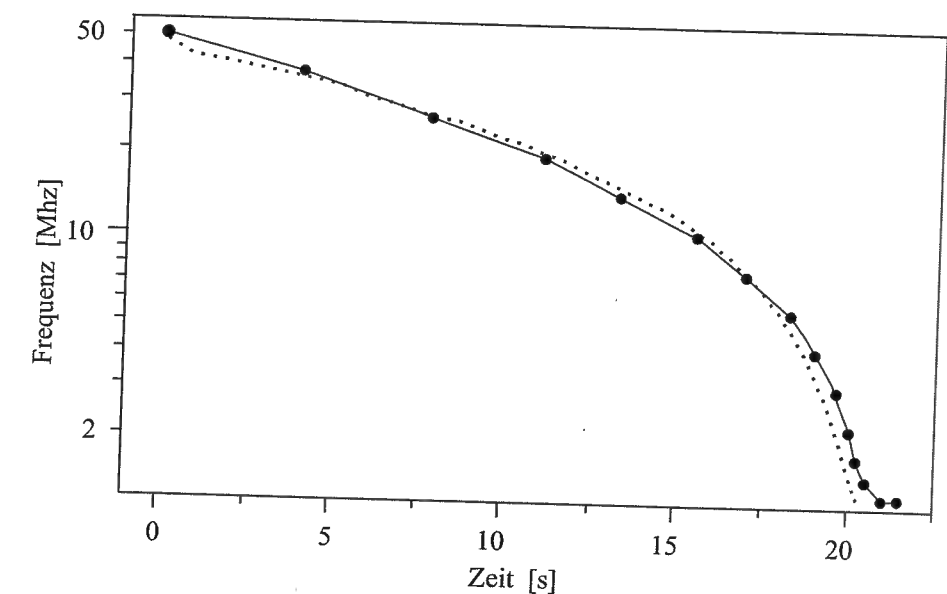


Abbildung 5.13: Experimentell optimierte Frequenzrampe im Vergleich mit dem Ergebnis der Simulation.

Mit 50 MHz wird der Anfangswert der Radiofrequenz so hoch wie (apparativ) möglich gewählt und entspricht bei der Anfangstemperatur von $470 \mu\text{K}$ einem Abschneideparameter von $\eta \simeq 10$. Dies geschieht in der Absicht, die Anzahl der Teilchen zu minimieren, die sich in dem Potential oberhalb der Energie E_{cut} befinden. Diese Teilchen bleiben nämlich bei einer adiabatischen Verdampfung außerhalb des Resonanzradius der Radiofrequenz gespeichert und werden nicht mitgekühlt. Insbesondere gegen Ende der Verdampfungskühlung bewirken sie, wie weiter oben erläutert wurde, zusätzliche Verluste und eine Heizrate. Die Optimierung der Frequenzrampe erfolgt nun ausgehend von dem Anfangswert in i Schritten, in denen die Radiofrequenz zeitlich linear oder exponentiell um $\delta\omega_{rf}/2^{(i-1)}$ abgesenkt wird. Es wird also ein insgesamt exponentieller Verlauf der Radiofrequenz antizipiert, dessen Optimierung mit konstanter Genauigkeit eine Anpassung der Schrittweite erfordert. Die Optimierung jedes einzelnen Schrittes erfolgt durch die Variation seiner Dauer, wobei als Optimierungsgröße die Zunahme der Phasenraumdicke pro Teilchenverlust dient¹⁶:

$$\chi_i = - \left[\frac{d(\ln \rho)}{d(\ln N)} \right]_i \approx \frac{\ln(\rho_i / \rho_{i-1})}{\ln(N_{i-1} / N_i)} \quad \text{mit} \quad \rho = n_p \lambda_T^3. \quad (5.50)$$

Zur Bestimmung von Temperatur und Teilchenzahl (und damit von ρ) werden Absorptionbilder der Wolke ausgewertet (siehe Kapitel 6).

Diese Strategie wurde in der Arbeitsgruppe im Rahmen einer Simulation getestet [32, 155]. Die Übereinstimmung von Theorie und Experiment ist überzeugend, wie in Abbildung 5.13 zu erkennen ist. Die Verdampfungskühlung dauert insgesamt etwa 22 Sekunden und wird offensichtlich im Runaway-Regime durchgeführt. Im Experiment wird die Frequenzrampe

¹⁶ Zur Äquivalenz der schrittweisen und der globalen Optimierung von α siehe z.B. Referenz [154].

	T [μK]	N	n_p [cm^{-3}]	γ_{el} [s^{-1}]	ρ
Anfang	470	$1,5 \times 10^9$	4×10^{11}	40	$2,6 \times 10^{-7}$
Ende	1	1×10^7	$3,5 \times 10^{14}$	2000	~ 2

Tabelle 5.3: Werte der relevanten Größen zu Beginn und gegen Ende der Verdampfungskühlung. Die Phasenraumdichte nimmt um sieben Größenordnungen zu.

zum Schluß verlangsamt und endet mit einer 130 ms dauernden Phase konstanter Rf. Durch diese Maßnahme wird die Thermalisierung des atomaren Ensembles gewährleistet bzw. der endlichen Entstehungszeit des Kondensats Rechnung getragen [156]. Anfangs- und Endwerte der relevanten Systemgrößen sind in Tabelle 5.3 zusammengefaßt. Die Übergangstemperatur wird durch die Wahl der radialen Oszillationsfrequenz festgelegt und liegt im Experiment knapp unterhalb von $1 \mu\text{K}$.

Kapitel 6

Detektion und Bestimmung der Systemgrößen

Zur Charakterisierung des Systems wie auch im Rahmen der meisten Experimente müssen die Ortsverteilung der Atomwolke, ihre Teilchenzahl und ihre Temperatur mit möglichst hoher Genauigkeit gemessen werden. Im folgenden werden die Methoden beschrieben, die in diesem Zusammenhang zum Einsatz kommen.

6.1 Fluoreszenzmessungen

Die einfachste, jedoch auch am wenigsten genaue Methode, die Dichteverteilung und mit ihr die Teilchenzahl zu bestimmen, besteht in der Auswertung von Fluoreszenzbildern. Dabei wird die Fluoreszenz der Atomwolke im Kreuzungspunkt von drei orthogonalen Paaren gegenläufiger Laserstrahlen mit Hilfe einer CCD-Kamera orts aufgelöst aufgezeichnet. Diese Strahlkonfiguration gibt es bereits an den beiden Speicherorten, da sie für den Betrieb der MOT's erforderlich ist. Aus diesem Grund wird auch in der Regel der sog. MOT-Übergang $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 3\rangle$ der D_2 -Linie verwendet. Ein auf diese Weise gewonnenes Bild der Wolke unmittelbar nach Abschalten der Dampfkammer ist in Abbildung 6.1 zusammen mit einem horizontalen und einem vertikalen Schnitt durch das Intensitätsmaximum dargestellt.

Nimmt man an, daß alle Übergänge des Zwölf-Niveau-Systems mit gleicher Intensität getrieben werden und vernachlässigt man Kohärenzen, ist die Fluoreszenzrate

$$n_f(I, \delta) = \Gamma \frac{7s}{15 + 12s} \quad \text{mit} \quad s = \frac{I/I_S}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (6.1)$$

des Atoms von den Verhältnissen der Gesamtintensität I zur Sättigungsintensität I_S und der Verstimmung δ zur Linienbreite Γ abhängig [107]. Würden alle Atome in gleichem Maße zur Fluoreszenz beitragen, entspräche die Intensitätsverteilung auf dem Bild bis auf einen Proportionalitätsfaktor der entlang der Beobachtungsrichtung integrierten Dichte-

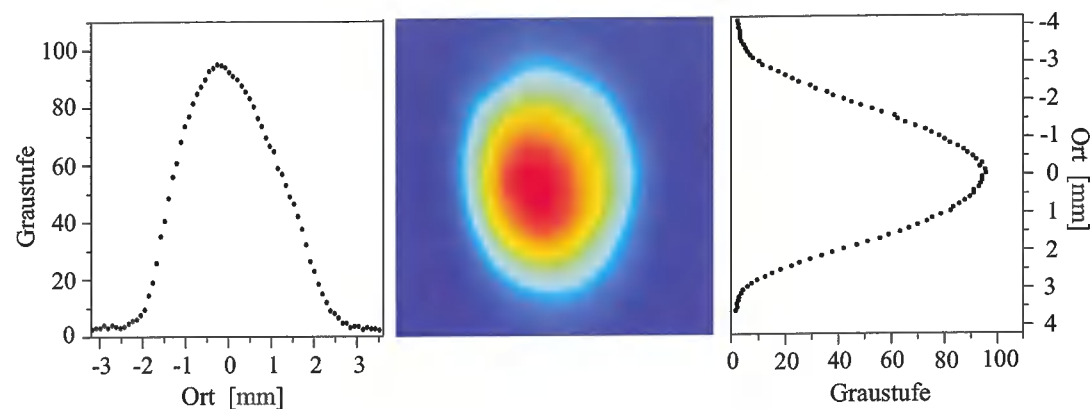


Abbildung 6.1: Fluoreszenzbild der magnetooptisch gespeicherten Atomwolke. Die Intensität ist in Falschfarben kodiert.

verteilung. Der Faktor setzt sich aus der Lichtempfindlichkeit und der Belichtungszeit der Kamera, dem Beobachtungsraumwinkel und n_f zusammen. Die Teilchenzahl ergäbe sich schließlich aus der gesamten Lichtleistung, die auf dem CCD-Chip deponiert wird.

Leider sind die Voraussetzungen für eine solche Auswertung nicht leicht zu erfüllen. Dies liegt zunächst daran, daß die Verteilung der Atome auf die verschiedenen Zeeman-Zustände während der Belichtung nicht bekannt ist. Wie Anhang E zu entnehmen ist, unterscheiden sich die Quadrate der Clebsch-Gordan-Koeffizienten (CGK) für die möglichen Übergänge zwischen zwei Hyperfeinniveaus erheblich. Gleiches gilt daher auch für die Sättigungsintensitäten (siehe Abbildung E.2 in Anhang E). Aus diesem Grund tragen die Populationen der einzelnen Zeeman-Zustände unterschiedlich stark zum Signal bei. Zusätzlich variiert insbesondere bei höheren Teilchenzahlen der Beitrag der Atome auch räumlich. Hierbei handelt es sich um einen Effekt der optischen Dichte

$$D(x, y) = \sigma_{\text{abs}} \int_{-\infty}^{\infty} n(\vec{r}) dz \quad (6.2)$$

der Atomwolke, wo σ_{abs} den Absorptionsquerschnitt für Licht darstellt. Atome, die sich im Zentrum der Verteilung befinden, werden geringerer Intensität ausgesetzt, da ein Teil des Lichts beim Durchgang durch die Wolke absorbiert wird (s.u.). Aus dem gleichen Grund können Fluoreszenzphotonen das Zentrum der Wolke nur schwer verlassen.

Beide Effekte lassen sich nur umgehen, wenn die Detektionsparameter so gewählt werden können, daß auch Atome im Zentrum der Wolke in guter Näherung mit der maximalen Rate $\gamma_{\text{max}} = (7/12) \Gamma$ fluoreszieren. Dazu muß mit einem Vielfachen der Sättigungsintensität nachgewiesen werden. Zumindest für die MOT lassen sich solche Detektionsbedingungen mit dem Münchner Lasersystem noch gewährleisten (siehe Kapitel 7.2). In Konstanz stand hingegen für den Betrieb *beider* MOT's lediglich eine Leistung von etwa 35 mW zur Verfügung, zu wenig, um eine ausreichende Sättigung zu erreichen. Daher ließen sich die Dichteverteilung und die Teilchenzahl auf diese Weise nur mit geringer Genauigkeit bestimmen. Nahe des Phasenübergangs ist die optische Dichte der Atomwolke um ein Viel-

faches höher als nach der magnetooptischen Speicherung, und die erforderliche Sättigung kann generell nicht mehr erreicht werden.

Es gibt einen weiteren Aspekt der Fluoreszenzdetektion, dem Beachtung geschenkt werden muß: Die geringe Lichtempfindlichkeit der Kamera und der kleine Beobachtungsraumwinkel erfordern eine Belichtungszeit τ_B in der Größenordnung von einigen $100 \mu\text{s}$. In dieser Zeit emittieren die Atome etwa $N \approx 5.000$ Fluoreszenzphotonen. Die Impulsüberträge bei Absorption und Emission führen dazu, daß die Wolke während der Belichtungszeit leicht auseinander getrieben wird. Infolge der Diffusion erwartet man für die Standardabweichung der Geschwindigkeitsverteilung

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{2N}{3}} \frac{\hbar k}{m} \approx 30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \quad (6.3)$$

vorausgesetzt, daß die Intensität der sechs Strahlen gleich ist. Während der Belichtungszeit kommt es daher schlimmstenfalls zu einer Verbreiterung der Ortsverteilung in der Größenordnung von $\tau_B \sigma_v / 2 < 50 \mu\text{m}$. Bei einer typischen Standardabweichung der Ortsverteilung von $1,5 \text{ mm}$ kann der Effekt im Falle der MOT vernachlässigt werden. Gleiches gilt für Bilder der Wolke unmittelbar nach dem Transfer in die magnetische Falle wie zu Beginn der Verdampfungskühlung. Kurz vor der Kondensation beträgt die Breite der Dichteverteilung jedoch $100 \mu\text{m}$ und weniger. Fluoreszenzbilder sind also auch aus diesem Grund gegen Ende des experimentellen Zyklus für quantitative Untersuchungen ungeeignet.

Die Methode eignet sich jedoch auch unter der Voraussetzung geringer Sättigung für eine Temperaturmessung. Hier ist man nicht auf die genaue Kenntnis der Teilchenzahl angewiesen, es genügt, die Dichteverteilung bis auf einen (Amplituden-)Skalierungsfaktor zu bestimmen. Geht man davon aus, daß die Besetzung der Zeeman-Zustände in guter Näherung ortsunabhängig ist, muß allein die optische Dichte der Wolke gering sein, um aus dem Fluoreszenzbild die Form der Dichteverteilung in guter Näherung zu gewinnen. Dies wird durch die Wahl einer hohen Verstärkung δ erreicht. In der Regel wird $\delta/\Gamma = 2 \dots 3$ gewählt. Dadurch wird gleichzeitig der Effekt einer optischen Melasse erzielt (siehe Kapitel 5.4 und 8), in der die Ortsverteilung der Atomwolke während der Belichtungszeit nahezu eingefroren ist.

Für eine Temperaturmessung wird die Breite der Intensitätsverteilung nach einer variablen Zeit t , in der die Wolke im Schwerfeld frei expandiert, bestimmt. Dazu werden Bildschnitte, wie die in Abbildung 6.1 dargestellten, ausgewertet. Geht man davon aus, daß Ort und Geschwindigkeit der Atome vor der Expansion unkorreliert sind und keine Kräfte zwischen den Atomen wirken, so wird sich die Ortsbreite gemäß

$$\Delta r_i(t) = \sqrt{\Delta_{r_i,0}^2 + t^2 \Delta_{v_i}^2} \quad (6.4)$$

aus den Anfangsbreiten $\Delta_{r_i,0}$ und Δ_{v_i} von Ort und Geschwindigkeit entwickeln. Dies gilt sowohl für ein Boltzmann- als auch für ein Bose-verteiltes Gas in einem harmonischen Potential, wie Anhang A zu entnehmen ist. In ersterem der beiden Fälle ändern sich weder Form noch Breite der Verteilung durch die Integration entlang der Beobachtungsrichtung,

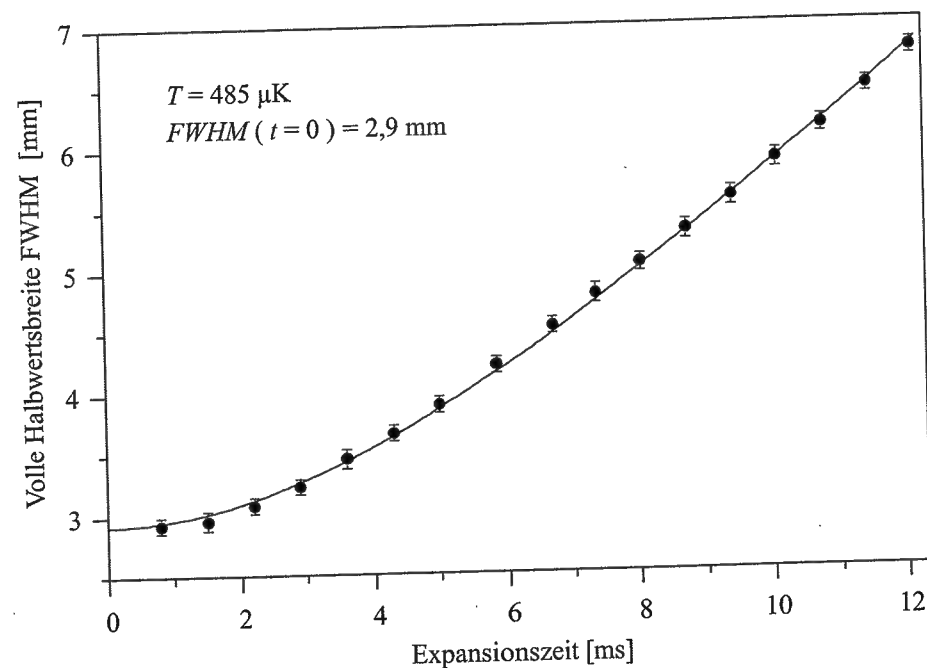


Abbildung 6.2: Temperaturbestimmung aus der Dynamik der Halbwertsbreite (engl. FWHM) einer zuvor magneto-optisch gespeicherten Wolke. Die für eine MOT überdurchschnittlich hohe Temperatur ist die Folge der extrem hohen Teilchenzahl (siehe Kapitel 8).

und es bietet es sich daher an, die Standardabweichung σ_{r_i} oder die volle Halbwertsbreite $\sqrt{8 \ln 2} \sigma_{r_i}$ der Ortsverteilung zu messen. Durch Anpassen der Funktion (6.4) an die Daten, werden die Größen

$$\sigma_{r_i,0}^2 = \frac{k_B T}{m \omega_i^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{v_i}^2 = \frac{k_B T}{m} \quad (6.5)$$

bestimmt und mit ihnen die Temperatur. Bei langen Expansionszeiten kann die Anfangsbreite der Ortsverteilung in Gleichung (6.4) vernachlässigt werden, und die Ausdehnung der Atomwolke nimmt linear mit der Expansionszeit zu. Daher läßt sich die Temperatur auf diese Weise auch dann messen, wenn die anfängliche Ortsverteilung unbekannt ist. Dies trifft auf die MOT bei hohen Teilchenzahlen zu, wo sich durch die Dichteabhängigkeit der Reabsorption und die optische Dichte der Wolke Abweichungen von der gaußförmigen Ortsverteilung ergeben (siehe Kapitel 8). Eine vergleichbare Situation liegt in der komprimierten Magnetfalle bei hohen Temperaturen vor. Hier ist das Potential in zwei Raumrichtungen in guter Näherung linear. Abbildung 6.2 zeigt die Temperaturmessung einer Atomwolke in der Münchner Dampfzellenfalle.

Knapp oberhalb von T_c muß die Bose-Verteilung berücksichtigt werden. Hier sind Form und Breite der Dichteverteilung auch nach langen Expansionszeiten nicht allein durch die Temperatur, sondern auch durch die Teilchenzahl bestimmt (siehe Anhang A). Daher kann hier die Temperatur aus einer Expansionsmessung nur bestimmt werden, wenn die Teilchenzahl bekannt ist.

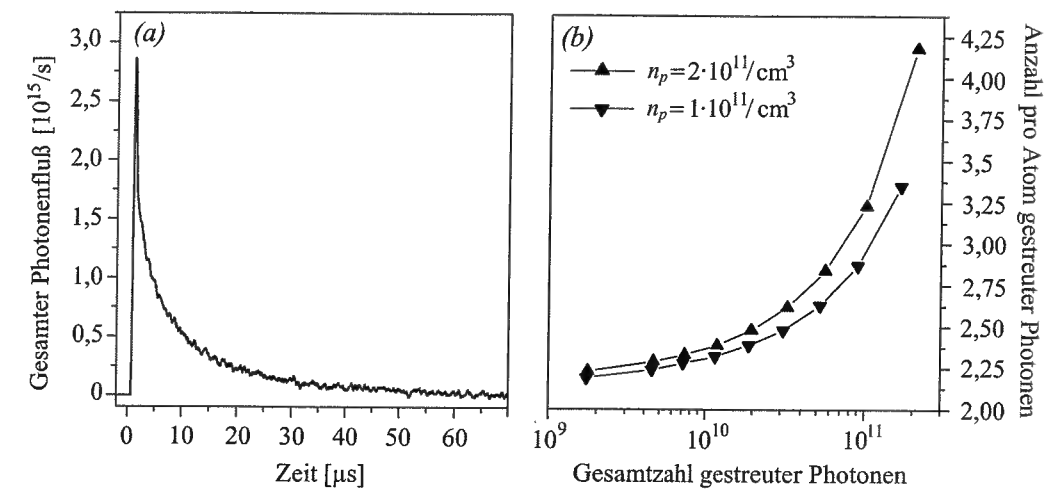


Abbildung 6.3: (a): Aus dem Detektorsignal abgeleiteter Fluß spontan emittierter Photonen beim optischen Umpumpen von ca. 10^{10} Atomen. (b): Theoretischer Beitrag eines Atoms zum Signal in Abhängigkeit der Gesamtzahl spontan emittierter Photonen. Die Parameter der Simulation sind an die Bedingungen in der Dampfzellen-MOT angepaßt.

6.2 Teilchenzahlmessung durch optisches Pumpen

Insbesondere bei geringen Dichten kann die Fluoreszenz der Wolke während eines optischen Pumpprozesses in einen atomaren Zustand, der nicht an das Lichtfeld koppelt, als Maß für die Teilchenzahl dienen [157]. Anders als bei der Fluoreszenz auf einem geschlossenen Übergang emittieren die Atome in diesem Fall nur wenige Photonen. Das Signal ist daher zu schwach, um mit Hilfe einer Standard-CCD-Kamera detektiert zu werden, und kann somit auch nicht zur Bestimmung der Ortsverteilung herangezogen werden. Dafür ist es weit weniger von der optischen Dichte der Wolke abhängig, die eine quantitative Auswertung von Fluoreszenzbildern, wie gerade gesehen, vereitelt. Dies liegt daran, daß die Atome im Verlaufe der Messung nacheinander „dunkelgeschaltet“ werden. Die Atomwolke wird daher mit fortschreitender Belichtungszeit zunehmend transparent, und ihre optische Dichte äußert sich in erster Linie dadurch, daß Atome, die sich im Zentrum der Verteilung befinden, zu einem späteren Zeitpunkt umpumpen werden.

Im Experiment beginnt die Messung mit dem Abschalten des Speicherpotentials. Soll die Teilchenzahl in der MOT gemessen werden, wird das Rückpumplicht mit einer Verzögerung von etwa $100 \mu\text{s}$ abgeschaltet. Dadurch wird sichergestellt, daß sich vor dem eigentlichen Pumpprozeß alle Atome im Grundzustand $|F_g = 2\rangle$ befinden. Unmittelbar danach werden die Atome durch einen Laserpuls auf dem Übergang $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 2\rangle$ der D_2 -Linie angeregt. Überführt sie die spontane Emission in den Zustand $|F_g = 1\rangle$, können sie aufgrund der großen Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands nicht mehr angeregt werden. Unter einem vorgegebenen Raumwinkel wird die Fluoreszenz mit Hilfe eines geeichten Photomultipliers detektiert. Das Signal läßt sich daher nach Abzug des Streulichtuntergrundes in den Photonenfluß umrechnen und hat die in Abbildung 6.3(a) dargestellte Form. Durch Integration ergibt sich daraus die Anzahl der insgesamt spontan gestreuten Photonen.

Anhand der in Anhang E angegebenen Clebsch-Gordan-Koeffizienten ist ersichtlich, daß jeder der angeregten Zeeman-Zustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit in eines der beiden Hyperfeinniveaus zerfällt. Damit erwartet man zunächst, daß jedes Atom im Mittel mit zwei Photonen zum Signal beiträgt, unabhängig davon, aus welchem der Zeeman-Zustände die Anregungen erfolgen.

Dieser Umrechnungsfaktor ist insofern mit Vorsicht anzunehmen, als er von der Polarisierung des Pumplichts abhängt: Mit zirkularer Polarisation kann die Anregung aus einem der äußersten Zeeman-Zustände, $|F_g = 2, m_F = 2\rangle$ oder $|F_g = 2, m_F = -2\rangle$, nicht erfolgen. Im Falle von π -Licht ist wiederum der Zeeman-Zustand $|F_g = 2, m_F = -2\rangle$ dunkel. Während der Messung würden sogar weitere Atome in die betroffenen Zustände überführt werden. Beide Effekte resultieren in einer Unterschätzung der Teilchenzahl, lassen sich jedoch vermeiden, wenn für die Messung keine reine Polarisation gewählt wird. Im Experiment erweist sich das Signal als polarisationsunabhängig, ein Umstand, der wahrscheinlich auf die unvollständige Magnetfeldkompensation zurückzuführen ist. Daher kann davon ausgegangen werden, daß alle Atome gezählt werden.

Auswirkungen der optischen Dichte lassen sich jedoch auch bei dieser Methode nicht vollständig unterdrücken. Atome im Zentrum der Verteilung werden zu einem Zeitpunkt umgepumpt, zu dem bereits große Bereiche der Wolke für das Pumplicht transparent sind. Für die jeweils letzten bei dem Pumpprozeß emittierten Photonen, die das Atom in den dunklen Zustand überführen, ist die Wolke hingegen optisch dicht. Sie können von den bereits umgepumpten Atomen reabsorbiert werden, die in einem solchen Fall mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % erneut umgepumpt werden müssen. Dies resultiert in einer Überschätzung der Teilchenzahl. Das Gegenteil bewirkt die Reabsorption von Pumpphotonen, die insbesondere zu Beginn der Messung möglich ist. Ist ein solches Photon an zwei Umpumpprozessen beteiligt, werden im Mittel nicht vier sondern nur drei Photonen spontan emittiert.

Um die Relevanz dieser Effekte im Hinblick auf die Auswertung zu untersuchen, wird die mittlere Anzahl der pro Atom emittierten Photonen mit Hilfe einer Simulation abgeschätzt. Ausgehend von einer statischen Ortsverteilung wird die Dynamik der Partialdichten aller Zeeman-Zustände mit Hilfe der Einsteinschen Ratengleichungen beschrieben. Über das Beersche Gesetz ergibt sich daraus auch die Dynamik der Intensitätsverteilung. Es wird angenommen, daß die Wolke, anders als im Experiment, isotrop beleuchtet wird. Da dies die ungünstigste Situation darstellt, erhält man auf diese Weise eine obere Abschätzung für den Effekt der Reabsorption bei einer vorgegebenen Dichteverteilung. In Abbildung 6.3(b) ist die mittlere Anzahl pro Atom gestreuter Photonen über die Gesamtzahl der Streuprozesse aufgetragen. Die beiden Datensätze entsprechen gaußförmigen Dichteverteilungen bei festen Werten der zentralen Dichte, die für die Dampfzellenfalle typisch sind. Die Aussagekraft der Simulation läßt sich schwer quantifizieren, sie liefert jedoch zumindest einen Eindruck von der Größenordnung des Effektes. Im Experiment erreicht die Anzahl gestreuter Photonen Werte von bis zu 7×10^{10} und sollte damit etwa $2,5 \times 10^{10}$ Atomen entsprechen. Unter diesen Bedingungen erreicht die resonante optische Dichte der Wolke einen Wert von ca. $\mathcal{D}^{(0)}(0,0) \approx 100$. Um die Auswirkung der Reabsorption zu reduzieren, kann die Messung nach der Expansion der Atomwolke durchgeführt werden.

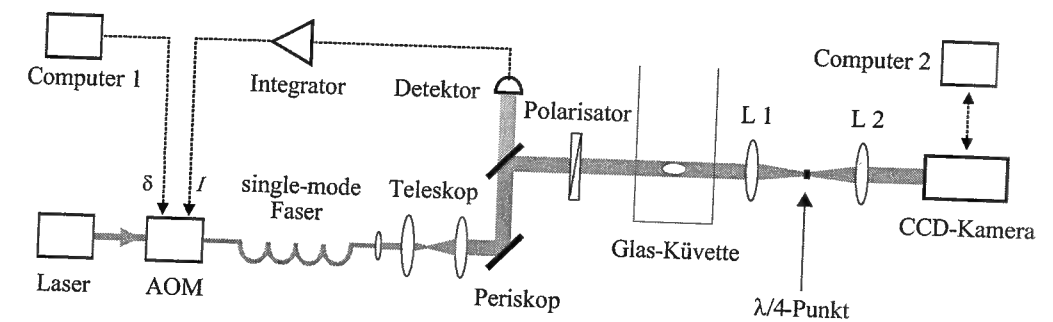


Abbildung 6.4: Experimenteller Aufbau zur Aufnahme von Absorptions- und Phasenkontrastbildern der Atomwolke.

Daher eignet sich die Methode auch für die Untersuchung von Kondensaten, deren resonante optische Dichte $\mathcal{D}^{(0)}(0,0)$ nach einer Expansionszeit von 20 ms auf etwa den o.a. Wert abnimmt.

6.3 Absorptionsmessungen

Die Ortsverteilung der Wolke läßt sich am genauesten aus Absorptionsmessungen gewinnen. In der Umgebung des Phasenübergangs wird daher fast ausschließlich dieses Verfahren eingesetzt. Dabei wird die optische Dichte $\mathcal{D}(x,y)$ der Wolke mit der in Abbildung 6.4 dargestellten Anordnung orts aufgelöst gemessen. Dazu wird ein Laserpuls, dessen Frequenz nahezu mit der atomaren Resonanz $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 3\rangle$ zusammenfällt, auf die Atomwolke gerichtet. Während der Propagation durch das Ensemble wird seine Intensität aufgrund der atomaren Absorption abgeschwächt. Der Strahlquerschnitt wird sehr viel größer als die Wolke gewählt, die somit einen Schatten im Strahl hinterläßt. Dieser Schatten wird mit Hilfe einer hochauflösenden Optik (dreifache Vergrößerung, optische Auflösung $7 \mu\text{m}$) auf eine CCD-Kamera abgebildet. Seine Helligkeit ist mit der sog. Säulendichte $\tilde{n}(x,y)$ der Atomwolke korreliert. Darunter versteht man die entlang der Propagationsrichtung z des Strahls integrierte, zweidimensionale Dichteverteilung.

Das Verfahren ist prinzipiell destruktiv, weil es auf einer Vielzahl von atomaren Absorptions-Emissions-Prozessen beruht. Bereits die Streuung eines Photons überträgt zumeist mehr Energie auf ein Atom, als es zum Verlassen des Kondensats benötigt. Destruktiv ist die Messung auch aus praktischen Gründen: Die Auswertung der Bilder wäre äußerst schwierig, wenn die Aufnahme in der magnetischen Falle erfolgen würde. Aufgrund des inhomogenen Magnetfeldes wären die Polarisation und die Verstimmung des Nachweislasers ortsabhängig, ein Effekt, der bei der Auswertung berücksichtigt werden müßte. Daher wird die Magnetfalle vor dem Nachweis abgeschaltet. Bei der Auswertung muß dann allerdings die (bekannte) Expansionsdynamik (A.9) bzw. (4.20) berücksichtigt werden.

Die Säulendichte der Atomwolke ergibt sich vom Beerschen Gesetz

$$dI(\vec{r}) = -I(\vec{r}) \sigma_{\text{abs}}(\delta, I) n(\vec{r}) dz \quad \text{mit} \quad \sigma_{\text{abs}}(\delta, I) = \frac{f \sigma_{\text{abs}}^{(0)}}{1 + f I(\vec{r})/I_S + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (6.6)$$

ausgehend. Dabei ist $\sigma_{\text{abs}}^{(0)} = \frac{3\lambda^2}{2\pi}$ der resonante Absorptionsquerschnitt eines Zwei-Niveau-Atoms für polarisiertes Licht. Geht man von unpolarisierten Atomen (jedoch polarisiertem Licht) aus, so ergibt sich der Vorfaktor im Absorptionsquerschnitt σ_{abs} durch die Mittelung der CGK-Quadrate der adressierten Übergänge zu $f = 0,467$ (siehe Anhang E). Für polarisierte Atome ist $f = 1$ anzusetzen. In der Realität können sich jedoch in beiden Fällen Abweichungen ergeben, die auf die endliche Linienbreite des Nachweislichts zurückzuführen sind. Durch z -Integration über die gesamte Wolkenausdehnung erhält man schließlich

$$\tilde{n}(x, y) = \frac{1 + 4\delta^2/\Gamma^2}{f \sigma_{\text{abs}}^{(0)}} \ln \left[\frac{I_0(x, y)}{I_t(x, y)} \right] + \frac{I_0(x, y) - I_t(x, y)}{\sigma_{\text{abs}}^{(0)} I_S}, \quad (6.7)$$

wobei $I_0(x, y)$ und $I_t(x, y)$ die Intensitätsverteilungen des Strahls jeweils vor und nach der Propagation durch die Wolke bezeichnen. Es wird angenommen, daß die spontane Emission in den Detektionsraumwinkel vernachlässigt werden kann und somit alle spontan gestreuten Photonen im Signal fehlen. Außerdem wird die Reabsorption spontan gestreuter Photonen vernachlässigt. Im Experiment muß zur Bestimmung von $I_0(x, y)$ unmittelbar nach dem ersten ein zweites Bild in Abwesenheit der Atomwolke aufgenommen werden. Mit einer Intensitätsstabilisierung wird dafür gesorgt, daß für die beiden Bilder nahezu identische Lichtverhältnisse herrschen. Die Pulsdauer wird so kurz gewählt, daß man in guter Näherung eine Momentaufnahme der frei fallenden Wolke erhält. Da die Belichtungszeit der CCD-Kamera aus technischen Gründen sehr viel länger als die Pulsdauer ist, gibt es auf beiden Bildern einen Streulichtuntergrund. Dieser sowie der zusätzliche Untergrund, der durch das thermische und das Ausleserauschen des Kamerasystems zustandekommt, würden die Messung verfälschen. Deswegen wird mit gleicher Belichtungszeit ein drittes, sog. Rauschbild ohne den Laserpuls aufgenommen. Die Intensitätsverteilung dieses Bildes wird von $I_0(x, y)$ und $I_t(x, y)$ vor dem Einsetzen in Gleichung (6.7) abgezogen. Da die Bilder zu unterschiedlichen Zeitpunkten aufgenommen werden, gelingt es trotz der Pulsstabilisierung nicht, für die ersten beiden Aufnahmen identische Intensitätsverhältnisse zu sichern. Es empfiehlt sich daher, die Graustufenverteilung dieser Bilder (nach Abzug des Rauschuntergrundes) durch einen Vergleich weit von der Wolke entfernter Bildbereiche auf den gleichen Mittelwert zu skalieren.

Durch Integration der expandierten Dichteverteilungen oberhalb bzw. unterhalb des Phasenübergangs (siehe Anhang A und Kapitel 4.4) erhält man jeweils den theoretischen Verlauf der Säulendichte, der zur Bestimmung von Temperatur und Teilchenzahl an die Daten angepaßt wird und die Rückrechnung auf die dreidimensionale Dichteverteilung erlaubt:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_T(x, y, t) &= \frac{N_T m \omega_x \omega_y}{2\pi k_B T \lambda_x(t) \lambda_y(t)} \exp \left\{ -\frac{m\omega_x^2}{2k_B T} \frac{x^2}{\lambda_x^2(t)} - \frac{m\omega_y^2}{2k_B T} \frac{y^2}{\lambda_y^2(t)} \right\}, \quad T \gg T_c, \\ \tilde{n}_T(x, y, t) &= \frac{m k_B^2 T^2}{2\pi \hbar^3 \omega_z \lambda_x(t) \lambda_y(t)} g_2 \left(\tilde{z} \exp \left\{ -\frac{m\omega_x^2}{2k_B T} \frac{x^2}{\lambda_x^2(t)} - \frac{m\omega_y^2}{2k_B T} \frac{y^2}{\lambda_y^2(t)} \right\} \right), \quad T \simeq T_c, \\ \tilde{n}_0(x, y, t) &= \frac{2^{1/2} m^{1/2} \mu^{3/2}}{3\pi \hbar^2 a \omega_z \lambda_x(t) \lambda_y(t)} \left(1 - \frac{m\omega_x^2}{2\mu} \frac{x^2}{\lambda_x^2(t)} - \frac{m\omega_y^2}{2\mu} \frac{y^2}{\lambda_y^2(t)} \right)^{3/2}, \quad T < T_c. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Dabei gilt für die beiden thermischen Dichteverteilungen $\lambda_{r_i}(t) = \sqrt{1 + \omega_{r_i}^2 t^2}$. Im Falle des Kondensats sind für λ_{r_i} die Lösungen des Differentialgleichungssystems (4.21) einzusetzen. In der Regel werden x - und y -Schnitte durch die Säulendichte ausgewertet. Um das Signal-zu-Rausch-Verhältnis zu verbessern, kann es jedoch unter Umständen von Vorteil sein, die normierte Intensitätsverteilung (6.7) vor der Auswertung entlang einer der beiden Koordinatenachsen abzuintegrieren. Auf diese Weise erhält man eine eindimensionale Verteilung, die je nach Situation durch die Funktionen

$$\begin{aligned} \hat{n}_T(x, t) &= \frac{N_T m^{1/2} \omega_x}{(2\pi k_B T)^{1/2} \lambda_x(t)} \exp \left\{ -\frac{m\omega_x^2}{2k_B T} \frac{x^2}{\lambda_x^2(t)} \right\}, \quad T \gg T_c \\ \hat{n}_T(x, t) &= \frac{m^{1/2} (k_B T)^{5/2}}{(2\pi)^{1/2} \hbar^3 \omega_y \omega_z \lambda_x(t)} g_{5/2} \left(\tilde{z} \exp \left\{ -\frac{m\omega_x^2}{2k_B T} \frac{x^2}{\lambda_x^2(t)} \right\} \right), \quad T \simeq T_c \\ \hat{n}_0(x, t) &= \frac{\mu^2}{4 \hbar^2 a \omega_y \omega_z \lambda_x(t)} \left(1 - \frac{m\omega_x^2}{2\mu} \frac{x^2}{\lambda_x^2(t)} \right)^2, \quad T < T_c \end{aligned} \quad (6.9)$$

beschrieben wird (sie ergeben sich durch Integration von (6.8) entlang y). Da es sich bei $g_2(\alpha)$ und $g_{5/2}(\alpha)$ nicht um analytische Funktionen handelt, werden bei der Anpassung von $\tilde{n}_T(x, y, t)$ und $\hat{n}_T(x, t)$ an die Daten die in Anhang B angegebenen polynomialen Näherungen verwendet.

Schließlich muß beachtet werden, daß die Säulendichte teilweise kondensierter Atomwolken nur näherungsweise durch die Summe $\tilde{n}_T(x, y, t) + \tilde{n}_0(x, y, t)$ gegeben ist. Dies liegt zunächst an der in Kapitel 4.2 diskutierten Wechselwirkung zwischen dem Kondensat und der nichtkondensierten Atomwolke, die in einer Phasentrennung resultiert. Dadurch weicht insbesondere die thermische Verteilung von $\tilde{n}_T(x, y, t)$ ab. Zu Abweichungen kann es auch durch systematische Fehler beim Nachweis kommen, etwa durch Beugung am Kondensat, wenn dessen Ausdehnung mit dem Auflösungsvermögen des Abbildungssystems vergleichbar ist, oder durch die weiter unten diskutierte Dispersion der Atomwolke beim Nachweis mit verstimmt Licht. Gilt das Interesse der genauen Temperaturbestimmung, empfiehlt es sich daher, bei der Anpassung der Theorie an die gemessene Verteilung nur deren weit vom Wolkenzentrum entfernte Flügel zu berücksichtigen. Hier sind sowohl Abweichungen von der idealen Bose-Verteilung als auch solche, die auf die Meßmethode zurückzuführen sind, gering. Um eine quantitative Auswertung von Absorptionsbildern zu ermöglichen, sind die folgenden Aspekte zu berücksichtigen.

Präparation der Atome

In der Magnetfalle variiert nicht nur die Größe sondern auch die Richtung des Magnetfeldes räumlich. Zudem erfolgt das Abschalten der Magnetfalle auf der Zeitskala von wenigen hundert μs . Dabei verhalten sich die Ströme in den einzelnen, gekoppelten Stromkreisen der Falle unterschiedlich und bewirken so ein sich schnell und auf unkontrollierbare Weise veränderndes Magnetfeld am Ort der Atome. Beides führt dazu, daß die Spins der Atome nach dem Abschalten des Feldes nicht bezüglich einer gemeinsamen Quantisierungsachse ausgerichtet sind. Der Nachweisstrahl ist σ^+ -polarisiert. Atome, die bezüglich der

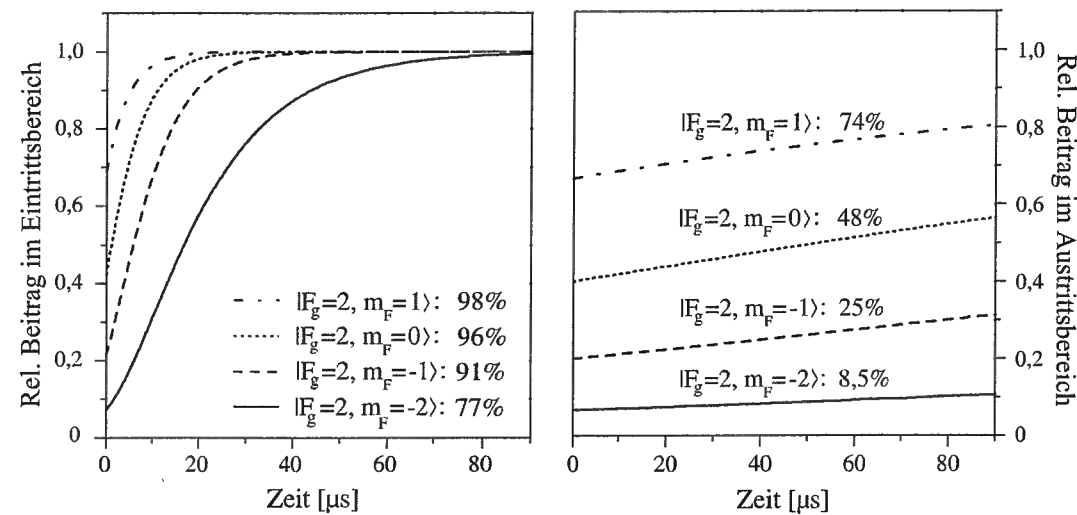


Abbildung 6.5: Beitrag der Atome zum Absorptionssignal als Funktion der Zeit, aufgeschlüsselt nach ihrem anfänglichen Zeeman-Zustand, bei dem Nachweis mit σ^+ -polarisiertem Licht. Durch den optischen Pumpprozess wird der Effekt im Verlaufe der Belichtung zwar geringer, fatal ist jedoch die starke räumliche Abhängigkeit der Pumpzeit.

Strahlachse im Zustand $|F_g = 2, m_F = 2\rangle$ präpariert sind, werden auf einem geschlossenen Übergang mit dem größtmöglichen Clebsch-Gordan-Koeffizienten nachgewiesen¹. An Atome in anderen Zeeman-Zuständen koppelt das Licht zunächst weniger stark. Im Verlaufe der Belichtung werden diese Atome jedoch optisch in Richtung des Zustands $|F_g = 2, m_F = 2\rangle$ gepumpt. Daraus ergeben sich zwei Probleme: Erstens ist der Beitrag der Atome zum Absorptionssignal von ihrem Zeeman-Zustand abhängig. Da die Verteilung der Atome auf die Zustände unbekannt ist (und zudem wahrscheinlich auch räumlich variiert), ist die quantitative Auswertung der Bilder fehlerbehaftet. Zudem ändert sich zweitens der besagte Beitrag über die Belichtungszeit mit einer räumlich variierenden Dynamik. Dies liegt daran, daß die Pumpzeit intensitätsabhängig ist. Aufgrund der starken Absorption der Wolke sind Atome, auf die der Strahl beim Eintritt trifft, einer wesentlich höheren Intensität ausgesetzt als jene, die sich im Austrittsbereich befinden.

Deutlich wird dieser Effekt in Abbildung 6.5. Aufgetragen ist die Summe der Besetzungen aller angeregten Zustände des Übergangs $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 3\rangle$ während der Belichtung mit σ^+ -Polarisation. Zu dieser Besetzung ist die spontane Streurrate der Atome proportional und mit ihr deren Beitrag zum Absorptionssignal. Die Kurven entsprechen Atomen, die in einem der vier „falschen“ Zeeman-Zustände starten und daher während der Belichtung optisch in den Zustand $|F_g = 2, m_F = 2\rangle$ gepumpt werden. Der angegebene Beitrag versteht sich relativ zum Signal eines Atoms, das sich von Anfang an in diesem Zustand befindet. Für die Simulation, die auf den Einsteinschen Ratengleichungen beruht, wurden Nachweisparameter δ , I und eine Belichtungszeit gewählt, die die weiter unten aufgeführten Kriterien für einen quantitativen Nachweis erfüllen. Angegeben ist jeweils auch der effektive Beitrag der einzelnen Atome zum Signal, der sich durch die Integration der Kurven über

¹ Atomwolken, die ursprünglich im Zustand $|F_g = 1, m_F = -1\rangle$ gespeichert sind, müssen vor dem Nachweis optisch in den Zustand $|F_g = 2\rangle$ umgepumpt werden.

die Belichtungszeit ergibt. Dieser Beitrag nimmt über die Ausdehnung der Wolke exponentiell von den links zu den rechts angegebenen Werten ab. Bei der Auswertung der Bilder wird hingegen, wie an Gleichung (6.7) zu erkennen ist, eine ortsunabhängige Absorption vorausgesetzt, was zu falschen Ergebnissen führt. Um diesen Effekt zu vermeiden, muß bereits vor dem Abschalten der Magnetfalle ein homogenes, magnetisches Führungsfeld in Strahlrichtung angelegt und während der Belichtung aufrechterhalten werden. Dann liegen vor dem Nachweis alle Atome im Zustand $|F_g = 2, m_F = 2\rangle$ vor. Damit ist in Gleichung (6.7) $f = 1$ zu wählen.

Wahl der Nachweisparameter

Die 14 bit Dynamik des Kamerasystems (siehe Kapitel 7.4) beschränkt die detektierbare optische Dichte auf $\mathcal{D}(x, y) = 14 \ln 2 = 9,7$. Voraussetzung dafür ist allerdings, daß der CCD-Chip durch den Nachweispuls gesättigt wird und daß sich in $I_t(x, y)$ ein Minimum von lediglich etwa einer Graustufe erzeugen läßt. Theoretisch ist letzteres möglich, weil Kondensate auf Resonanz eine zentrale optische Dichte von $\mathcal{D}^{(0)}(0, 0) = \sigma_{\text{abs}}^{(0)} \tilde{n}(0, 0) \simeq 1000$ und mehr erreichen und daher den Strahl völlig blocken können. Faktisch wird jedoch die auf dem Chip deponierte Leistung an keinem Ort Null. Dies liegt zunächst an dem spektralen Untergrund des Nachweislasers, der durch die Wolke nicht oder nur gering abgeschwächt wird. Zudem entsteht an den optischen Komponenten des Nachweissystems, die sich zwischen der Wolke und dem Chip befinden, Streulicht, etwa durch Unebenheiten, Staub oder geometrische Aperturen. Infolgedessen ist im Experiment die detektierbare optische Dichte durch $\ln(I_0/I_t)$ auf etwa 4,5 beschränkt. Um eine quantitative Auswertung der Absorptionsspektren zu ermöglichen, muß die Transmission der Atomwolke groß im Vergleich zu dieser technisch bedingten, scheinbaren Transmission sein. In der Regel werden die Detektionsparameter so gewählt, daß die optische Dichte der Wolke höchstens den Wert 2,5 erreicht. Bei kurzen Expansionszeiten sind dafür Verstimmungen von bis zu 10 vollen Linienbreiten erforderlich. Damit kann $\tilde{n}(x, y)$ bei einer Sättigung des CCD-Chips theoretisch mit einer Dynamik von etwa 13 bit aufgelöst werden.

Die ungünstigen Spezifikationen des CCD-Chips bei einer Wellenlänge von 780 nm (Quanteneffizienz ca. 15 %, max. Elektronenkapazität 120.000) und die Vergrößerung des Abbildungssystems von 3 führen allerdings dazu, daß bei einer Pulsdauer von $\tau_B = 100 \mu\text{s}$ ca. die 30fache Sättigungsintensität des stärksten Übergangs benötigt wird, um den CCD-Chip zu sättigen. Die Verwendung solch hoher Intensitäten bringt zwei Probleme mit sich: Erstens trägt in Gleichung (6.7) der von I_S abhängende Term signifikant zum Signal bei. Dies betrifft insbesondere lange Expansionszeiten, zu denen $\sigma_{\text{abs}}^{(0)} \tilde{n}(x, y)$ auf die Größenordnung I_0/I_S abgenommen hat. Die Genauigkeit der Auswertung wird hier stark von der Intensitätseichung des Kamerasystems abhängen. Zweitens muß gewährleistet sein, daß die Atomwolke aufgrund der Impulsüberträge der Photonen weder zu stark beschleunigt noch zu stark auseinandergetrieben wird. Die gerichtete Absorption verursacht die Translation eines Atoms im Eintrittsbereich des Laserstrahls um näherungsweise

$$\Delta z = \frac{\hbar k \tau_B^2 \Gamma}{2m} \frac{I/I_S}{1 + I/I_S + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (6.10)$$

Bei der Wahl der Detektionsparameter muß darauf geachtet werden, daß Δz kleiner als die Schärfentiefe des Abbildungssystems bleibt. Diese beträgt etwa $150 \mu\text{m}$. Die (ungerichtete) spontane *Emission* führt während der Belichtungszeit zu einer Verbreiterung der Ortsverteilung um etwa

$$\sigma_z = \frac{\hbar k \tau_B^{3/2}}{2m} \left(\frac{\Gamma}{6} \frac{I/I_S}{1 + I/I_S + 4\delta^2/\Gamma^2} \right)^{1/2}, \quad (6.11)$$

eine Größe, die geringer als die optische Auflösung des Systems von ca. $7 \mu\text{m}$ sein sollte. Beide Bedingungen lassen sich für $I/I_S \simeq 30$ nur mit $\delta/\Gamma \gtrsim 5$ erfüllen. Da nach längeren Expansionszeiten optische Dichten von 2,5 nur mit kleineren Verstimmungen zu erreichen wären, ist hier eine quantitative Absorptionsmessung nur bei einer geringeren Dynamik möglich. An (6.10) und (6.11) ist zu erkennen, daß die Wahl einer kürzeren Pulsdauer bei einem konstanten Wert von $\tau_B I$ (und damit bei gleichbleibender Sättigung des Chips) im Hinblick auf eine geringe „Verschmierung“ günstig ist. Durch die Erhöhung der Intensität vergrößert sich jedoch die Auswirkung einer fehlerbehafteten Intensitätseichung.

Dieses Problem kann durch sog. Binnens der CCD-Pixel behoben werden: Dabei werden die Elektronenkapazitäten von jeweils vier benachbarten Pixeln des CCD-Chips noch vor dem Auslesen zusammengeschlossen, was einer effektiven Vervierfachung der Pixelfläche (auf Kosten der Pixelanzahl) gleichkommt. Die Sättigung des Chips wird jetzt bei einer vierfach geringeren Intensität erreicht, wodurch entsprechend geringere Verstimmungen zulässig sind. Prinzipiell können auch mehr als vier Pixel gebinnt werden, allerdings wäre die Auflösung des Systems in diesem Falle durch die Pixelgröße und nicht mehr durch die Optik begrenzt. Bei langen Expansionszeiten ist dies unter Umständen tolerierbar, weil die Größe der Atomwolke hier bereits signifikant zugenommen hat.

In den meisten Situationen ist es nicht erforderlich, die zur Verfügung stehende Speichertiefe voll auszunutzen. Bei einer Beschränkung auf $I/I_S \simeq 7$ kann eine optische Dichte von 2,5 immer noch mit 11 bit aufgelöst werden. Der Vorteil geringerer Intensitäten besteht in dem reduzierten Beitrag des zweiten Terms in Gleichung (6.7) zur Säulendichte. Dadurch wirkt sich zunächst eine fehlerbehaftete Intensitätseichung schwächer aus. Bei einer kurzen Expansionszeit und sehr dichten Wolken kann der besagte Term sogar vernachlässigt werden.

Auflösungsbegrenzung durch Dispersion

Bei dem Nachweis mit verstimmtem Licht stellt die Atomwolke ein dispersives Medium dar und wirkt aufgrund ihrer inhomogenen Dichteverteilung je nach Vorzeichen der Verstimmung als Zerstreuungs- oder Sammellinse. Ausgehend vom komplexen Brechungsindex eines Atoms [158] läßt sich der maximale Phasenschub ϕ der Atomwolke durch ihre zentrale Säulendichte $\tilde{n}(0,0)$ ausdrücken [159]. Für geringe Intensitäten gilt:

$$\phi = -\mathcal{D}(0,0) \frac{\delta}{\Gamma} = -\sigma_{\text{abs}}(\delta) \tilde{n}(0,0) \frac{\delta}{\Gamma} \propto \frac{2\delta/\Gamma}{1 + (2\delta/\Gamma)^2}. \quad (6.12)$$

Dieser Phasenschub führt zu einem Wegunterschied von maximal $dz = \phi\lambda/(2\pi)$. Für kleine Werte von ϕ läßt sich dann der Brechungswinkel der Wolke mit dem Durchmesser d zu

$$\alpha_r \simeq 2 \frac{\phi\lambda}{\pi d} \quad (6.13)$$

abschätzen. Ist das Abbildungssystem bezüglich d beugungsbegrenzt, wird Licht unter dem Beugungswinkel $\alpha_d = \lambda/d$ gerade noch eingesammelt. Solange $\alpha_r \leq \alpha_d$ gilt, bleibt die Auflösung von der Brechung unbeeinflusst. Für $\phi \geq \pi/2$ wird jedoch ein Teil des Lichts nicht von dem Abbildungssystem eingesammelt und folglich als Absorptionssignal interpretiert. Für $\mathcal{D}(0,0) \simeq 2,5$ reduzieren bereits Verstimmungen von der Größenordnung $\Gamma/2$ die Auflösung des Systems. Daher erscheinen auf Absorptionsbildern kleiner Atomwolken stets Beugungsstrukturen, die eine quantitative Auswertung erschweren.

Insbesondere betrifft dies die (bequeme) Bestimmung der Anzahl kondensierter Atome aus der vollen Breite des Kondensats nach Gleichung (4.11): Die Abhängigkeit der Teilchenzahl von der fünften Potenz dieser Größe erfordert eine hohe Genauigkeit bei ihrer Bestimmung. Die Dynamik des Kamerasystems erlaubt es, die resonante optische Dichte sehr kleiner Kondensate nach langen Expansionszeiten aufzulösen. Große Kondensate sind hingegen zu allen experimentell zugänglichen Expansionszeiten auf Resonanz intransparent. Trotzdem sollte der Nachweis im Hinblick auf die Breitenmessung auch in diesem Fall mit resonantem Licht erfolgen. Zur Auswertung darf dann allerdings lediglich der Bereich $\mathcal{D}(x,y) \leq 2,5$ herangezogen werden. Außerdem muß der Nachweis aufgrund der mit (6.10) und (6.11) verbundenen Kriterien an die Streurate mit geringer Intensität erfolgen.

6.4 Phasenkontrastmikroskopie

Der dispersive Charakter der Atomwolke ermöglicht ihre Beobachtung mit Hilfe eines Phasenkontrastmikroskops [160]. Bei dieser Methode wird ausgenutzt, daß die Absorption des Atoms mit $1/\delta^2$ verschwindet, der Phasenschub jedoch nur mit $1/\delta$, wie den Relationen (6.6) und (6.12) zu entnehmen ist. Dadurch läßt sich die Information über die Dichteverteilung der Atomwolke auf die Phasenverteilung eines weit verstimmten Nachweisstrahls übertragen, wenn die Absorption bereits so gut wie vollständig unterdrückt ist.

Bei der Phasenkontrastmikroskopie wird diese Phasenverteilung durch Interferenz mit einem als Lokaloszillator dienenden Lichtfeld homogener Phase in eine Intensitätsverteilung umgewandelt. Das in Abbildung 6.4 dargestellte optische System wird dazu um ein Glassubstrat erweitert, auf das zuvor ein sog. $\lambda/4$ -Punkt aufgedampft wurde². Hierbei handelt es sich um eine MgF_2 -Schicht mit einem Durchmesser von etwa $100 \mu\text{m}$ und einer Dicke von ca. 520 nm . Beim Durchlaufen dieser Schicht wird Licht mit einer Wellenlänge von 780 nm um $\lambda/4$ verzögert. Der $\lambda/4$ -Punkt wird in den Fokus der ersten Linse gebracht. Dessen Ausdehnung ist geringfügig kleiner als der Durchmesser des Punktes, wodurch

² Dank gebührt an dieser Stelle Herrn H. Ballot vom Lehrstuhl Prof. Dr. Leiderer an der Universität Konstanz.

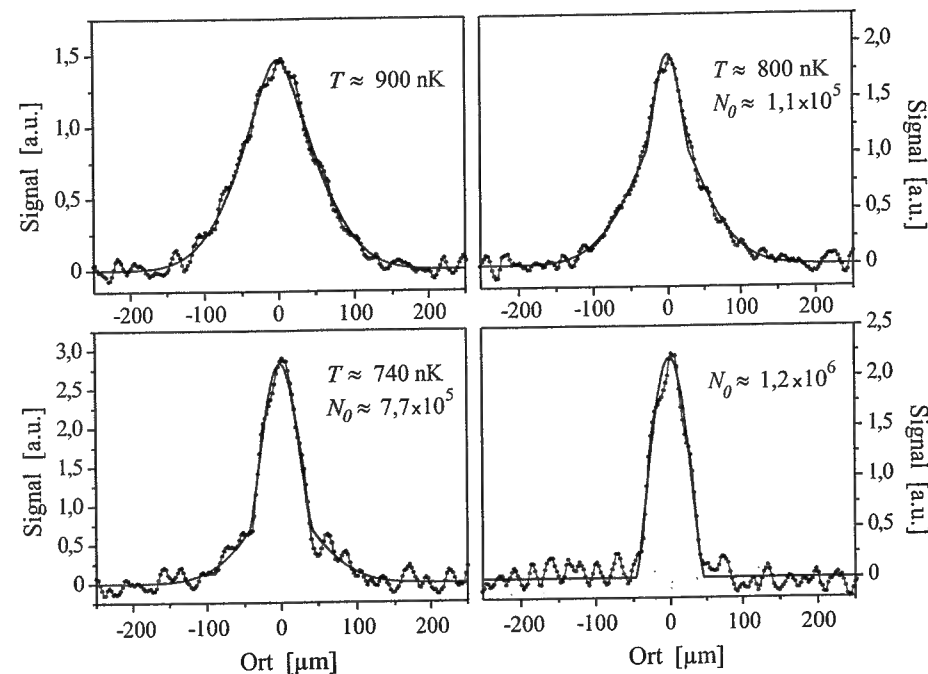


Abbildung 6.6: Schnitte durch In-Situ-Phasenkontrastbilder der Atomwolke. Durch Anpassen der Theoriekurven (6.8) lassen sich Teilchenzahl und Temperatur ermitteln.

dem Nachweisstrahl in Abwesenheit der Atomwolke eine homogene Phasenverschiebung von $\varphi \approx \pi/2$ aufgeprägt wird. Das an der Wolke gestreute Licht passiert hingegen die Brennebene der Linse außerhalb des Fokus. In diesem Fall wirkt der $\lambda/4$ -Punkt in der Fourier-Ebene selektiv auf den ungestreuten Anteil des Lichts. Alternativ läßt sich letzterer auch durch ein Hindernis in der Fourier-Ebene ausblenden, eine Technik, die dem Dunkelfeldmikroskop zugrunde liegt und bei der ersten dispersiven Beobachtung kalter Atomwolken eingesetzt wurde [161]. Im Phasenkontrastmikroskop interferieren hingegen das gestreute Feld $t(x, y)E_0 e^{i\phi(x, y)}$ und das um φ phasenverschobene Feld in der Bildebene zu

$$\begin{aligned} \frac{I(x, y)}{I_0(x, y)} &= \left| t(x, y)E_0(x, y)e^{i\phi(x, y)} + E_0(x, y)(e^{i\varphi} - 1) \right|^2 \\ &= I_0(x, y) \left[2 + t(x, y)^2 + 4t(x, y) \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left(\phi(x, y) - \frac{\varphi}{2} \right) - 2 \cos \varphi \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Durch Interferenz ist also die Phaseninformation in der Bildebene in einen Intensitätskontrast umgewandelt worden. Im Idealfall gilt $t = 1$ und $\varphi = \pi/2$. Im Bereich $0 \leq \phi(x, y) \leq \pi/2$ ist dann das Signal nahezu linear von der Phasenverschiebung abhängig (anders als im Falle des Dunkelfeldmikroskops). Um positive Phasenverschiebungen in diesem Intervall zu erzeugen, muß mit einer Rotverstimmung ($\delta < 0$) nachgewiesen werden, die gemäß Gleichung (6.12) an die zentrale optische Dichte der Wolke angepaßt ist. Unter typischen experimentellen Bedingungen sind Verstimmungen von 2 bis 4 GHz erforderlich.

Gegenüber Absorptionsmessungen bietet das Verfahren den Vorteil einer in sehr guter Näherung nicht-destruktiven Messung: Ist das Abbildungssystem bezüglich einer minima-

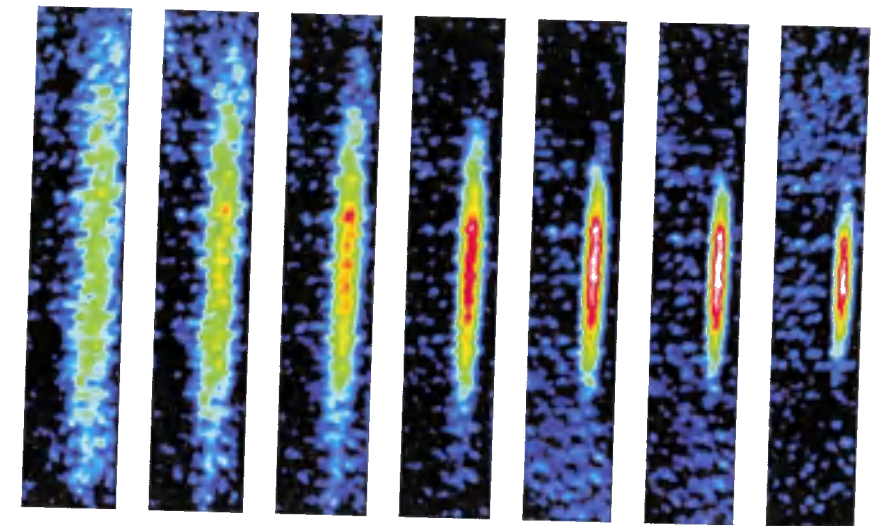


Abbildung 6.7: In-Situ-Phasenkontrastbilder einer thermischen Wolke während der Verdampfungskühlung. Der zeitliche Abstand der Bilder beträgt 200 ms. Die Ausdehnung der Wolke ist ein Maß für ihre Temperatur. Die in Falschfarben kodierte Intensität veranschaulicht die Zunahme der Säulendichte mit sinkender Temperatur. Die Fleckenstruktur kommt durch technisches Phasenrauschen zustande, das mit dem Signal interferiert.

len Wolkengröße d beugungsbegrenzt, muß die Verstimmung so groß sein, daß Photonen beim kohärenten Streuprozess um maximal den Winkel $\lambda/(2d)$ abgelenkt werden. Damit ist der übertragene Impuls höchstens $\Delta p \approx \hbar k \lambda/(2d)$ und somit einige hundert mal kleiner als $\hbar k$ im Falle inkohärenter Streuung. Zudem ist die Phasenverschiebung ϕ bei Verstimmungen, die groß im Vergleich zur Hyperfeinaufspaltung des angeregten Zustands und der Zeeman-Aufspaltung des Grundzustands in der Magnetfalle sind, unabhängig von Richtung und Größe des Magnetfeldes am Ort des Atoms. Dies und die geringe Rückwirkung erlauben den Einsatz der Phasenkontrastmikroskopie für *In-Situ*- bzw. *In-Vivo*-Messungen am Kondensat.

Wie bei Absorptionsmessungen werden auch in diesem Fall drei Bilder aufgenommen, um die Intensitätsverteilung zu normieren. Durch den Vergleich weit von der Wolke entfernter Bildbereiche werden zunächst die beiden belichteten Aufnahmen nach Abzug des Rauschbildes auf die gleiche Intensität skaliert. Danach werden die beiden Bilder voneinander subtrahiert (siehe dazu die Erläuterungen im Anhang von Ref. [159]). In Abbildung 6.6 sind Schnitte durch die Intensitätsmaxima von Phasenkontrastbildern dargestellt, die während der Verdampfungskühlung in der magnetischen Falle aufgenommen wurden. Die durchgezogenen Kurven entsprechen den Säulendichteverteilungen (6.8) mit willkürlich skalierten Amplituden. Bei bekannten Oszillationsfrequenzen (siehe Kapitel 5.5.4) ergeben sich aus der Anpassung die Temperatur des Ensembles und die volle Ausdehnung des Kondensats. Nach Gleichung (4.11) erhält man aus letzterer die Anzahl kondensierter Teilchen.

Die Auswertung von Phasenkontrastbildern ist allerdings ungenauer als jene von Absorptionsbildern. Zum einen liegt dies an den Eigenschaften des $\lambda/4$ -Punktes, dessen

Verzögerung φ nicht mit ausreichender Genauigkeit bekannt ist und insbesondere im Randbereich stark variieren kann. Zum zweiten gibt es in der Feldverteilung des Nachweisstrahls stets Inhomogenitäten bei hohen Raumfrequenzen. Dadurch passiert ein Teil des Feldes die Brennebene der ersten Linse außerhalb des $\lambda/4$ -Punktes. Umgekehrt werden die Anteile des an den Atomen gestreuten Feldes, die zu niedrigen Raumfrequenzen gehören, die Brennebene innerhalb des $\lambda/4$ -Punktes passieren [155]. Schließlich führt die Streuung an Unebenheiten, Staub u. ä., die sich im optischen System *hinter* der Atomwolke befinden, zu einem Phasenrauschen, daß durch die Interferenz in der Bildebene in Intensitätsrauschen umgewandelt wird. Bei In-Situ-Aufnahmen kommt erschwerend hinzu, daß kleine Kondensate eine Ausdehnung haben, die an die optische Auflösung des Systems heranreicht. Aus diesen Gründen eignen sich Phasenkontrastaufnahmen weniger gut für die genaue Bestimmung von Teilchenzahl und Temperatur.

Das Verfahren bietet sich insbesondere dort an, wo es um die Visualisierung dynamischer Prozesse geht [161, 160, 156, 162]. Aufgrund der geringen Rückwirkung können viele Bilder von ein und demselben Ensemble aufgezeichnet werden. In Abbildung 6.7 ist eine solche Serie von Bildern zu sehen, die während der Verdampfungskühlung aufgenommen wurde und veranschaulicht, wie mit sinkender Temperatur die Säulendichte der Atomwolke zunimmt.

Kapitel 7

Experimenteller Aufbau

Das vorliegende Kapitel ist den wichtigsten Elementen des experimentellen Aufbaus gewidmet. Was die Münchner Apparatur betrifft, sind dies das Vakuum- und das Lasersystem. Aufbau und Charakterisierung der Münchner Magnetfalle werden in den Referenzen [139, 140] vorgestellt. Da eine ausführliche Beschreibung der Konstanzer Apparatur in Referenz [32] nachzulesen ist, wird an dieser Stelle allein auf zwischenzeitlich durchgeführte Änderungen an deren magnetischer Falle eingegangen. Das Kapitel schließt mit einer kurzen Beschreibung der rechnergestützten Experimentsteuerung.

7.1 Vakuumsystem

Das Vakuum ist für den Betrieb eines Doppel-MOT-Systems ausgelegt und so konzipiert, daß es neben den Anforderungen an den Enddruck in den beiden Experimentierkammern auch die Voraussetzungen für einen sehr kurzen experimentellen Zyklus erfüllt (siehe Kapitel 5.3).

Das Herzstück der Apparatur ist in Abbildung 7.1 dargestellt und läßt sich grob in drei Bereiche unterteilen. Der obere Bereich besteht aus einem Doppelkreuzstück mit sechs CF-40 und sieben CF-16 Flanschen und beherbergt die Dampfzellenfalle. Bis auf zwei sind an allen Flanschen Vakuumfenster angebracht, die beidseitig mit einer Breitband-Antireflexbeschichtung (BALZERS, Iralin Spezial 750-900 nm) versehen sind. Sie dienen dem Eintritt der MOT-Strahlen, des Transfer- und des Pumplasers sowie der Beobachtung der Wolke mit Hilfe zweier CCD-Kameras und eines Photomultipliers. Über ein Faltenbalgventil (SWAGELOK SS-8BG-TW) ist an einen der CF-16 Flansche das Rubidiumreservoir angeschlossen, ein weiterer CF-16 Flansch verbindet den Dampfzellenrezipienten mit dem zentralen Bereich des Vakuumsystems.

Der zentrale Bereich besteht ebenfalls aus einem Kreuzstück und dient neben der Verbindung der beiden Experimentierkammern dem Anschluß aller Pumpen an das System.

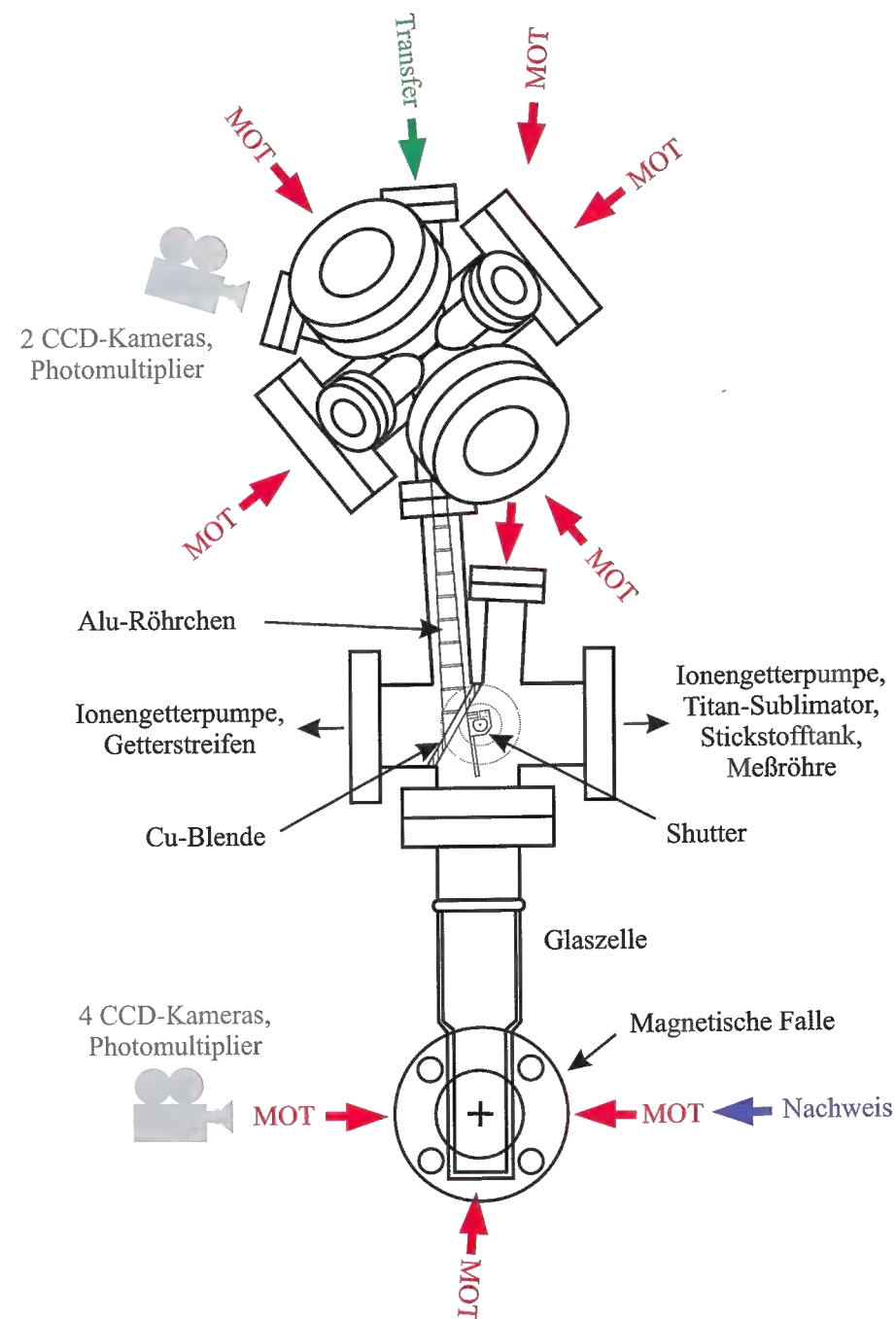


Abbildung 7.1: Das Münchner Vakuumsystem. Die beiden Experimentierkammern sind durch ein Aluminiumröhrchen und eine Kupferblende voneinander getrennt. So gelingt es, zwischen den Kammern eine Druckdifferenz von ca. drei Größenordnungen herzustellen. In der oberen Kammer wird die Dampfzellenfalle betrieben. Von hier werden die Atomwolken mit Hilfe eines resonanten Laserstrahls durch das Röhrchen in Richtung der Glaszelle beschleunigt, wo sie eingefangen und schließlich in die Magnetfalle überführt werden. Nach Beendigung des Transfers kann die Verbindung zwischen den Kammern geschlossen werden.

Außerdem ist hier ein drehbar gelagertes Aluminiumplättchen (*Shutter*) untergebracht, mit dem sich die Verbindung zum Dampfzellenrezipienten verschließen läßt. Seine Position wird über eine Rotationsdurchführung (MECA 2000, TMR 16II) eingestellt, die mit einem elektropneumatischen Schwenkantrieb (MECA 2000, DSR-10-180-P) versehen ist. In geschlossener Stellung deckt das Plättchen die Apertur einer Kupferblende ab, die als Trennwand zwischen den beiden Druckbereichen des Systems fungiert. Die Apertur stellt gleichzeitig die Mündungsöffnung eines konischen Aluminiumröhrchens mit einer Wandstärke von 0,2 mm dar, das bis in den Dampfzellenrezipienten hineinragt und mit der Vertikalen einen Winkel von $3,5^\circ$ bildet¹. Ist es offen, spielt es einerseits die Rolle eines Strömungswiderstandes mit einem Leitwert von ca. 0,15 l/s zwischen den Experimentierkammern und erlaubt andererseits den Transfer von Atomwolken aus der Dampfzellen- in die UHV-MOT (vgl. Kapitel 5.3). Unter einem Winkel von 7° bezüglich des Röhrchens tritt in diesen Bereich über ein CF-16 Fenster schließlich einer der Strahlen der UHV-MOT ein. Seine Achse trifft mit jener des Röhrchens am Speicherort der Atome zusammen.

Dieser befindet sich in einer quaderförmigen Glasküvette (Duran-Glas, Fa. HELLMA) mit einem Querschnitt von $3 \times 3 \text{ cm}^2$ und ist 36 cm von der Dampfzellenfalle entfernt. Die Verwendung einer Glasküvette in diesem Bereich der Apparatur geschieht aus Gründen des optischen Zugangs und um Wirbelströme zu vermeiden, die sich nachteilig auf die Schaltzeiten der Magnetfalle auswirken würden. Die Küvette ist an einen Glas-Metall-Übergang (VARIAN, FGA-0150-SP) angeschmolzen und an ihren Außenflächen mit einer Breitband-Antireflexbeschichtung (LASEROPTIK, AR 780 HT 532-1064 nm) versehen.

Der untere UHV-Bereich wird durch eine edelgasstabile Ionengetterpumpe (MECA 2000, PID 25, 25 l/s) und eine Titan-Sublimationspumpe (HOSITRAD, TSP1/70) evakuiert. Als Getterfläche (ca. 280 cm^2) dient dem Sublimator die innere Mantelfläche eines hohlzylinderförmigen Tanks, der von außen mit flüssigem Stickstoff befüllt werden kann. Gepumpt werden hier insbesondere die Gase H_2 , N_2 , O_2 , CO , CO_2 und H_2O . An der Eintrittsblende der Sublimationspumpe beträgt die Saugleistung durchschnittlich 350 l/s (bzw. 300 l/s, wenn – wie meistens – auf die Befüllung mit Stickstoff verzichtet wird). Der Dampfzellenrezipient wird über das Volumen zwischen der Außenwand des Alu-Röhrchens und der Innenwand der Rohrverbindung mit dem zentralen Kreuzstück evakuiert. Der Leitwert der koaxialen Rohrverbindung beträgt für Luft ca. 1,5 l/s. Er entspricht in etwa der effektiven Saugleistung, die von einer zweiten Ionengetterpumpe (Typ s.o.) und einem Getterstreifen (SAES St 707, 30 l/s für H_2 bzw. 3 l/s für N_2) in der Dampfzelle entfaltet wird. Die Magneten der beiden Ionengetterpumpen sind symmetrisch bezüglich der Position der UHV-MOT angeordnet und von dieser jeweils etwa 40 cm entfernt. Dadurch wird gewährleistet, daß ihre Streufelder am Speicherort der Atome erstens gering sind und sich zweitens kompensieren. Das gesamte Vakuumsystem wird mit einem mobilen Pumpenstand bei geöffneter Verbindung zwischen den Rezipienten vorevakuiert und anschließend mit Hilfe eines Ganzmetallventils (MDC MAV-150) geschlossen. Der Druck wird mit einer Bayard-Alpert-Ionisationsmeßröhre (GRANVILLE-PHILLIPS, 274023, Röntgen-Grenze $2,7 \times 10^{-11} \text{ mbar}$) gemessen bzw. aus dem Ionenstrom der Getterpumpen bestimmt.

¹ Alle weiteren Dimensionen des Röhrchens sind Abbildung 5.4 zu entnehmen.

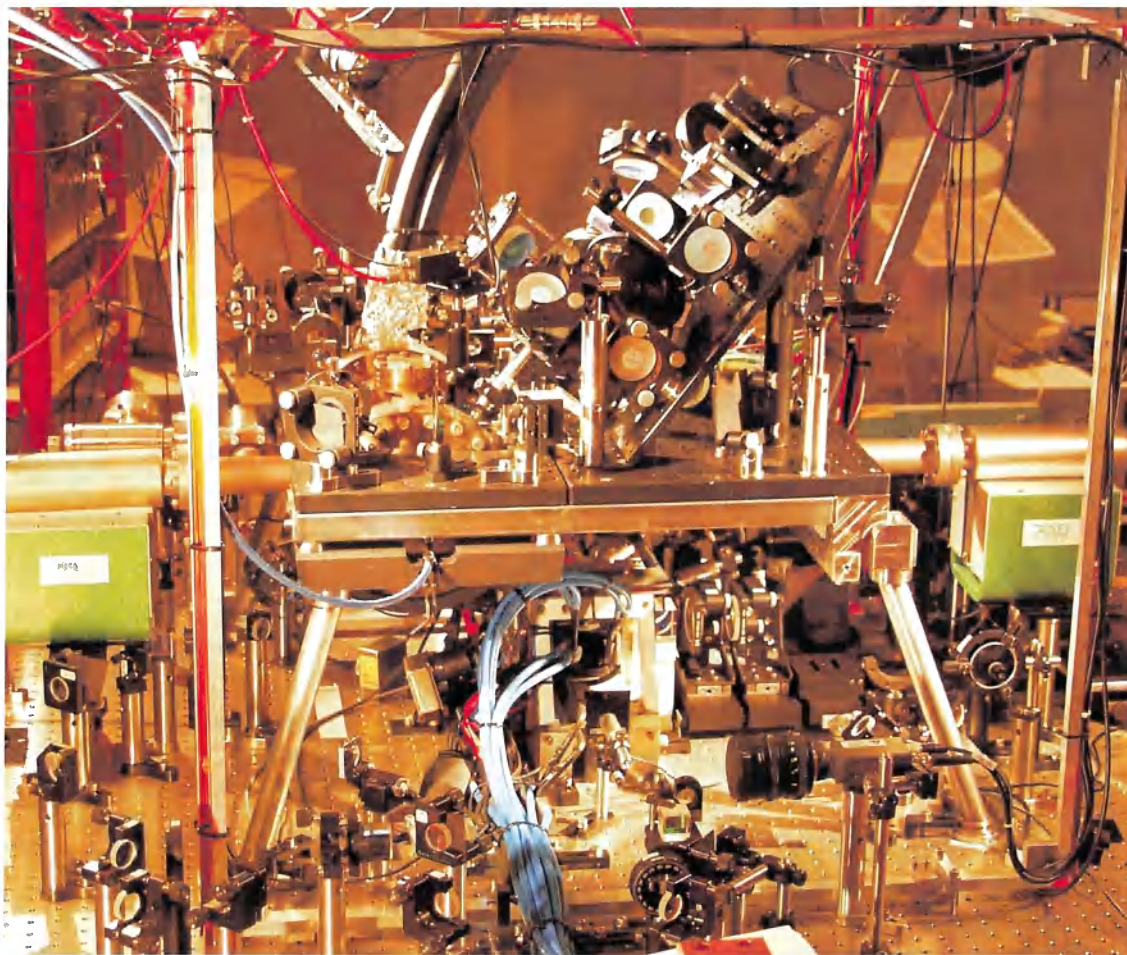


Abbildung 7.2: Fotografie der Vakuumapparatur einschließlich der sie umgebenden optischen Elemente.

Die beiden Kreuzstücke wurden von der Firma VTS CREATEC angefertigt. Es wurde ausschließlich nichtmagnetischer Edelstahl (316L, 316LN) eingesetzt, um zu vermeiden, daß die kalten Atome durch magnetische Streufelder abgelenkt werden. Um die Ausgasrate zu reduzieren, wurden erstens alle Rohre vor dem Verschweißen bei 950 °C ausgeglüht. Zweitens wurde die Metallapparatur eine Woche lang bei 350 °C ausgeheizt. Um die physisorbierte Wasserschicht von allen Innenwänden zu entfernen, wurde das System schließlich nach vollständiger Montage eine weitere Woche bei knapp 200 °C ausgeheizt. Am Ort der Meßröhre liegt der Enddruck unterhalb der Röntgen-Grenze. An den beiden Speicherorten können die Enddrücke aus der Populationsdynamik der Atomfallen zu 1×10^{-8} mbar bzw. einige 10^{-11} mbar abgeschätzt werden. Abbildung 7.2 zeigt eine Fotografie der Vakuumapparatur einschließlich der sie umgebenden optischen Elemente.

7.2 Lasersystem

Für die Kühlung und die Manipulation der ultrakalten Rubidiumatome wird kohärentes Licht bei einer Wellenlänge von 780 nm (D_2 -Linie) benötigt, dessen spektrale Breite signifikant geringer als die natürliche Linienbreite der adressierten Übergänge ist. Die große Hyperfeinaufspaltung des Grundzustandes von ^{87}Rb kann nicht durch kommerzielle akustooptische Modulatoren (AOM's) überbrückt werden. Um MOT- und Rückpumplicht zu erzeugen, sind daher zwei Lasersysteme erforderlich.

Für den Einsatz bei einer Wellenlänge von 780 nm kommen single-mode Laserdioden und Titan-Saphirlaser in Frage. Mit einer Ausgangsleistung von maximal 100 mW sind erstere jedoch für den Betrieb einer MOT mit großen Strahldurchmessern zu lichtschwach. Häufig werden daher neuerdings sog. Broad-Area- oder Tapered-Amplifier-Dioden eingesetzt, um das stabilisierte Licht einer single-mode Laserdiode zu verstärken. Auf diese Weise lassen sich Lichtleistungen von bis zu 500 mW erzeugen. Der Nachteil dieser Systeme besteht in ihrer geringen Strahlqualität und ihrem relativ hohen spektralen Untergrund, der durch die Verstärkung der spontanen Emission in den injizierten Dioden zustandekommt. Eine nachträgliche Filterung des Lichts ist zwar möglich, reduziert jedoch die letztlich zur Verfügung stehende Leistung.

Im Münchner Experiment wird das MOT-Licht daher von einem kommerziellen Titan-Saphirlasersystem bereitgestellt. Neben seiner hohen Ausgangsleistung besteht ein weiterer Vorteil des Systems in seiner hohen Strahlqualität ($M^2 = 1,15$). Da Rückpumplicht wesentlich geringerer Intensität benötigt wird, kommt zu dessen Erzeugung ein Diodenlasersystem zum Einsatz. Das gesamte Lasersystem ist schematisch in Abbildung 7.3 und als Fotografie in Abbildung 7.5 dargestellt. Es befindet sich zusammen mit der Vakuumapparatur auf einem optischen Tisch und nimmt hier die Hälfte der Fläche von $1,5 \times 4,8 \text{ m}^2$ ein. Zur Abschirmung der Magnetfalle von Streulicht ist das Lasersystem von einem lichtundurchlässigen Plexiglastkasten umgeben. Aus dem gleichen Grund können alle Strahlen, die den Kasten in Richtung der Vakuumapparatur verlassen, durch digital gesteuerte, mechanische Shutter geblockt werden. Zum Staubschutz wird das System mit Hilfe einer sog. Flowbox laminar geblutet.

Titan-Saphirlasersystem

Der Ringlaser (Ti:Sa, COHERENT MICROLASE MBR-110) zeichnet sich durch seine stabile (und kompakte) monolithische Blockkonstruktion aus und ist daher nahezu wartungsfrei. Er wird von einem frequenzverdoppelten Nd:YVO₄-Laser (COHERENT VERDI V-10) bei einer Wellenlänge von 532 nm gepumpt (Abbildung 7.3(a)). Mit einer Pumpleistung von 10 W wird eine Ausgangsleistung von ca. 1,3 W erreicht. Das System ist serienmäßig für eine externe Frequenzstabilisierung ausgerüstet. Als Stellglieder dienen hierzu ein Etalon, das sich innerhalb des Ringresonators befindet, und einer der Resonatorspiegel, der sich piezoelektrisch positionieren läßt. Vom Hersteller ist vorgesehen, den Ringresonator auf der kurzen Zeitskala mit Hilfe dieser Stellglieder auf ein externes Fabry-Perot-Interferometer zu stabilisieren, das, wie die Regelektronik, serienmäßig mitgeliefert wird. Die Langzeitstabilität kann dann durch eine piezoelektrische Stabilisierung der Interferometerlänge

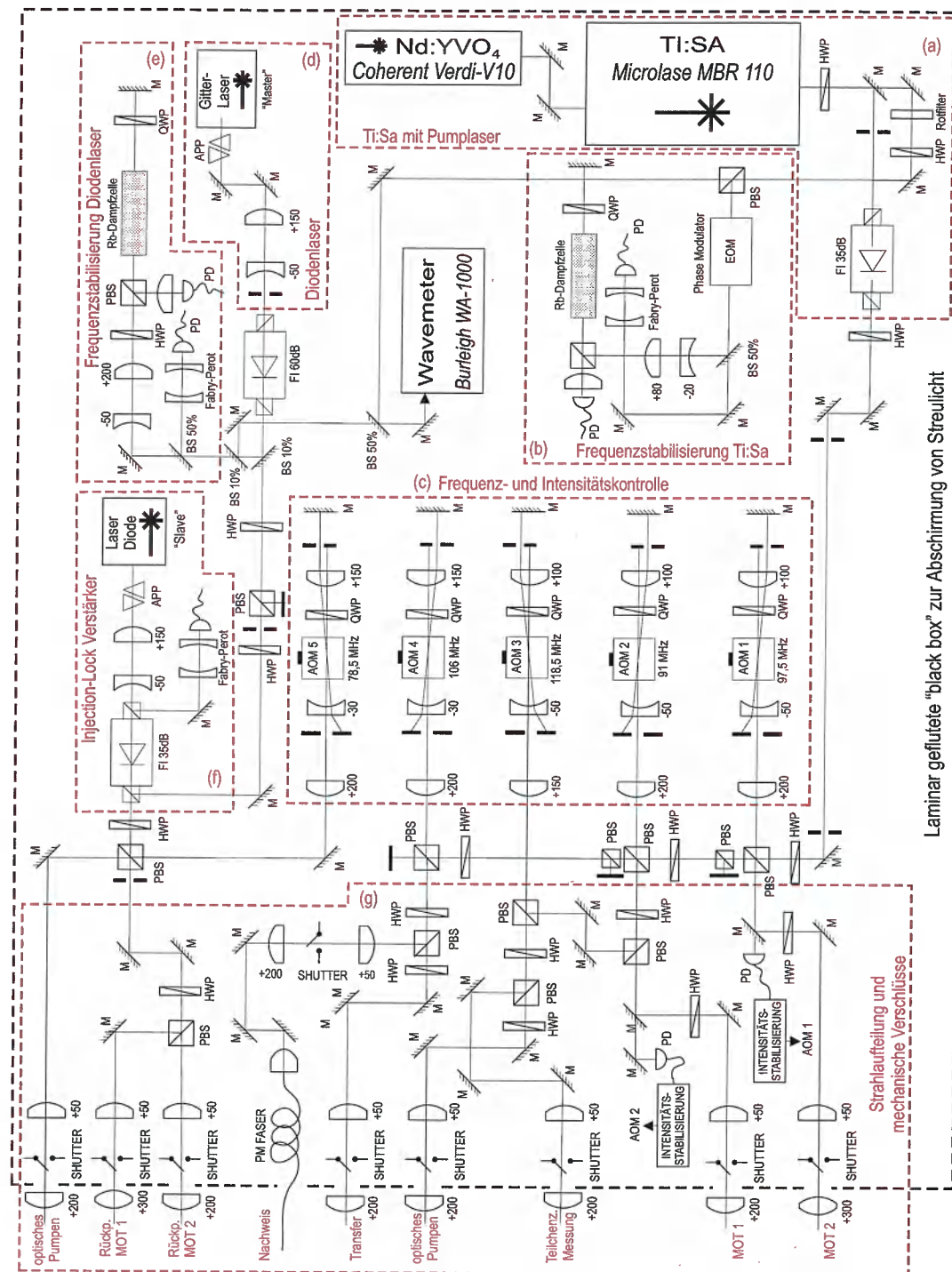


Abbildung 7.3: Das Lasersystem besteht zum einen aus einem Ti:Sa-Laser, der von einem frequenzverdoppelten Nd:YVO₄-Laser bei 532 nm gepumpt wird (a). Zum anderen kommt ein GSD-Laser (d) mit einer Injection-Lock-Endstufe (f) zum Einsatz. Das Licht wird aufgeteilt und mit Hilfe von AOM's in der Frequenz und Intensität für den Einsatz im Experiment abgestimmt (c).

auf ein externes Fehlersignal erreicht werden. Diese Strategie hat sich allerdings als nicht praktikabel erwiesen, weil sich das Interferometer aufgrund des hohen Rauschpegels seiner Regel- und Versorgungselektronik denkbar schlecht als Referenz eignet. Im Experiment wird der Ringresonator daher direkt auf das externe Fehlersignal stabilisiert, wodurch es gelingt, die Linienbreite um den Faktor 25 zu reduzieren. Um dies zu ermöglichen, war ein Umbau der kommerziellen Lasersteuerung erforderlich². Die Linienbreite des umgebauten Systems wurde im stabilisierten Zustand aus dem Rauschpegel des Fehlersignals (Frequenzband: 30 mHz ... 1 MHz) bzw. aus dem Transmissionssignal eines externen Interferometers (Frequenzband: 50 Hz ... 1 MHz) bestimmt. Die Messungen sind konsistent und liefern Werte von knapp 40 kHz.

Gitterstabilisierter Diodenlaser mit Injection-Lock-Endstufe

Als Quelle für das Rückpumplicht wird ein Gitterstabilisierter Diodenlaser (GSD-Laser) eingesetzt, der in der Arbeitsgruppe entwickelt wurde [163]. Bei einem GSD-Laser wird die Linienbreite einer Laserdiode (hier SHARP LTO24MDO) signifikant reduziert, indem sie in einen externen Resonator eingebaut wird. Als „Spiegel“ dienen die dem Gehäuse zugewandte Endfläche des Halbleiters sowie ein Reflexionsgitter, das in den kollimierten Strahl der Laserdiode gebracht wird und einen Teil des Lichts in sich zurückwirft. Das restliche Licht wird ausgekoppelt und steht für das Experiment zur Verfügung. Der GSD-Laser läßt sich durch die Stellung des Reflexionsgitters und die (stabilisierte) Temperatur des Halbleiters über mehrere nm gegenüber der spezifizierten Emissionswellenlänge der Laserdiode abstimmen. Dabei sind die Frequenzbereiche, über die ein Single-Mode-Betrieb ohne Modensprünge zu erreichen ist, mehrere GHz breit. Als Stellglieder für eine Frequenzstabilisierung dienen einerseits die piezoelektrisch kontrollierte Position des Reflexionsgitters und andererseits der Injektionsstrom der Laserdiode (Regelbandbreiten ca. 2 kHz bzw. 40 kHz). Die Linienbreite des stabilisierten Lasers wurde auf die gleiche Weise wie die des Ti:Sa zu 400 kHz bestimmt.

Die Ausgangsleistung des GSD-Lasers von lediglich etwa 10 mW reicht für das Experiment nicht aus. Daher wird sein Licht in einer sog. Injection-Lock-Endstufe verstärkt (Abbildung 7.3(f)). Bei dieser Methode, deren Beschreibung etwa in Referenz [164] zu finden ist, wird das aktiv stabilisierte Licht des GSD-Lasers („Master“) in eine freilaufende Single-Mode-Laserdiode („Slave“, SANYO DL-7140-001) injiziert, deren Injektionsstrom und Temperatur passiv stabilisiert sind. Durch eine sorgfältige Überlagerung und eine spektralen Eigenschaften des injizierten Lichts aufgezwungen. Dessen Leistung beträgt die Slave- der Master-Diode ohne Modensprünge über einen Frequenzbereich von 10 GHz. Sowohl die Überlagerung als auch die Auskopplung des verstärkten Lichts gelingen mit Hilfe eines einstufigen Faraday-Isolators (GSÄNGER FR780-35dB), durch den gleichzeitig die Rückkopplung der Slave- auf die Master-Diode unterbunden wird. Für das Experiment steht schließlich eine Ausgangsleistung von ca. 80 mW zur Verfügung.

² Dank gilt an dieser Stelle Herrn Thomas Fischer aus dem Nachbarlabor.

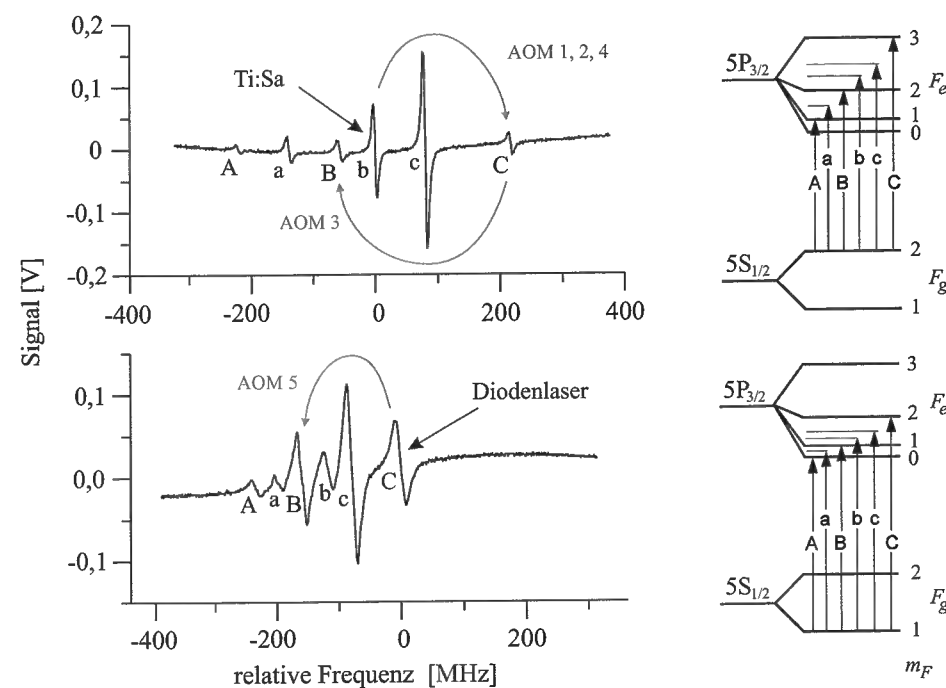


Abbildung 7.4: Signale der Doppler-freien FM-Spektroskopie der D_2 -Linie von ^{87}Rb . Die Laser werden auf die gekennzeichneten Resonanzen stabilisiert. Von hier aus sind alle weiteren Resonanzen, die im Experiment benötigt werden, mit Hilfe von AOM's zu erreichen.

Frequenzstabilisierung

Um die Frequenz des Lichts auf eine atomare Resonanz zu stabilisieren, wird bei beiden Lasersystemen auf die Doppler-freie Sättigungsspektroskopie an elementarem Rubidium in einer Dampfzelle zurückgegriffen [165]. Mit dieser Methode gelingt es, die natürliche Linienbreite der atomaren Übergänge aufzulösen (Abbildung 7.3(b) und (e)). Das Fehlersignal wird durch ein Frequenzmodulationsverfahren gewonnen [166]³. Für die Stabilisierung des Ti:Sa-Lasers wird ein Teil des Lichts („Träger“) abgezweigt und durch einen Phasenmodulator (elektrooptischer Modulator (EOM)) gelenkt. Im Frequenzraum äußert sich die Phasenmodulation bei geringem Hub im Auftreten von zwei Seitenbändern, die symmetrisch um den Träger angeordnet sind. Im Falle des GSD-Lasers werden die Seitenbänder durch die Modulation seines Injektionsstroms erzeugt. Beim Durchgang durch ein absorptives und dispersives Medium (*Rb-Dampfzelle*) erfahren die drei Frequenzkomponenten jeweils Absorptionen und Phasenverschiebungen, die von ihrer Lage bezüglich der atomaren Resonanz abhängen. Durch ihre Überlagerung auf einer Photodiode entsteht ein Schwebungssignal, aus dem sich durch Demodulation das Fehlersignal gewinnen lässt. Es ist in Abbildung 7.4 dargestellt und besteht aufgrund der unterschiedlichen Hyperfeinaufspaltung von Grundzustand und angeregtem Zustand (siehe Anhang E) aus zwei Linien-Sextetts.

³ Ausführliche Beschreibungen der Frequenzstabilisierung, die allgemein in der Arbeitsgruppe eingesetzt wird, sind am Beispiel des GSD-Lasers in den Referenzen [167, 163] zu finden.

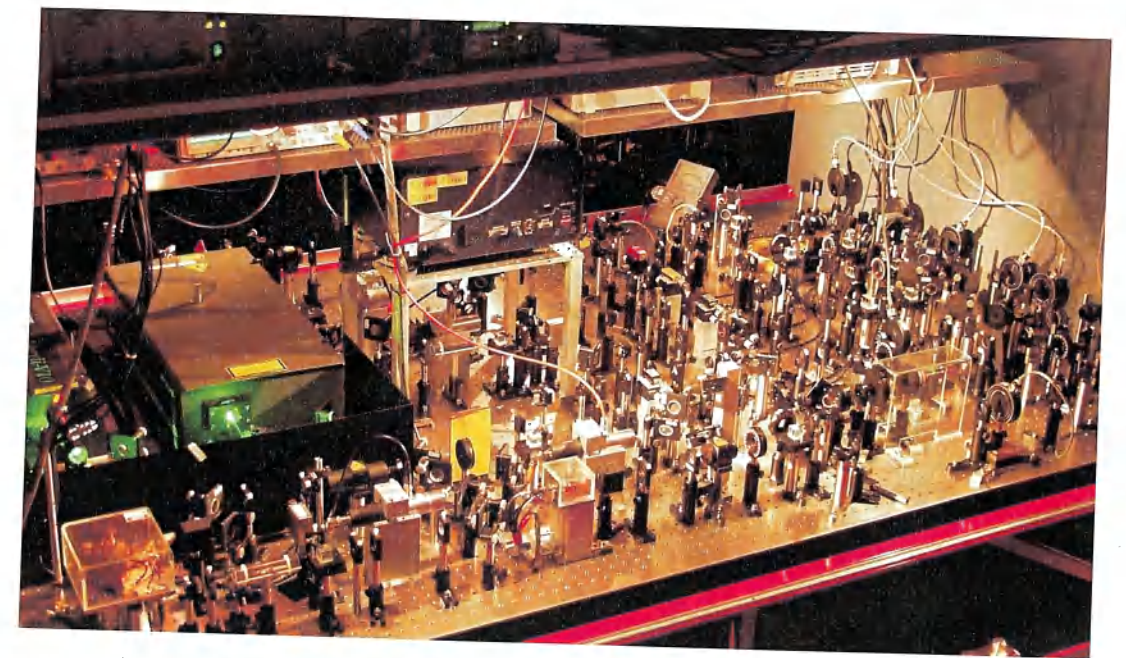


Abbildung 7.5: Fotografie des Lasersystems. Vorne ist das Diodenlasersystem, hinten das Ti:Sa-Lasersystem zu erkennen.

Der Ti:Sa-Laser wird auf die sog. cross-over-Resonanz „b“ des ($F_g = 2$)-Sextetts stabilisiert, die sich im Abstand von 212 MHz von den beiden atomaren Resonanzen $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 1\rangle$ und $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 3\rangle$ befindet. Von hier aus lässt sich mit Hilfe von vier AOM's das Licht für den Einsatz in den beiden MOT's (Abbildung 7.3(c), AOM 1,2), beim Nachweis bzw. Transfer (AOM 4) und beim optischen Pumpen bzw. bei der Teilchenzahlmessung (AOM 3) erzeugen. Die Leistung der akustooptischen Modulationsfrequenz dient in drei Fällen (AOM 1, 2 und 4) als Stellglied für eine Intensitätsstabilisierung und ist, wie die Frequenz, rechnergesteuert. Der GSD-Laser wird auf die atomare Resonanz $|F_g = 1\rangle \rightarrow |F_e = 2\rangle$ stabilisiert und emittiert somit Rückpumplicht. Nach der Verstärkung wird ein Teil des Lichts abgezweigt und mit Hilfe eines weiteren Modulators (AOM 5) für den Einsatz beim optischen Pumpen in den Zustand $|F_g = 1, m_F = -1\rangle$ aufbereitet.

7.3 Magnetische Falle

Die im Konstanzer Experiment eingesetzte Ioffe-Pritchard-Falle ist in Abbildung 7.6 dargestellt. Sie umschließt die Glasküvette und somit den UHV-Bereich der Vakuumapparatur. Da der Aufbau der Falle in Referenz [32] ausführlich vorgestellt wurde, sind im folgenden hauptsächlich Änderungen beschrieben, die in der Zwischenzeit vorgenommen wurden, sowie deren Auswirkungen. Ziel war dabei stets, die Reproduzierbarkeit des Experimentes zu verbessern, die ganz wesentlich von der Stabilität des Speicherpotentials abhängt: Sowohl die Teilchenzahl als auch die Temperatur der Atomwolke sind durch die Potentialtiefe bestimmt, bei der die Verdampfungskühlung endet. Da die Radiofrequenz vorgegeben wird, entsprechen Fluktuationen des Potentialminimums solchen der Potentialtiefe.

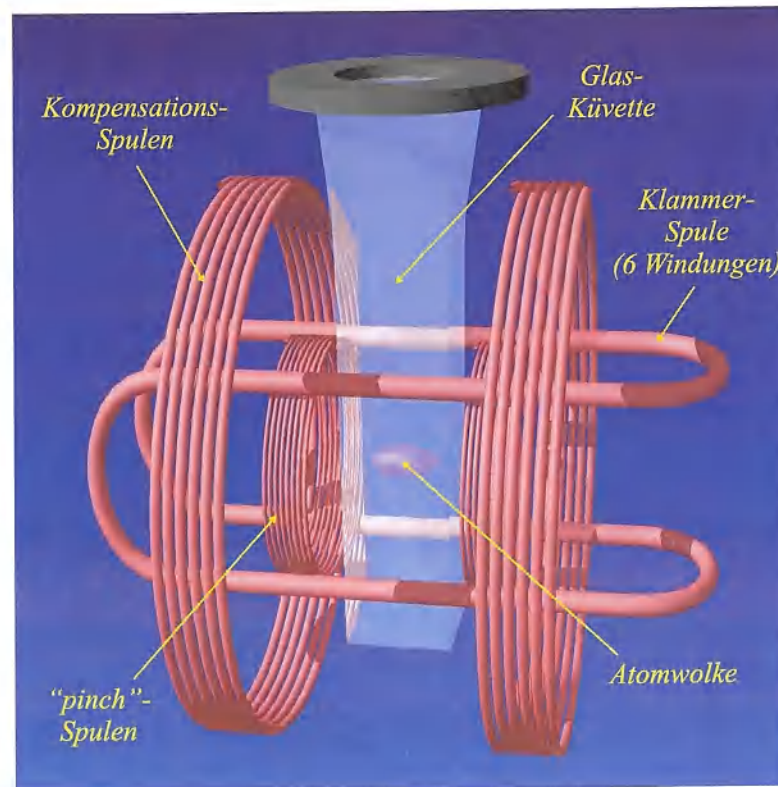


Abbildung 7.6: Schematische Darstellung der Ioffe-Pritchard-Falle. Die Glasküvette ist drei cm breit. Ein drittes, koaxiales Spulenpaar ist nicht dargestellt. Es wird zur Kompensation jenes Feldes eingesetzt, das von den Enden der Klammerspule im Zentrum der Falle erzeugt wird.

Beschaltung der Falle

Eine der wichtigsten Änderungen betrifft die Kompensationsspulen, die jetzt entlang ihrer Achse verschoben werden können. Dadurch wird erreicht, daß sich die Felder der vier kreisförmigen Spulen, die in Abbildung 7.6 zu erkennen sind, im Zentrum der Falle bei gleichem Strom vollständig kompensieren. Dies ermöglicht es einerseits, die Falle während der Verdampfungskühlung mit zwei rein seriellen Stromkreisen zu betreiben. Der serielle Betrieb, d.h. der Verzicht auf einen sog. „Bypass“-Widerstand, hat die Reproduzierbarkeit des Experimentes erheblich verbessert. Zweitens kommt nun das Feld am Potentialminimum (das sog. „Offset“-Feld) ausschließlich durch die Beiträge der Spulen im zweiten Stromkreis zustande, der für den radialen Einschluß der Atome verantwortlich ist. Dadurch kann der axiale Einschluß vollständig abgeschaltet werden, ohne daß dies Auswirkungen auf die radialen Fallenfrequenzen hätte. Für die in [32] beschriebenen Experimente an Kondensaten in einem magnetischen Wellenleiter ist dies von großem Nutzen.

Bei der Einstellung des Offset-Magnetfeldes mit Hilfe des zweiten Stromkreises wird ausgenutzt, daß die vier geraden Leiter der Ioffe-Falle zu einer Klammerspule verbunden sind. Da die Verbindungen der Leiter nicht im Unendlichen liegen, erzeugen sie im Zentrum der Falle ein nahezu homogenes Feld axialer Richtung von etwa 30 G. Dieses wird durch ein weiteres beweglich gelagertes Spulenpaar kompensiert, auf dessen Abbildung zugunsten

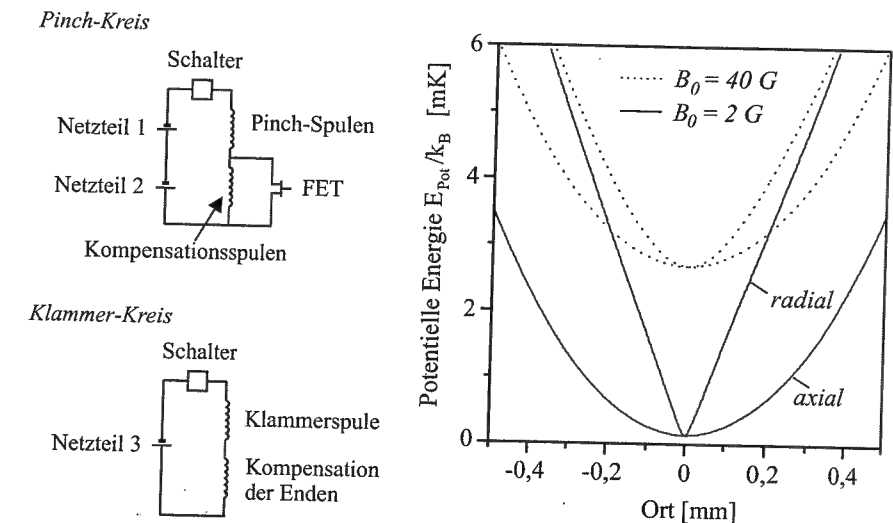


Abbildung 7.7: Beschaltung der Falle und Auswirkungen der Kompensation auf das Speicherpotential in radialer und axialer Richtung.

der Übersichtlichkeit verzichtet wurde. Die Kompensation erfolgt hier bis auf ein Feld von etwa 2 G, dem die Atomwolke nach der Kompression in der Falle schließlich ausgesetzt ist.

Abbildung 7.7 zeigt die Beschaltung der Spulen in beiden Stromkreisen. Der Strom im Klammer-Kreis wird durch die analoge Programmierung einer Stromquelle (HP 6681A) kontrolliert. Der Pinch-Stromkreis wird von zwei seriellen Netzteilen gleichen Typs versorgt (sog. Master-Slave Anordnung). Durch die analoge Programmierung eines der Netzteile wird der Strom kontrolliert, während das zweite Netzteil als Spannungsquelle betrieben und über seine GPIB-Schnittstelle programmiert wird. In beiden Stromkreisen befinden sich außerdem Schalter. Die Variation des Offset-Magnetfeldes insbesondere im Hinblick auf die Erzeugung des isotropen Speicherpotentials gelingt durch die Überbrückung der Kompensationsspulen im Pinch-Kreis mit Hilfe geregelter Feldeffekt-Transistoren („FET“), die im komprimierten Zustand der Falle nichtleitend sind. Das in Abbildung 7.7 rechts dargestellte Schaubild veranschaulicht den Einfluß, den unterschiedliche Kompensationen auf den radialen Einschluß der Atome haben. Die durchgezogenen Kurven entsprechen dem Speicherpotential in axialer und radialer Richtung nach der Kompression, wenn sich die Felder der Pinch- und Kompensationsspulen im Fallenzentrum exakt aufheben.

Um die Induktivität gering zu halten und somit extrem kurze Schaltzeiten von etwa 300 μs zu ermöglichen besitzen die Spulen lediglich 6 Windungen (die Kompensation des Axialfeldes der Klammerspule wird mit lediglich zwei Windungen erreicht). Relevant für das Experiment sind die Krümmung $B_2 = 0,8 \text{ G}/(\text{cm}^2 \cdot \text{A})$, der Gradient $B' = 0,48 \text{ G}/(\text{cm} \cdot \text{A})$ und die Tiefe des Speicherpotentials. Bei einem Offset-Feld von $\bar{B}_0 = 2 \text{ G}$ beträgt letztere für maximal polarisierte ^{87}Rb -Atome $E_{\text{trap}}/k_B \approx 7 \text{ mK}$. Um typische Oszillationsfrequenzen von $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 24,5 \text{ Hz}$ und $\omega_{\perp} = 2\pi \times 220 \dots 250 \text{ Hz}$ zu erreichen, müssen Ströme von 450 $\dots$ 500 A eingesetzt werden.

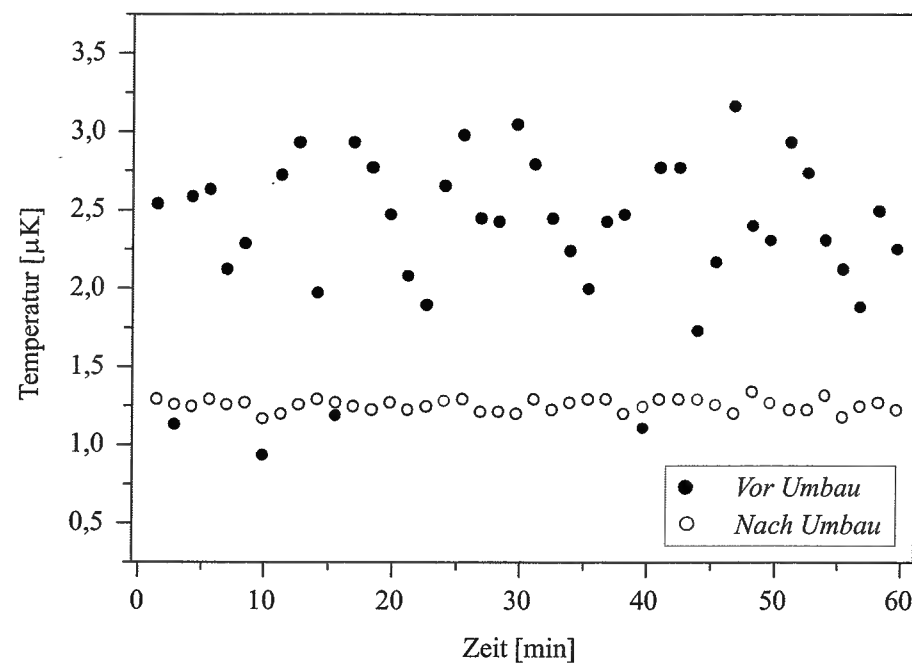


Abbildung 7.8: Temperatur von Atomwolken, die durch Verdampfungskühlung in aufeinanderfolgenden experimentellen Zyklen erzeugt wurden. Gezeigt sind Messungen vor und nach den Umbaumaßnahmen.

Kühlwasserstabilität

Da alle Spulen aus Kupferrohren gewickelt sind, kann die Ohmsche Verlustleistung von insgesamt 12,5 kW durch direkte Wasserkühlung abgeführt werden. Die Wasserkühlung hat sich als eine der Schlüsselkomponenten des Systems im Hinblick auf die Reproduzierbarkeit des Experimentes erwiesen. Es wurde eine eindeutige Korrelation der Atomwolgentemperatur T_a mit der Kühlwassertemperatur T_w beobachtet, die auf die thermische Ausdehnung der Spulen bzw. ihrer Halterungen zurückzuführen ist. Auf kurzen Zeitskalen ist die Abhängigkeit mit $\Delta T_a / \Delta T_w \approx 220 \text{ nK}/^\circ\text{C}$ sehr empfindlich. Daher sind die in frühen Experimenten beobachteten Driften und Schuß-zu-Schuß-Fluktuationen von Meßgrößen wie Temperatur und Teilchenzahl zum großen Teil auf den Temperaturverlauf des Kühlwassers zurückzuführen. Eine wesentliche Verbesserung brachte der Anschluß der Falle an die Trinkwasserversorgung, die eine erheblich höhere Temperaturstabilität als der Kühlwasserkreislauf der Universität Konstanz aufweist. Schließlich ist noch der Wasserdurchfluß der Pinch- und der Kompensationsspulen in etwa verdoppelt worden, wodurch zu Beginn von Meßzeiten kürzere Driften auftreten.

Wie Abbildung 7.8 zeigt, konnte durch diese Maßnahmen eine hohe Stabilität des Speicherpotentials erreicht werden. Aufgetragen sind die Temperaturen von Atomwolken, die innerhalb einer Stunde in aufeinanderfolgenden experimentellen Zyklen unter gleichen Bedingungen durch Verdampfungskühlung erzeugt wurden. Gezeigt ist je eine Meßreihe vor und nach den Umbaumaßnahmen. Die Temperaturen ergeben sich aus Absorptionsspektren der Wolke, die nach dem Abschalten der magnetischen Falle und einer freien Expansionszeit von 27 ms aufgenommen wurden. Eine lange Expansionszeit gewährleistet,

daß die Oszillationsfrequenzen unkritisch in die Auswertung eingehen, wie anhand von Gleichung (A.12) zu erkennen ist. Fluktuationen der Fallenfrequenzen sind andererseits hauptsächlich durch Fluktuationen des Offset-Magnetfeldes bedingt, da dieses durch die Differenz vergleichsweise hoher Felder zustandekommt. Mit dem Offset-Feld variiert auch die Potentialtiefe, bei der die Verdampfungskühlung endet, und mit ihr die Temperatur der Wolke (vgl. Beziehung (5.35)). Daher liefert die Temperaturmessung nach einer langen Expansionszeit Informationen über die Stabilität des Potentials. Die Standardabweichung der Temperaturen von dem Mittelwert $T \approx 1,25 \mu\text{K}$ beträgt nach dem Umbau $\sigma_T \approx 40 \text{ nK}$ und entspricht in etwa der relativen Genauigkeit der Temperaturmessung. Erreicht wird diese Stabilität nach einer Stunde Experimentierzeit. Die analoge Messung vor dem Umbau bzw. vor der Umstellung auf Trinkwasser wurde an einem Tag mit besonders ausgeprägten Temperaturfluktuationen des Kühlwassers durchgeführt. Streuungen von $\sigma_T \approx 500 \text{ nK}$ machten das Experimentieren an solchen Tagen unmöglich.

Technische Heizraten

Im tiefen UHV ist ein magnetisch gespeichertes Gas äußerst gut von der Umwelt isoliert. Aus diesem Grund kommt ein BEK-Experiment, in dem immerhin Temperaturen von wenigen 10 nK erreicht werden, ganz ohne Kryo-Technik aus. Aufgrund des diskreten Absorptionsspektrums der Atome und der geringen spektralen Dichte der Wärmestrahlung kann die Heizrate vernachlässigt werden, die durch Streuung von Photonen zustandekommt⁴. Die einzigen verbleibenden Wärmequellen sind Fluktuationen des Speicherpotentials, Stöße mit dem „heißen“ Hintergrundgas der Vakuumapparatur und exotherme Stöße zwischen den gespeicherten Atomen. Wie in den Kapiteln 3.2 und 3.3 erläutert wurde, können letztere bei geringen Dichten vernachlässigt werden. Es bietet sich daher an, die Heizrate einer Atomwolke geringer Dichte und Temperatur in der magnetischen Falle zu messen. Mit dieser Rate ist in jedem Experiment mindestens zu rechnen. Abbildung 7.9 zeigt eine solche Messung bei einer Teilchendichte von $5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ und einer Temperatur von 400 nK. Aufgetragen sind die Temperaturen identisch präparierter Atomwolken über deren Speicherzeit, die unmittelbar nach der Verdampfungskühlung mit dem Abschalten der Radiofrequenz beginnt. Die Temperatur wurde auch hier aus Absorptionsspektren der Wolke bestimmt. Es ergibt sich eine Heizrate von etwa 20 nK/s, die für eine sehr gute Isolation von der Umgebung spricht.

Das Stromrauschen der Netzteile und mechanische Vibrationen der magnetischen Falle äußern sich in Fluktuationen der Fallenfrequenzen und solchen der Gleichgewichtslage, wie sich anhand der Ausdrücke (5.29) für die Fallenfrequenzen erkennen läßt⁵. Sie führen zu Heizraten, die jeweils von der spektralen Rauschdichte der Fluktuationen bei der Fallenfrequenz ω und deren Harmonischer 2ω abhängen [168]. Für die Netzgeräte wird eine Stromstabilität von 190 mA (RMS) bei 580 A spezifiziert. Unter der Annahme eines weißen Rauschens mit einer Bandbreite von 1 kHz lassen sich die Heizraten durch Strom-

⁴ Wesentlich gefährlicher ist das nahezu resonante Streulicht des Lasersystems, das zur optischen Kühlung eingesetzt wird. Es wird im Experiment sehr sorgfältig abgeschirmt.

⁵ Die Gravitation bewirkt, daß Fluktuationen der Fallenfrequenz in vertikaler Richtung auch zu Fluktuationen der Gleichgewichtslage führen.

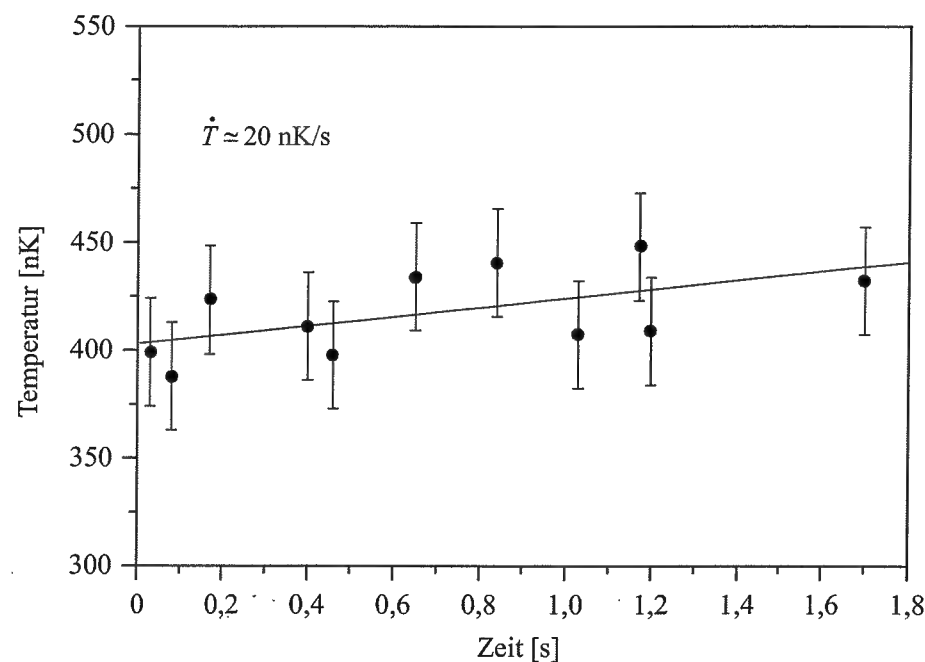


Abbildung 7.9: Temperaturentwicklung einer magnetisch gespeicherten Atomwolke geringer Dichte nach der Verdampfungskühlung.

rauschen nach o. a. Referenz zu weniger als 1 nK/s abschätzen. Dieses Ergebnis weist darauf hin, daß das Stromrauschen im Experiment keine Rolle spielt. Es bestätigt zudem Beobachtungen, die im Zusammenhang mit Messungen der Fallenfrequenzen durch resonantes oder parametrisches Heizen gemacht werden (vgl. Kapitel 5.5.4): Eine signifikante Heizrate ist dort nur mit Modulationsamplituden zu erreichen, die Größenordnungen über die spezifizizierte Rauschamplitude der Netzteile hinausgehen.

In den meisten Fällen führen Stöße mit dem Hintergrundgas zu Verlusten. Lediglich der Bruchteil streifender Stöße, mit Energieüberträgen, die kleiner als die Tiefe des Speicherpotentials sind, äußern sich in einer Heizrate. Sie ist von mehreren Autoren in übereinstimmender Weise quantifiziert worden [118, 141, 142]. Der Vergleich mit dem Experiment ist jedoch insoweit schwierig, als eine Unterscheidung zwischen „heizenden“ Stößen und solchen, die Verluste bewirken, in einem tiefen Speicherpotential gewissermaßen willkürlich ist (vgl. Kapitel 9 und 10). Heizraten in der Größenordnung von einigen zehn nK/s erscheinen jedoch plausibel (siehe Anhang C). Daher ist davon auszugehen, daß die beobachtete Heizrate auf streifende Hintergrundgasstöße zurückzuführen ist.

Die Spezifikationen der Konstanzer Falle bieten insbesondere nach den Umbaumaßnahmen gute Voraussetzungen für das Experiment. Die empfindliche Abhängigkeit des Speicherpotentials von der Temperatur des Kühlwassers sowie die komplizierte Kompensation des radialen Stromkreises haben jedoch zu der Konzeption einer neuen Falle und einer Temperaturstabilisierung des Kühlwassers für das Münchner Experiment geführt. Ihre Beschreibung findet sich in den Referenzen [139, 140].

7.4 Steuerung und Datenaufnahme

Wie in Kapitel 5 erläutert, erfolgt die Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten in einer Vielzahl experimenteller Schritte, die in der Regel zeitkritisch sind und empfindlich von experimentellen Parametern abhängen. Ein BEK-Experiment ist daher ohne eine rechnergestützte Steuerung undenkbar. Sie gewährleistet nicht nur die Reproduzierbarkeit des Experimentes, sondern ermöglicht es auch, einzelne Parameter im Hinblick auf ihre Optimierung oder während einer Messung systematisch zu variieren.

Für die Experimentsteuerung und die Datenaufnahme werden zwei PC's eingesetzt, die über ihre Standardausstattung hinaus mit zusätzlichen Steckkarten versehen sind. Der erste Rechner dient einerseits der Steuerung und andererseits der Datenaufnahme vor Beginn der Verdampfungskühlung. Zwei seiner Steckkarten (NATIONAL INSTRUMENTS Lab-PC+ und AT-AO6) werden zur Ein- und Ausgabe analoger und digitaler Signale genutzt, eine weitere Karte (NATIONAL INSTRUMENTS AT-GPIB) stellt einen GPIB-Bus für den Datenaustausch mit Geräten zur Verfügung. Die letzte Karte schließlich (DATA TRANSLATION DT-3851) dient dem Einlesen und der Digitalisierung von Videosignalen („Framegrabber“, Speichertiefe 8 bit). Nahezu alle der insgesamt 12 analogen bzw. 24 digitalen Ausgänge und 8 analogen Eingänge werden dazu genutzt, externe Geräte bzw. die Parameter des Experiments zu kontrollieren. Mit diesem Rechner werden zudem Fluoreszenz- oder Absorptionsspektren von insgesamt drei asynchron triggerbaren CCD-Kameras (HITACHI KP-M1, KP-M2 und PULNIX TM-9701) eingelesen und ausgewertet. Sie dienen automatisierten Temperatur- und Teilchenzahlmessungen in beiden MOT's und der magnetischen Falle.

Gesteuert wird das System mit Hilfe eines in der Arbeitsgruppe entwickelten BORLANDC-Programms, in das die kommerziellen Programmbibliotheken der Kartenhersteller bzw. die wissenschaftliche Auswertungsbibliothek NUMERICAL RECIPES eingebunden sind. Die Taktfrequenz und die Zeitschritte des Experimentes werden mit Hilfe eines Oszillators und dreier Zähler erzeugt, die zur Ausstattung der Lab-PC+Karte gehören. Einer der Zähler teilt das 2 MHz Ausgangssignal des Oszillators auf eine Frequenz von 100 kHz herunter und erzeugt damit eine Zeitbasis von 10 μ s für die beiden anderen Zähler. Diese werden individuell programmiert und bilden eine Staffel. Bei jeder Übergabe werden I/O-Kanäle der Karten byte-weise aktualisiert.

Der zweite PC ist mit einem Framegrabber ausgestattet und wird ausschließlich zum Einlesen und zur Auswertung von Bildern eingesetzt, die in der letzten Stufe des experimentellen Zyklus aufgenommen werden. Dazu wird eine sog. „Slow-Scan“-Kamera (THETA SYSTEMS SC-99/ph) eingesetzt, die mit einer Dynamik von 30.000 : 1 (14,9 bit) spezifiziert ist. CCD-Chip (PHILIPS FT18FT, 1024 $\times$ 1024 Pixel, Pixelgröße 7,5 $\times$ 7,5 μ m²) und Framegrabber sind auf eine Speichertiefe von 14 bit abgestimmt. Die Frame-Transfer-Option erlaubt es, eine variable Anzahl von Bildzeilen sequenziell in einen On-Chip-Speicher zu schreiben, bevor das Bild von dort ausgelesen wird. Diese Option wird ausgenutzt, wenn mehrere Phasenkontrastbilder der Atomwolke in kurzem zeitlichen Abstand aufgenommen werden. Zudem lassen sich benachbarte Pixel binnen, d.h. zu einem effektiven Pixel zusammenschalten. Auf Kosten der Pixelauflösung kann auf diese Weise bei gleichbleibender Belichtung die Dynamik des Systems vergrößert werden.

Kapitel 8

Eine Atomquelle höchsten Flusses

Das Studium von Stoßlawinen kann nur an Kondensaten hoher Säulendichte gelingen. Diese lassen sich durch Verdampfungskühlung umso leichter erzeugen, je mehr Atome zuvor in die Magnetfalle überführt wurden. Die beachtliche Rate von 7×10^9 Atomen/s, mit der die UHV-MOT der Münchner Apparatur geladen wird, bietet beste Voraussetzungen für ein derartiges Vorhaben und ist das Ergebnis einer systematischen Optimierung des Doppel-MOT-Systems. Im vorliegenden Kapitel werden die Methoden beschrieben, die dabei eingesetzt wurden, sowie die empirisch ermittelten Zusammenhänge zwischen den Parametern des Systems¹.

8.1 Optimierung der Dampfzellenfalle

In einem ersten Schritt muß die Laderate der Dampfzellenfalle maximiert werden, da sie eine obere Grenze für die Laderate der UHV-MOT vorgibt. Im Hinblick darauf wurde in Kapitel 5.2 der Durchmesser der MOT-Strahlen aufgrund der Proportionalität $R \propto d^4$ als entscheidender Parameter identifiziert. Zur Argumentation war ein einfaches, eindimensionales Modellsystem herangezogen worden. Im folgenden wird sich zeigen, daß sich diese Prognose für das Zwölf-Niveau-System ^{87}Rb über einen großen Bereich von Strahldurchmessern aufrechterhalten läßt, vorausgesetzt, daß Parameter wie Intensität, Verstimmung und Feldgradient an den jeweiligen Durchmesser angepaßt werden.

8.1.1 ^{87}Rb in einer magnetooptischen Dampfzellenfalle

Zunächst sollen die Ergebnisse aus Kapitel 5.2 auf den Spezialfall von ^{87}Rb übertragen werden. Insbesondere betrifft dies die Einfanggeschwindigkeit (5.8) sowie die Raten (5.9),

¹ Die Dampfzellenfalle wurde im Rahmen von Stefan Wößners Diplomarbeit optimiert [169].

(5.14) und (5.15). Zudem muß geklärt werden, wie sich die Zeeman-Aufspaltung von ^{87}Rb , die erheblich von jener des Modellatoms abweicht, auf die Ergebnisse auswirkt.

Einfanggeschwindigkeit und Laderate

Nach Gleichung (5.8) sollte die Einfanggeschwindigkeit v_c mit dem Strahldurchmesser d zunehmen. Offenbar läßt sich diese Abhängigkeit für wachsende Durchmesser nur aufrechterhalten, wenn das Atom, wie zur Herleitung der Gleichung angenommen, während des Einfangprozesses im Mittel etwa der halben maximalen Spontankraft ausgesetzt ist. Die Einfanggeschwindigkeit läßt sich daher durch die Vergrößerung der Strahldurchmesser nur steigern, wenn gleichzeitig die Verstimmung des Lichts an d angepaßt und der MOT-Übergang durch Sättigung entsprechend verbreitert wird. Somit ist zu erwarten, daß die Intensität in diesem Zusammenhang eine quantitative Rolle spielt.

Dabei ist zu beachten, daß für den Einfang des Atoms hauptsächlich der ihm entgegen propagierende Strahl verantwortlich ist, dessen Licht im Bezugssystem des Atoms resonant erscheint. Das Licht aller anderen Strahlen wird wesentlich schwächer absorbiert, da es bezüglich der atomaren Resonanz um mindestens die Verstimmung δ rotverschoben ist, die es im Laborsystem besitzt. Solange die Strahldurchmesser klein gegen die charakteristische Dimension der Spulen sind, mit deren Hilfe das Quadrupolfeld der MOT erzeugt wird, kann in guter Näherung davon ausgegangen werden, daß Feld- und Strahlrichtung über die Ausdehnung des Strahls parallel verlaufen. Für zirkular polarisiertes Licht hätte man es dann effektiv mit einem Zwei-Niveau-System zu tun. Im Experiment liegen die beiden Dimensionen jedoch in der gleichen Größenordnung, und daher ist davon auszugehen, daß die Polarisation des Lichts bezüglich der durch das Magnetfeld vorgegebenen Quantisierungsachse während des Einfangs variiert und man es folglich mit einem Mehr-Niveau-System zu tun hat. Kann optisches Pumpen vernachlässigt werden, ist die spontane Streurrate während der Abbremsung des Atoms durch

$$n(I, \delta) = \Gamma \zeta(I/6, \delta) \quad (8.1)$$

gegeben, wo ζ die bereits in Gleichung (5.13) eingeführte Besetzung der angeregten Zustände darstellt, die hier jedoch auf die alleinige Wirkung eines Strahls zurückzuführen ist. Unter Berücksichtigung der Sättigung nimmt Gleichung (5.8) somit die Form

$$v_c \simeq \sqrt{\frac{\hbar k \Gamma}{2m}} \zeta(I/6, 0) d \quad (8.2)$$

an und führt zu der Laderate

$$R \simeq \frac{6}{16\sqrt{\pi}} \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma^2}{m^2} \frac{n_{\text{bg},87}}{v_{\text{bg}}^3} \zeta^2(I/6, 0) d^4. \quad (8.3)$$

Von der Rubidium-Partialdichte des Hintergrundgases ist lediglich der Anteil $n_{\text{bg},87} = 0,28 n_{\text{bg}}$ von ^{87}Rb zu berücksichtigen.

$\Delta m = +1$	$2 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 2$	$0 \rightarrow 1$	$-1 \rightarrow 0$	$-2 \rightarrow -1$
$\Delta\mu/\mu_B$	1	5/6	2/3	1/2	1/3
$(CGK)^2$	60	40	24	12	4
$\Delta m = 0$	$2 \rightarrow 2$	$1 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow 0$	$-1 \rightarrow -1$	$-2 \rightarrow -2$
$\Delta\mu/\mu_B$	1/3	1/6	0	-1/6	-1/3
$(CGK)^2$	20	32	36	32	20
$\Delta m = -1$	$-2 \rightarrow -3$	$-1 \rightarrow -2$	$0 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 0$	$2 \rightarrow 1$
$\Delta\mu/\mu_B$	-1	-5/6	-2/3	-1/2	-1/3
$(CGK)^2$	60	40	24	12	4

Tabelle 8.1: Die Quadrate der Clebsch-Gordan-Koeffizienten und die relativen magnetischen Momente des $5s^2S_{1/2}F_g = 2 \rightarrow 5p^2P_{3/2}F_e = 3$ -Übergangs von ^{87}Rb .

Verlustraten

Zur Verlustrate durch Stöße mit dem (dominanten) Rb-Hintergrundgas, die ebenfalls von der Einfanggeschwindigkeit abhängt, trägt, anders als im Falle der Einfangrate, die gesamte Partialdichte zu. Den Ausführungen in Kapitel 5.2.2 zufolge erwartet man für die Verlustrate den Verlauf

$$\gamma(I, \delta, n_{\text{bg}}) = \left\{ 3,36 \times 10^{-15} \frac{\text{m}^{10/3}}{\text{s}^{4/3}} \frac{1 - \zeta(I, \delta)}{v_c^{1/3}} + 9,44 \times 10^{-14} \frac{\text{m}^{11/3}}{\text{s}^{5/3}} \frac{\zeta(I, \delta)}{v_c^{2/3}} \right\} n_{\text{bg}}. \quad (8.4)$$

Die Abhängigkeit der Ratenkonstanten für lichtunterstützte Rubidium-Stöße von Intensität und Verstimmung des Fallenlichts ist von mehreren Autoren untersucht worden (siehe z.B. [170, 171, 172, 173]). Danach ist β im hier relevanten Bereich in guter Näherung unabhängig von der Verstimmung, es wird jedoch eine ausgeprägte Intensitätsabhängigkeit beobachtet, die dazu führt, daß β unter realistischen Voraussetzungen zwischen $4 \times 10^{-13} \text{ cm}^3/\text{s}$ und $2 \times 10^{-11} \text{ cm}^3/\text{s}$ variiert. Im folgenden wird die Intensitätsabhängigkeit von β nach Referenz [170] berücksichtigt.

Differentielle Zeeman-Aufspaltung

Schließlich muß beachtet werden, daß die maximale Doppler-Verstimmung der Atome wie $\delta_D = kv_c \propto \sqrt{d}$ skaliert, während ihre Zeeman-Verstimmung δ_Z beim Eintritt in das Einfangvolumen proportional mit d zunimmt. Es ist daher zu erwarten, daß die Zeeman-Aufspaltung mit zunehmendem Strahldurchmesser nicht nur bei der Speicherung sondern auch beim Einfang der Atome eine Rolle spielt. Anders als bei dem in Kapitel 5.2 betrachteten Modellsystem gibt es im magnetischen Quadrupolfeld im Falle von ^{87}Rb nicht eine, sondern fünf ortsabhängige Resonanzen zu jeder der drei Auswahlregeln. Da sich die g -Faktoren der beteiligten Hyperfeinzustände unterscheiden, tun dies auch die fünf Übergangsfrequenzen. In Tabelle 8.1 sind die relativen magnetischen Momente und die Quadrate der Clebsch-Gordan-Koeffizienten für alle Übergänge zwischen

den Zeeman-Niveaus angegeben. Vernachlässigt man erneut optisches Pumpen, so muß mit einem mittleren relativen magnetischen Moment gerechnet werden. In einfachster Näherung kann hierfür der Wert $\Delta\mu/\mu_B = 0,67$ angenommen werden, der sich durch die $(CGK)^2$ -gewichtete Mittelung aller Beiträge gleichen Vorzeichens ergibt. Für die effektive Zeeman-Verstimmung der Atome gilt dann

$$\delta_Z(r) \simeq 0,422 \frac{\mu_B}{\hbar} \frac{\partial B_z}{\partial z} r, \quad (8.5)$$

wobei hier zusätzlich das geometrische Mittel der Feldgradienten berücksichtigt wurde, die den drei Raumrichtungen entsprechen.

Anpassung von Verstimmung und Intensität an den Strahldurchmesser und den Feldgradienten

Für einen gegebenen Strahldurchmesser hängt die Laderate mit der Verstimmung, der Intensität, dem Feldgradienten und der Dichte des Hintergrundgases von so vielen Parametern ab, daß es auf den ersten Blick hoffnungslos erscheinen mag, Prognosen für einen optimalen Parametersatz abzugeben. Es zeigt sich jedoch, daß alle Parameter aneinander gekoppelt sind und ihre Optimierung infolgedessen wesentlich einfacher ist, als man zunächst annimmt.

Verstehen läßt sich dies in einem einfachen Bild: Bei der Abschätzung der Einfanggeschwindigkeit war eine mittlere Spontankraft (bzw. Beschleunigung) angesetzt worden. Es ist jedoch intuitiv verständlich, daß es im Hinblick auf eine möglichst hohe Einfanggeschwindigkeit günstig ist, die Abhängigkeit der Spontankraft von Ort und Geschwindigkeit durch eine entsprechende Wahl der Parameter so zu gestalten, daß die Streurrate etwa dort maximal ist, wo das Atom mit der Geschwindigkeit v_c in das Einfangvolumen eintritt. Zur Verstimmung des Atoms bezüglich des ihm entgegenpropagierenden Strahls tragen dann der Doppler- und der Zeeman-Effekt mit unterschiedlichem Vorzeichen bei. Nähert sich das Atom dem Fallenzentrum und wird dabei langsamer, nehmen zwar beide Beiträge im Betrag schnell ab, kompensieren sich jedoch nach wie vor zumindest teilweise. Dann verhält sich die MOT wie ein sog. „Zeeman-Slower“, in dem es auf ähnliche Weise gelingt, die Absorption des Atoms über breite Geschwindigkeits- und Ortsbereiche aufrechtzuerhalten. Mit (8.2) und (8.5) erwartet man dann für die optimale Verstimmung δ des MOT-Lichts bezüglich der Resonanz des ruhenden Atoms²:

$$\begin{aligned} \delta &\simeq \delta_D - \delta_Z - \alpha\Gamma \\ &\simeq k\sqrt{\frac{\hbar k\Gamma}{2m}} \zeta(I/6, 0) d - 0,422 \frac{\mu_B}{\hbar} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{d}{2} - \alpha\Gamma. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Mit dem zusätzlichen Term $\alpha\Gamma$ wird berücksichtigt, daß im Falle einer Resonanz bei $d/2$ und v_c nur die halbe Breite des Absorptionsprofils zur Abbremsung des Atoms genutzt werden könnte. Soll die volle Breite zur Verfügung stehen, muß das Atom beim Eintritt

² Aus Gründen der Einfachheit wird mit δ im folgenden der Betrag der Verstimmung bezeichnet.

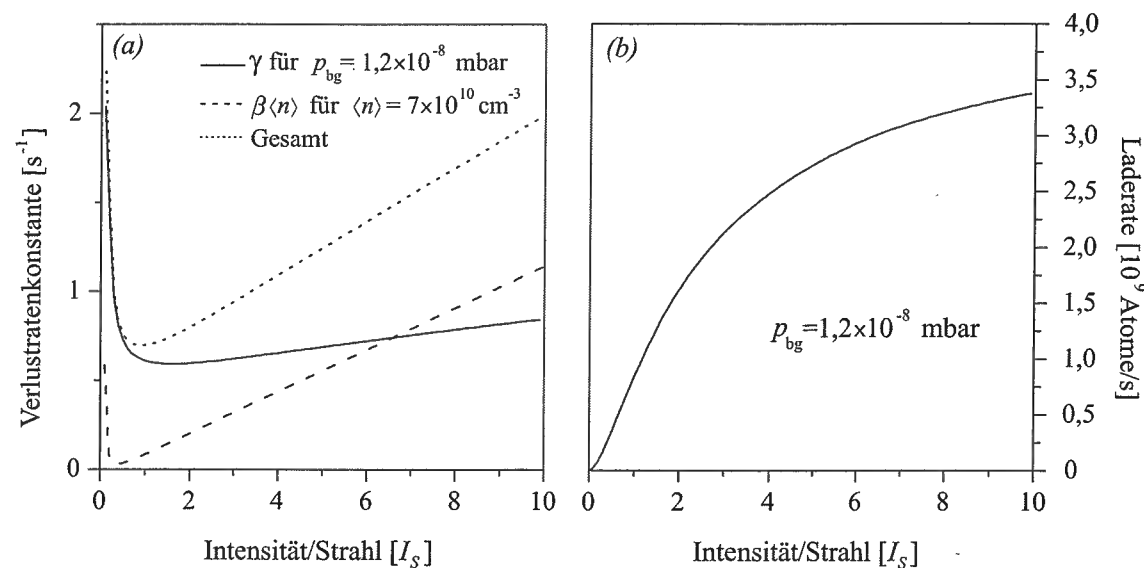


Abbildung 8.1: Erwartete Abhängigkeit der relativen Verluste $\dot{N}/N$ und der Einfangrate von der Intensität pro Strahl. Der Verlauf der Ratenkonstante β ist Referenz [170] entnommen.

in das Einfangvolumen Licht ausgesetzt sein, daß um etwa eine volle Linienbreite effektiv blauverstimmt ist ($\alpha \approx 1$).

Gleichung (8.6) verknüpft den Strahldurchmesser mit dem Feldgradienten, der Intensität und der Verstimmung. Im Experiment wird der Strahldurchmesser vorgegeben. Den obigen Überlegungen zufolge wäre es für den Einfangprozeß am günstigsten, wenn sich beim Eintritt des Atoms in das Einfangvolumen die Doppler- und Zeeman-Verstimmungen fast kompensieren. Da sie dies im Fallenzentrum mit $v \approx 0$ und $r \approx 0$ in jedem Falle tun, wäre dann in guter Näherung für eine über v und r konstante Absorptionsrate bei insgesamt geringer Verstimmung gesorgt. Diese wäre auch im Hinblick auf eine niedrige Temperatur der Wolke günstig (vgl. Gleichung (5.4)). Eine geringe Verstimmung bei zugleich hohem Gradienten würde allerdings zu einer hohen Dichte und infolgedessen auch hohen Verlusten führen und somit keinen günstigen Parametersatz im Hinblick auf die Gleichgewichtsteilchenzahl darstellen. Aus technischen Gründen wird im Experiment darauf verzichtet, den Gradienten über 13 G/cm hinaus zu erhöhen. Bis zu diesem Wert wird eine systematische Zunahme der Einfangrate und der Gleichgewichtsteilchenzahl mit dem Gradienten beobachtet. Liegt auch $\partial B_z/\partial z$ fest, bleiben in dem naiven Modell (8.6) allein Wertepaare von δ und I frei wählbar (sofern α näherungsweise konstant bleibt).

Es ist jedoch zu erwarten, daß es für die Intensität einen optimalen Wert gibt, der die Freiheit der Parameterwahl weiter einschränkt. Dies ist anhand von Abbildung 8.1 zu erkennen, wo die Verläufe der Verlustraten und der Laderate über die Strahlintensität aufgetragen sind. Dabei wurden mit $n_{bg} = p_{bg}/(k_B T) \approx 3 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$, $\langle n \rangle \approx 7 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, $\partial B_z/\partial z = 13 \text{ G/cm}$ und $d = 2,1 \text{ cm}$ für das Experiment typische Parameter gewählt, die jedoch keine Auswirkungen auf den prinzipiellen Verlauf der Kurven haben. Die (unbekannten, jedoch gering zu erwartenden) Abhängigkeiten der dichtegemittelten

Dichte von Intensität und Teilchenzahl wurden vernachlässigt. In die Ratenkonstante γ geht die Abhängigkeit der Verstimmung von der Intensität ein. Da diese Abhängigkeit in dem dargestellten Intensitätsbereich Werte von bis zu $\delta \approx 2\pi \times 30 \text{ MHz}$ vorschreibt, sättigt die Besetzung angeregter Zustände (und mit ihr γ) erst oberhalb von $10 I_s$. Daß beide Verlustraten mit der Intensität zunächst abnehmen, ist darauf zurückzuführen, daß die Einfanggeschwindigkeit (bzw. die Potentialtiefe) in diesem Intensitätsbereich schnell ansteigt. Die Einfangrate sättigt früher als γ , weil R von der spontanen Streurrate auf Resonanz abhängt. Verluste durch lichtunterstützte Stöße sättigen nicht und nehmen oberhalb von $I \approx 0,5 I_s$ linear mit der Intensität zu. Danach sollte die Gleichgewichtsteilchenzahl bei einer bestimmten Intensität maximal werden, die durch

$$\frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{R(I)}{\gamma(I) + \beta(I)\langle n_\infty \rangle} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.7)$$

gegeben ist. Gleichung (8.7) bringt die Dichte des Hintergrundgases n_{bg} ins Spiel, zu der R und γ proportional sind. Die optimale Intensität ist offenbar dann erreicht, wenn Verluste durch lichtunterstützte Stöße zu dominieren beginnen. Ihr Wert läßt sich stets durch eine Vergrößerung der Hintergrundgasdichte steigern. Für einen gegebenen Wert von n_{bg} liegen jedoch alle Parameter fest.

Es ist nicht zu erwarten, daß diese einfachen Überlegungen ihre Gültigkeit – wenn überhaupt – über den vollen Wertebereich der Parameter behalten. Zudem ist eine MOT empfindlich von der Justage, der Polarisationsreinheit, dem Profil und dem Intensitäts-gleichgewicht der Strahlen abhängig, so daß stets mit quantitativen Abweichungen zu rechnen ist. Überraschenderweise ist jedoch die Übereinstimmung mit dem Experiment im untersuchten Parameterbereich erstaunlich gut.

8.1.2 Test der Vorhersagen

Ziel ist es, die d^4 -Abhängigkeit der Laderate und der Gleichgewichtsteilchenzahl im Experiment so gut wie möglich zu realisieren, um die Möglichkeiten voll zu nutzen, die sich aus dem Einsatz des Ti:Sa-Lasersystems und großer Optik ergeben. Dazu wurden R und N_∞ für mehrere Strahldurchmesser zwischen 1 und 2,6 cm durch eine systematische Variation von $\partial B_z/\partial z$, I und δ optimiert. Im folgenden ist das Verfahren am Beispiel eines Gradienten von 13 G/cm erläutert, der zu den besten Ergebnissen geführt hat. Da es sich hierbei um den höchsten der für $\partial B_z/\partial z$ gewählten Werte handelt, ist davon auszugehen, daß höhere Gradienten zu besseren Ergebnissen führen. Die Variation des Strahldurchmessers erfolgte mit Hilfe von Irisblenden. Da die ursprüngliche Strahltaile signifikant größer als der Blendendurchmesser präpariert wurde, dient letzterer als Maß für d . Die Intensität der Strahlen ergibt sich aus ihrer Leistung P und der Fläche A der Blendenapertur gemäß $I = P/A$.

Die Werte von R und N_∞ wurden jeweils aus Teilchenzahlmessungen durch optisches Pumpen ermittelt (vgl. Kapitel 6), die nach variabler Ladezeit durchgeführt und zur Aufzeichnung der Ladekurven eingesetzt wurden. Eine solche Kurve ist für $d = 2,1 \text{ cm}$ in

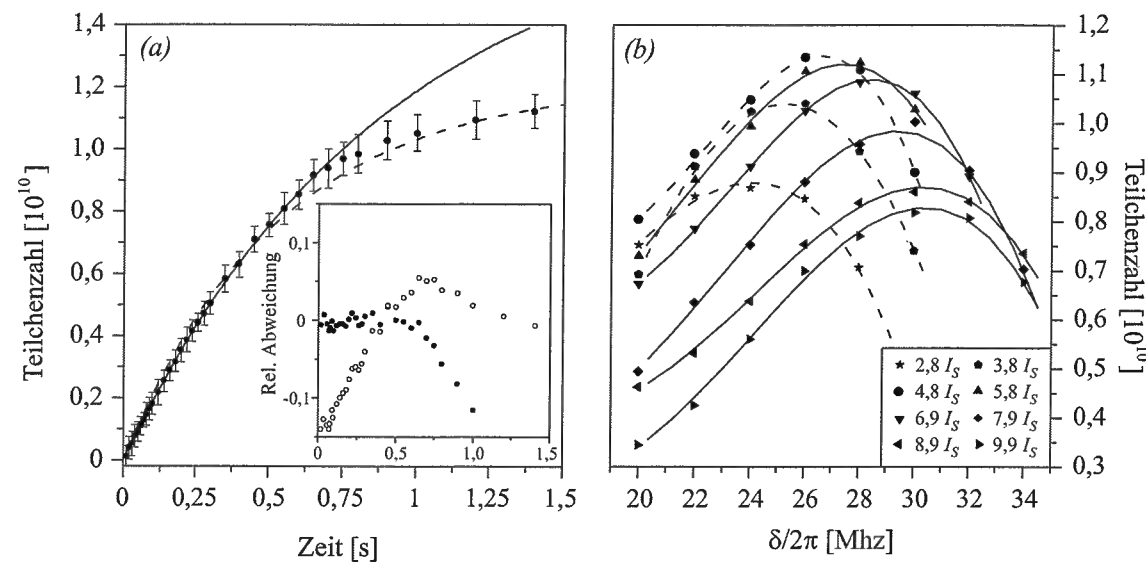


Abbildung 8.2: (a): Ladekurve der MOT bei $d = 2,1$ cm und Abweichung von exponentiell sättigenden Verläufen über die gesamte Ladezeit (gestrichelte Kurve und Kreise) bzw. deren erste 0,6 s (durchgezogene Kurve und Punkte). Optimale Werte für Verstimmung und Intensität ergeben sich aus der in (b) dargestellten Messung.

Abbildung 8.2(a) dargestellt³. Wären beide Verluste unabhängig von N , sollte die Teilchenzahl exponentiell sättigen. Daß dies nicht der Fall ist, läßt sich anhand der Abweichung von der gestrichelt dargestellten Kurve erkennen, die im Inlet durch Kreise dargestellt ist und ein Indiz dafür darstellt, daß mit der Teilchenzahl $\langle n \rangle$ zu- oder R abnimmt. Wahrscheinlich ist Beides (vgl. Kapitel 5.2.2). Als Maß für die relativen Verluste $1/(\gamma + \beta\langle n \rangle)$ werden im folgenden die Zeitkonstanten τ jener exponentiellen Ladekurven gewählt, die sich über die längste Ladezeit ohne nennenswerte Abweichung an die Daten anpassen lassen (durchgezogene Kurve bzw. Punkte im Inlet). Die optimalen Werte für Intensität und Verstimmung ergeben sich aus den in Abbildung 8.2(b) dargestellten Kurvenscharen. Jede Kurve entspricht dem experimentell ermittelten Verlauf der Gleichgewichtsteilchenzahl als Funktion der Verstimmung für eine feste Strahlintensität. Optimal ist jenes Wertepaar, für das die Teilchenzahl maximal wird. Die Kurven steigen bis zu ihrem Maximum systematisch langsamer an als sie jenseits davon wieder abfallen. Ein solcher Verlauf ist in der Tat zu erwarten, da die Verstimmung die Geschwindigkeit v_R festlegt, bei der sich die Atome mit dem Licht in Resonanz befinden. In dem Boltzmann-verteilten Hintergrundgas kommen mit abnehmender Verstimmung immer weniger Atome zum Einfang in Frage. Somit sollte die Teilchenzahl bei kleinen Verstimmungen wie $N_\infty \propto v_R^2 \propto \delta^2$ zunehmen. Ist die Verstimmung hingegen zu hoch, werden zwar schnellere Atome angesprochen, die jedoch auf der zur Verfügung stehenden Strecke von etwa $d/2$ nicht ausreichend abgebremst werden, um gespeichert zu bleiben. In der Abnahme der Teilchenzahl macht sich somit die endliche Linienbreite der Atome bemerkbar, wonach in diesem Bereich $N_\infty \propto 1/\delta^2$ zu erwarten wäre.

³ Wie auch im Falle aller folgenden Datensätze sind die Fehlerbalken statistischen Ursprungs.

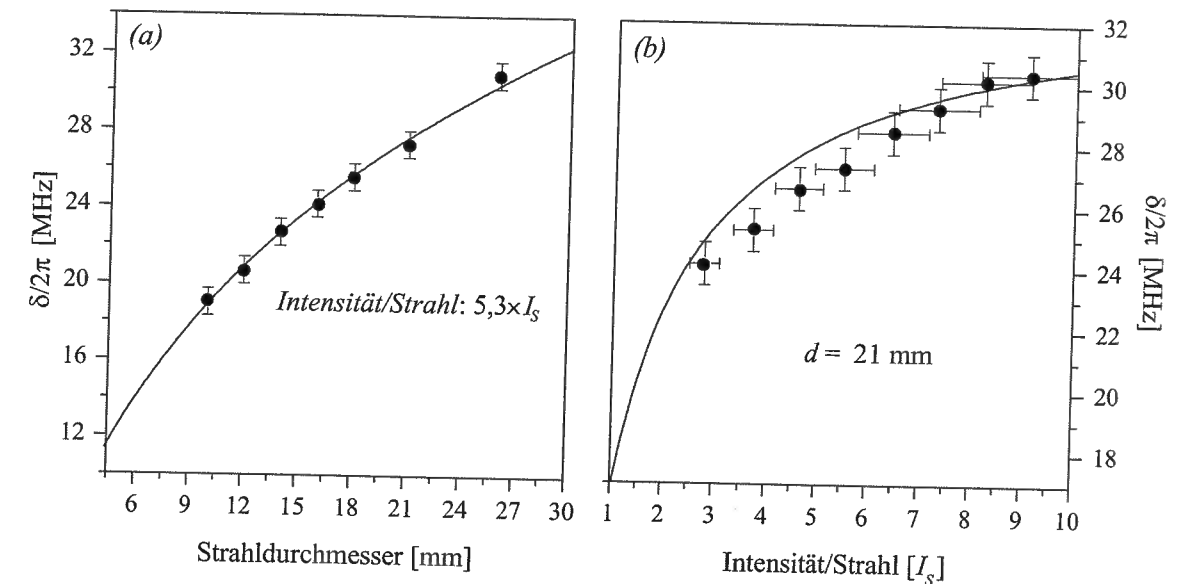


Abbildung 8.3: Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den Vorhersagen nach Gleichung (8.6) mit $\alpha = 1$. (a): Optimale Verstimmung des Lichts in Abhängigkeit des Durchmessers bei fester Intensität. (b): Wertepaare von I und δ , bei denen die Kurven in Abbildung 8.2(b) ihre Maxima erreichen.

In Abbildung 8.3(a) ist die optimale Verstimmung des MOT-Lichts als Funktion des Strahldurchmessers für eine feste Intensität aufgetragen, wobei die durchgezogene Kurve der Vorhersage nach Gleichung (8.6) mit $\alpha = 1$ entspricht. Die gute Übereinstimmung mit den Daten bestätigt die prognostizierte Abhängigkeit vom Strahldurchmesser und mit ihr die Annahme, daß der Zeeman-Effekt auch beim Einfang der Atome eine wichtige Rolle spielt. In Anbetracht der Einfachheit des Modells wird auch die Intensitätsabhängigkeit der Verstimmung durch Gleichung (8.6) gut antizipiert, wie in Abbildung 8.3(b) zu erkennen ist. Sieht man davon ab, daß eine in gewissen Grenzen willkürlich gemittelte Intensität zur Auswertung herangezogen wurde, ist die systematische Abweichung der Kurvenform hier jedoch ein Indiz dafür, daß die Resonanzabsorptionsrate des Atoms geringfügig anders sättigt, als dies durch die Relation (5.13) vorhergesagt wird. Das bedeutet, daß während des Einfangprozesses optisches Pumpen eine Rolle spielt. Die insgesamt gute Übereinstimmung des einfachen Modells mit den Daten spricht allerdings dafür, daß die Abschätzung der Einfanggeschwindigkeit nach Gleichung (8.2) quantitative sinnvolle Werte liefert.

Es stellt sich daher die Frage, inwieweit dies auch für die Vorhersagen für R und N_∞ gilt. In beide Größen geht zusätzlich n_{bg} , in die Gleichgewichtsteilchenzahl auch $\langle n \rangle$ ein. Außerdem spielt hier die Oberfläche des Einfangvolumens eine quantitative Rolle. Die dichtegemittelte Dichte der Wolke läßt sich aus ihrer Gleichgewichtsteilchenzahl und ihrer prinzipiellen Dichteverteilung bestimmen. Letztere kann näherungsweise aus Fluoreszenzbildern der Wolke gewonnen werden (vgl. Kapitel 6.1). Auf diese Weise ergibt sich typischerweise der Wert $\langle n \rangle \approx 7 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Die Dichte des Hintergrundgases kann nun grob durch den Vergleich der theoretischen Zeitkonstanten $(\gamma + \beta\langle n \rangle)^{-1}$ mit den für τ ermittelten Werten abgeschätzt werden. Die durchgezogene Kurve in Abbildung 8.4(a)

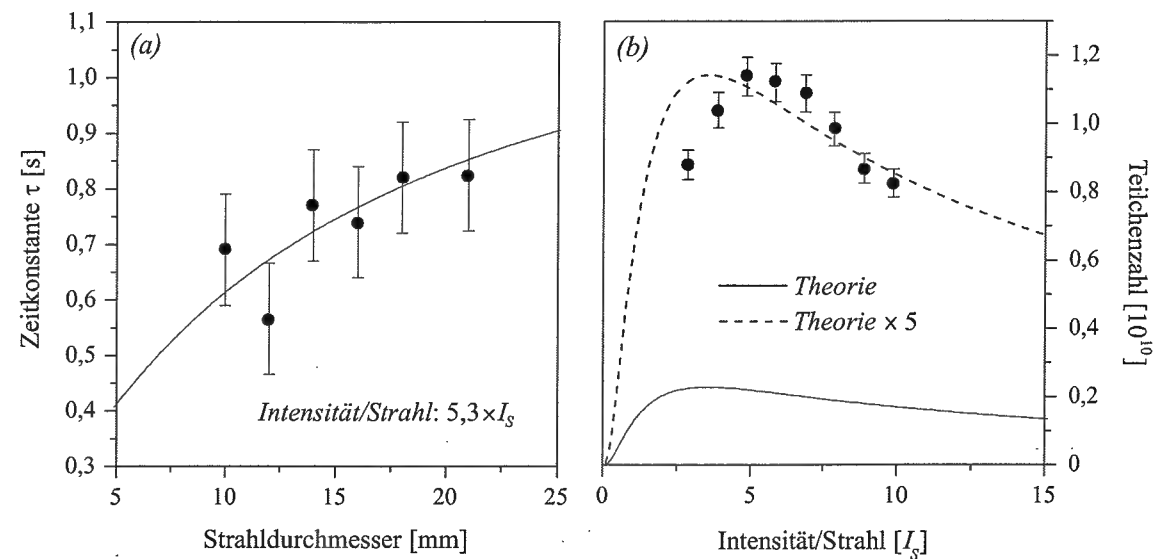


Abbildung 8.4: (a): Den exponentiellen Bereich der Ladekurven charakterisierende Zeitkonstante in Abhängigkeit des Strahldurchmessers. Die durchgezogene Kurve entspricht dem Verlauf von $1/(\gamma + \beta\langle n \rangle)$ für $p_{bg} = 1,2 \times 10^{-8}$ mbar und $\langle n \rangle = 7 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. (b): Auf diesen Parametern beruhende Vorhersage der Gleichgewichtsteilchenzahl in Abhängigkeit der Intensität, im Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen.

entspricht $n_{bg} = 3 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$ bzw. einem Rubidium-Partialdruck von $1,2 \times 10^{-8}$ mbar und bestätigt zudem die beobachtete Tendenz einer Zunahme der Zeitkonstanten mit dem Strahldurchmesser. Mit diesem Wert läßt sich nach Gleichung (5.17) eine Prognose für die Gleichgewichtsteilchenzahl abgeben, die in Abbildung 8.4(b) mit den Daten verglichen wird. Eventuelle Fehler in der Ermittlung von n_{bg} oder $\langle n \rangle$ sind zu klein, um die fünffache Unterschätzung der Teilchenzahl zu erklären. Da die Autoren in Referenz [170] die Ratenkonstante β mit einem Fehler von höchstens 40 % angeben, ist anzunehmen, daß die Abweichung durch eine falsche Bestimmung der Laderate zustandekommt. Angesichts der quantitativen Aussagekraft von Gleichung (8.2), die weiter oben konstatiert wurde, ist jedoch das Ansetzen einer um 45 % höheren Einfanggeschwindigkeit nicht zulässig. Somit ist davon auszugehen, daß der Fehler zum größten Teil auf die unterschätzte Oberfläche des Einfangvolumens zurückzuführen ist, das damit größer als das Schnittvolumen der Laserstrahlen sein muß. Immerhin stimmen Beobachtung und Erwartung zumindest qualitativ darin überein, daß es im Hinblick auf die Maximierung der Teilchenzahl eine optimale Intensität gibt.

Die Optimierung der MOT-Parameter auf der Grundlage von Gleichung (8.6) führt zu den in Abbildung 8.5 dargestellten Verläufen der Laderate und der Teilchenzahl als Funktion des Strahldurchmessers zur vierten Potenz. In dem untersuchten Bereich läßt sich offenbar die angestrebte lineare Abhängigkeit realisieren. Nach dem Entfernen der Irisblenden ist der Strahldurchmesser durch die Aperturen der Polarisationsoptik begrenzt und beträgt etwa 2,6 cm ($d^4 \approx 45,7 \text{ cm}^4$). Durch einmaliges Verflüssigen des Rubidium-Stückchens wurde dessen Oberfläche vergrößert, so daß der aktuelle Rb-Partialdruck um etwa 30 %

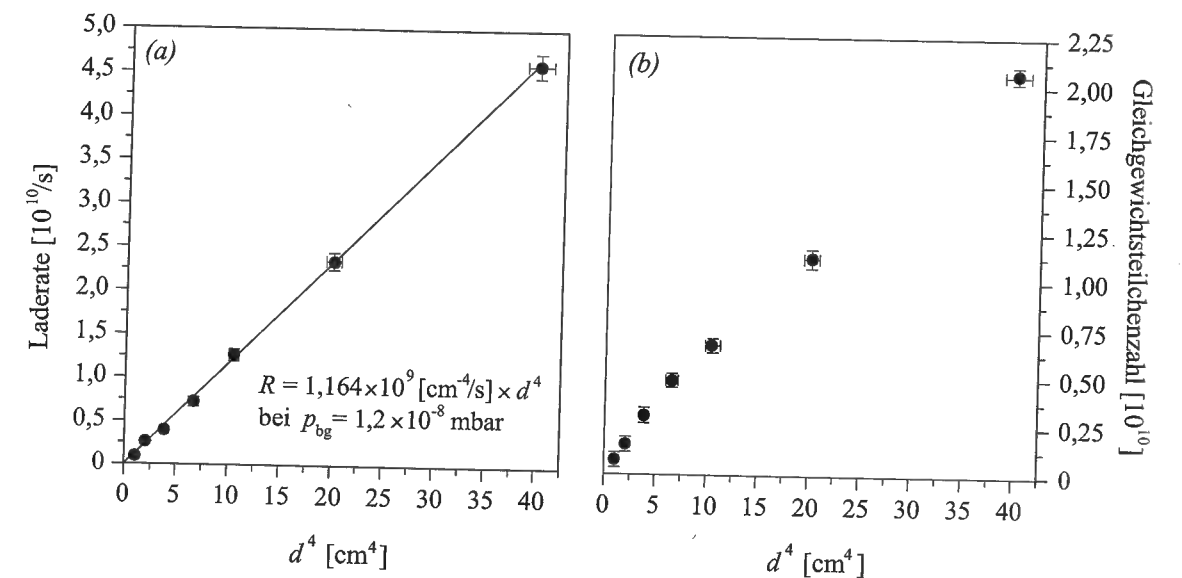


Abbildung 8.5: Optimierte Laderate (a) und Teilchenzahl (b) jeweils als Funktion des Strahldurchmessers zur vierten Potenz.

höher liegt als während der weiter oben diskutierten Messungen. Unter diesen Voraussetzungen wird die Dampfzellenfalle mit einer beachtlichen Rate von $R_{\max} \approx 7 \times 10^{10}$ Atomen/s geladen, ohne daß ein Heizen des Rubidium-Reservoirs erforderlich wäre, welches Auswirkungen auf den Druck im UHV-Bereich hätte. Im Gleichgewicht faßt die MOT zur Zeit $2,5 \times 10^{10}$ Atome und hat, wie Abbildung 8.6 zu entnehmen ist, eine beachtliche Größe.

8.1.3 Temperatur und Polarisationsgradientenkühlen

Der einfachen Abschätzung (5.4) zufolge wäre unter den obigen Lichtverhältnissen eine Wolkentemperatur in der Größenordnung von $700 \mu\text{K}$ zu erwarten. Mit knapp $500 \mu\text{K}$ liegt die gemessene Temperatur zwar tiefer (vgl. Abbildung 6.2 in Kapitel 6.1), entspricht jedoch immer noch einer verhältnismäßig breiten Geschwindigkeitsverteilung mit $\sigma_v \approx 20 \text{ cm/s}$. Dem muß Rechnung getragen werden, soll die Temperatur der Wolke in einer anschließenden Melassenkühlphase reduziert werden. Ein solcher Schritt kann unter Umständen im Hinblick auf die Optimierung der Transfereffizienz in die UHV-MOT sinnvoll sein, wäre aber auch nötig, betriebe man die UHV-MOT selbst unter ähnlichen Bedingungen. Ist die Einfanggeschwindigkeit der Melasse kleiner als σ_v , wird lediglich ein Subensemble gekühlt. Insbesondere im Falle der UHV-MOT kann dies zum Problem werden, da die Wolke hier unmittelbar nach der Kühlung in die Magnetfalle überführt wird. Da auch die „heißen“ Atome eingefangen werden, kann die Temperatur nach der Thermalisierung erheblich höher liegen als jene des gekühlten Subensembles.

In Abbildung 8.7 wird deutlich, daß auch verhältnismäßig heiße Wolken in einer optischen Melasse effizient gekühlt werden können, vorausgesetzt, daß die Lichtparameter während der Kühlzeit variiert werden. Aufgetragen ist die Anzahl der Atome, die sich nach einer



Abbildung 8.6: Blick durch eines der CF-16-Fenster auf die Wolke von etwa $2,5 \times 10^{10}$ fluoreszierenden Rubidiumatomen.

Kühlzeit von 10 ms in einem vorgegebenen Detektionsbereich befinden, in Abhängigkeit der Endtemperatur. Diese ergibt sich aus der Expansionsdynamik des Subensembles (vgl. Kapitel 6.1). Bei langen Expansionszeiten läßt sich dessen Ortsbreite aus Fluoreszenzbildern bestimmen, da sich hier die wesentlich breitere Verteilung der „heißen“ Atome fast ausschließlich als Untergrund bemerkbar macht. Zum integrierten Fluoreszenzsignal tragen jedoch auch letztere bei, sofern sie sich zur Zeit des Nachweises im Detektionsbereich befinden. Als Maß für die Teilchenzahl des kalten Subensembles ist als Ordinate das Fluoreszenzsignal relativ zum Signal einer ungekühlten Wolke nach der gleichen Expansionszeit aufgetragen, also relativ zum kleinstmöglichen Signal. Die Verstimmung der Melasse betrug für beide Datensätze $2\pi \times 47$ MHz, die Intensität wurde jedoch in einem Falle konstant gehalten, im anderen beginnend von $20 I_S$ kontinuierlich über die Dauer der Kühlzeit reduziert. Erwartungsgemäß zeigt sich (siehe Gleichung (5.18)), daß die erzielte Temperatur in beiden Fällen allein durch den Endwert der Intensität gegeben ist und linear mit diesem abnimmt⁴. Bei der Kühlung mit konstanter Intensität werden unterhalb von etwa $16 I_S$ zunehmend weniger Atome in der Melasse eingefangen. Damit läßt sich die Temperatur mit dieser Methode lediglich bis auf ca. $80 \mu\text{K}$ reduzieren. Mit Hilfe der Intensitätsrampe gelingt es hingegen, die Temperatur von etwa $15 \mu\text{K}$ mit nahezu allen Atomen zu erreichen.

Der einfachen Abschätzung (5.20) nach, ist eine Streurate von ca. 2,6 MHz erforderlich, soll für die Einfanggeschwindigkeit der Melasse $v_c \approx 20$ cm/s gelten. Wird die Besetzung angeregter Zustände durch (5.13) genähert, so entspricht obiger Streurate eine Intensität von etwa $40 I_S$, gut das Doppelte des beobachteten Grenzwertes. In Anbetracht der Einfachheit des (eindimensionalen) Modells ist diese Übereinstimmung akzeptabel.

⁴ Auf der oberen Abszissenachse ist der Endwert der Intensität pro Strahlenpaar aufgetragen, der sich aus deren Leistung durch Mittelung über die Wolkenausdehnung ergibt.

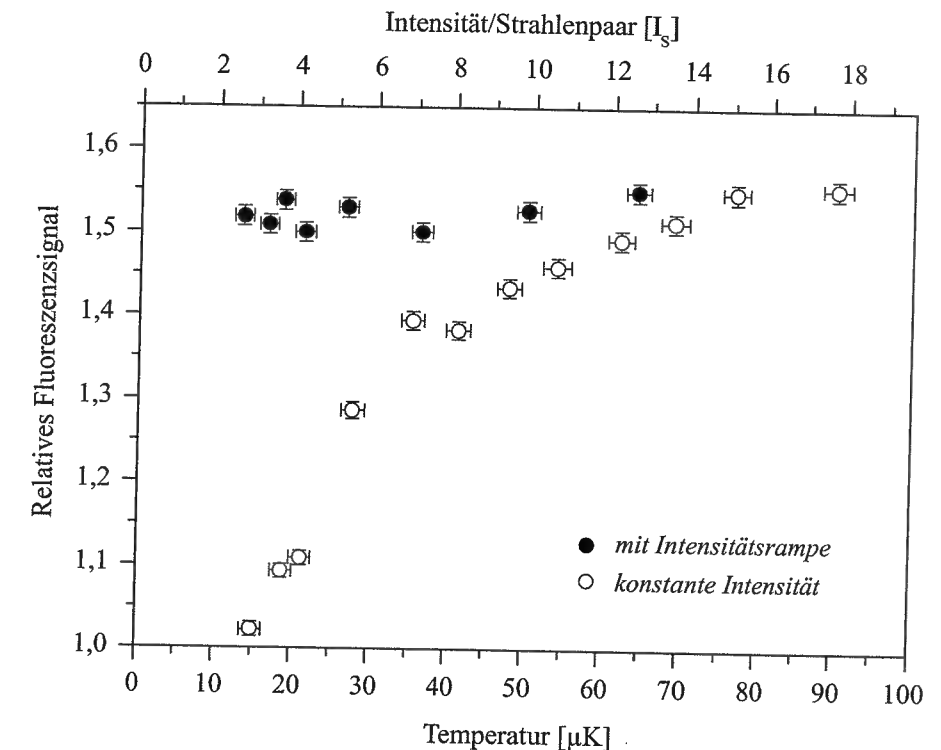


Abbildung 8.7: Relative Anzahl detektierter Atome in Abhängigkeit der Temperatur nach 10 ms Polarisationsgradientenkühlen bei konstanter bzw. kontinuierlich abnehmender Intensität. Die Messung wurde mit Wolken von etwa 5×10^9 Atomen durchgeführt.

8.2 Optimierung des Transfers im Doppel-MOT-System

Wie bereits in Kapitel 5.3 erläutert, erfolgt der Transfer von Atomwolken in die UHV-MOT durch ihre Beschleunigung mit Hilfe eines nahresonanten Laserstrahls. Sein Durchmesser entspricht in etwa jenem der differentiellen Pumpstrecke. Der Strahl ist außerdem so justiert, daß er die in der UHV-MOT gespeicherte Wolke knapp verfehlt. Um die optimalen Transferparameter zu bestimmen, wurde als Kriterium die Teilchenzahl herangezogen, die sich nach einem Transferzyklus in der UHV-MOT befindet. Im Experiment erfolgt die Optimierung durch die systematische Variation der Dauer, der Intensität und der Verstimmung des Beschleunigungspulses einerseits und der Ladezeit der Dampfzellenfalle andererseits.

Zwei Maßnahmen haben sich im Hinblick auf eine hohe Transfereffizienz allgemein als wichtig erwiesen: Zum ersten wird während der Beschleunigung zwar das Quadrupolfeld der Dampfzellenfalle, nicht aber ihr Licht abgeschaltet. Die MOT-Strahlen bilden dann eine optische Melasse und bewirken sowohl während als auch nach der Beschleunigung eine transversale Kühlung der Atome. Dadurch werden die Anfangstemperatur der Wolke reduziert und ihre Aufheizung während der Beschleunigung teilweise rückgängig gemacht. Auf diese Weise erreichen etwa dreimal mehr Atome die UHV-MOT als im Falle einer

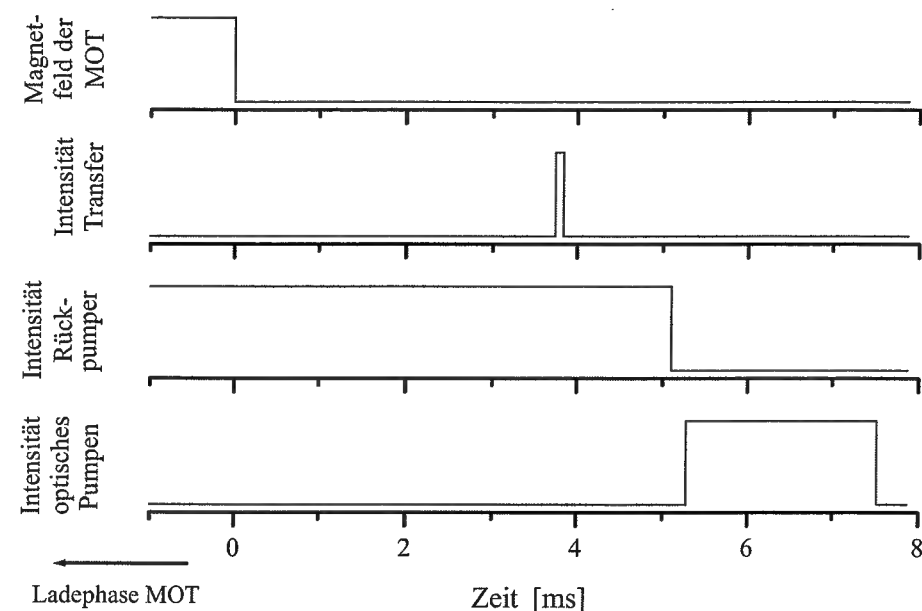


Abbildung 8.8: Zeitlicher Ablauf der Beschleunigungssequenz.

Beschleunigung in Abwesenheit der Melasse. Zum zweiten werden die Atome unmittelbar nach der Beschleunigung optisch in den tieferen der beiden Hyperfeingrundzustände gepumpt. Dadurch wechselwirken sie mit den vertikalen Strahlen der UHV-MOT erst im Einfangbereich der Falle und können außerdem auch nicht das (intensive!) Fluoreszenzlicht bereits überführter Atome absorbieren. Trotzdem ist dieser „Sonnenwind“ der UHV-MOT, in dem sich auch Rückpump photons befinden, mit großer Wahrscheinlichkeit dafür verantwortlich, daß ihre Laderate mit der Anzahl bereits überführter Atome abnimmt. Einen Hinweis darauf liefert die Tatsache, daß die Ladezeit der UHV-MOT mit ca. 0,7 s etwa zehnmal kürzer als ihre Lebensdauer ist. Blicke die Laderate R konstant, müßten die beiden Zeitkonstanten gleich sein, wie sich anhand von Gleichung (5.16) erkennen läßt.

Abbildung 8.8 zeigt den optimalen zeitlichen Verlauf der entscheidenden Parameter während der Beschleunigungsphase. Unter diesen Voraussetzungen errechnet sich aus der Flugzeit der Atomwolke eine Geschwindigkeit von knapp 7 m/s, die wesentlich geringer als die Einfanggeschwindigkeit der UHV-MOT ist. Der Beschleunigungspuls ist linear polarisiert, hat eine Dauer von knapp 100 μ s und eine beachtliche Leistung von 30 mW. Sie ist einerseits das Ergebnis der optischen Dichte der Wolke und andererseits durch die Bremswirkung der optischen Melasse bedingt. Es hat sich gezeigt, daß die Polarisation des Beschleunigungslasers keine Auswirkungen auf die Transfereffizienz hat. Die Laderate der UHV-MOT wird maximal, wenn die Ladezeit der Dampfzellenfalle etwa 100 ms beträgt. Bei kürzeren Ladezeiten ist sie durch die endliche Flugdauer der Atomwolken begrenzt, bei höheren durch ihre Transfereffizienz. Letztere beträgt bei einer Ladezeit der Dampfzellenfalle von 100 ms zur Zeit etwa 15 % und ist mit hoher Wahrscheinlichkeit durch die Ausdehnung der Wolke begrenzt. Es ist zu erwarten, daß sich die Transfereffizienz durch die Kompression der Wolke in der Dampfzellenfalle unmittelbar vor der Beschleu-

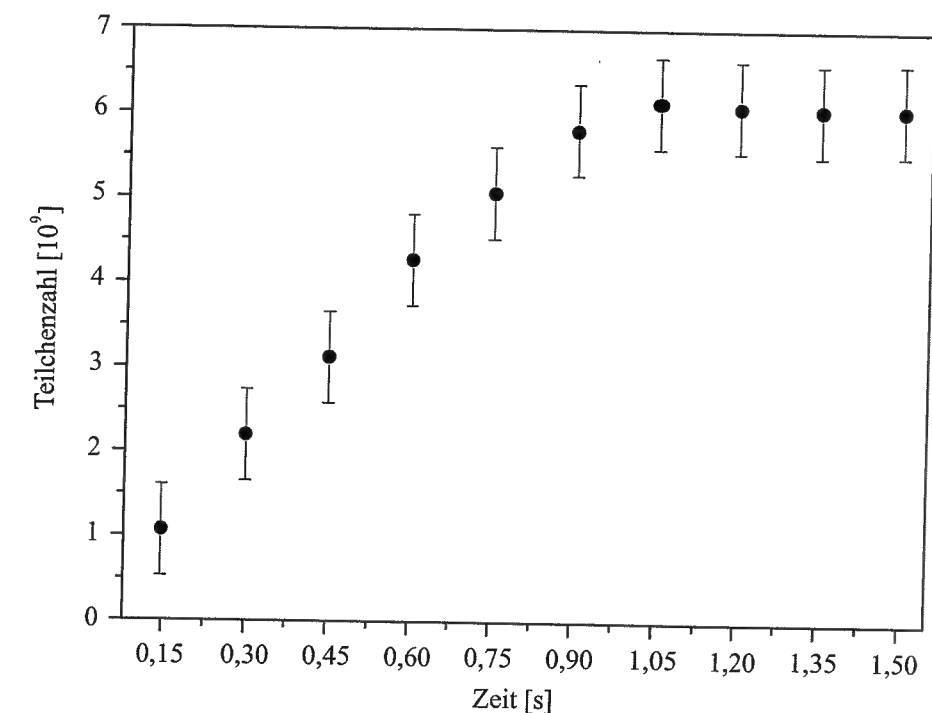


Abbildung 8.9: Ladekurve der UHV-MOT. Jeder Datenpunkt entspricht einem Transferzyklus.

nigungssequenz steigern läßt. Auf diese Maßnahme wurde bisher jedoch verzichtet, da die Ladezeit der UHV-MOT bereits unter aktuellen Bedingungen keinen Einfluß auf die Repetitionsrate hat, mit der Kondensate erzeugt werden. Wie Abbildung 8.9 zu entnehmen ist, wird die UHV-MOT zur Zeit mit einer Rate von etwa 7×10^9 Atomen/s geladen⁵. Nach etwa 1,5 s wird eine Gleichgewichtsteilchenzahl von 6×10^9 erreicht.

⁵ Die Betriebsparameter der UHV-MOT sind Tabelle 5.2 in Kapitel 5.3 zu entnehmen.

Kapitel 9

Charakterisierung des Kondensats

9.1 Der Phasenübergang

Nicht allein um fundamentale Vorhersagen zu testen, sondern auch zur Bestimmung bzw. „Eichung“ wichtiger Systemparameter bietet es sich an, den Phasenübergang quantitativ zu charakterisieren. Dazu werden Absorptionsbilder der Wolke nach einer freien Expansionsphase ausgewertet. Im Hinblick auf eine davon unabhängige Bestimmung der Gesamtteilchenzahl wird die Wolke unmittelbar nach der Bildaufnahme in der UHV-MOT eingefangen. Mit Hilfe eines Photomultipliers wird dabei ihre Fluoreszenz aufgezeichnet. Da sich nun in der MOT vergleichsweise wenige Atome befinden, besteht die Hoffnung, daß das Fluoreszenzsignal in guter Näherung proportional zur Teilchenzahl ist.

Eine Serie von Absorptionsbildern ist in Abbildung 9.1 dargestellt. Nach einer Expansionszeit von 20 ms und bei einer Detektionsverstimmung von $2\pi \times 6$ MHz läßt sich die optische Dichte der Wolke mit dem eingesetzten Detektionssystem auflösen (vgl. Kapitel 6.3). Um ein besseres Signal-zu-Rausch-Verhältnis zu erreichen, werden in der Regel nicht Schnitte durch das Intensitätsminimum sondern die Verteilungen ausgewertet, die sich durch Integration der Säulendichte entlang einer der beiden Koordinatenachsen ergeben. Die interessanten thermodynamischen Größen werden dann durch Anpassung der Funktionen (6.9) an die Daten ermittelt.

Um aus der Breite des expandierten Kondensats auf seine ursprüngliche Ausdehnung und damit auf seine Teilchenzahl zurückzuschließen, wird die Expansionsdynamik (4.21) als bekannt vorausgesetzt. In der Tat sind Messungen zur Expansion des Kondensats, die in Konstanz durchgeführt und in Referenz [104] publiziert wurden, in guter Übereinstimmung mit der Theorie. Während sich also die Anzahl kondensierter Atome verhältnismäßig genau aus der vollen Breite der TF-Parabel bestimmen läßt (Gleichungen (4.11) und (4.21)), ist im Bereich $T < T_c$ damit zu rechnen, daß einerseits T mit einem systematischen Fehler behaftet ist und andererseits die Beziehung (2.19) keinen akkuraten Wert für N_T liefert. Dies ist darin begründet, daß die Verteilung nichtkondensierter Teilchen aufgrund der

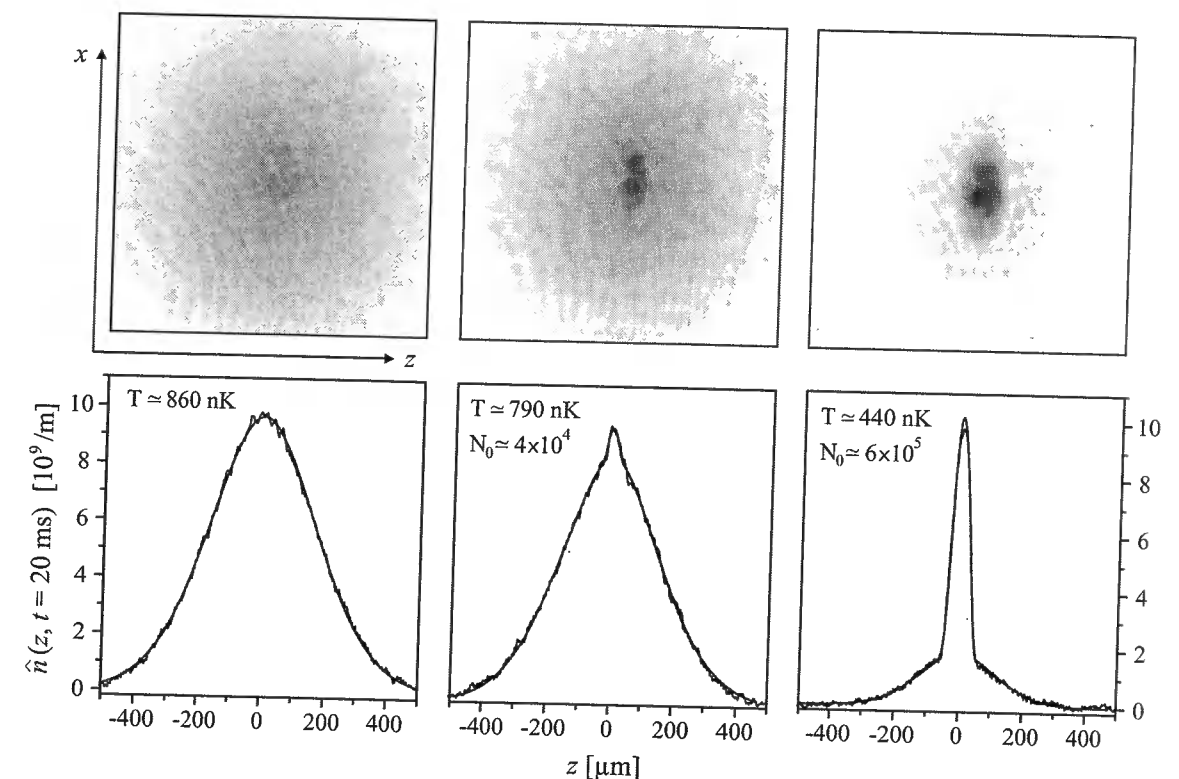


Abbildung 9.1: Absorptionsbilder der Atomwolke nach 20 ms Expansion und die Verteilungen, die sich durch Integration der Säulendichte entlang der x -Richtung ergeben. Die angepaßten Kurven entsprechen den Funktionen (6.9).

Wechselwirkung von jener des idealen Bose-Gases abweichen und auch geringfügig anders als diese expandieren wird. Die Temperatur teilweise kondensierter Wolken wird daher durch die Anpassung der zweifach integrierten Bose-Verteilung (mit einer Fugazität von Eins) an die äußeren Flanken des Absorptionsprofils bestimmt. Geht man davon aus, daß der Fehler von T unter diesen Voraussetzungen klein ist, läßt sich die Gesamtteilchenzahl bei T_c unter Berücksichtigung der Korrekturen (2.22) und (4.15) ermitteln. Dabei wird für T_c eine um 10 nK höhere Temperatur gewählt, als sie die heißesten Wolken besitzen, auf deren Absorptionsbildern sich zweifelsfrei Kondensate erkennen lassen. Dieses Vorgehen bietet die Möglichkeit, den Absorptionsquerschnitt für das (verstimmt) Nachweislicht zu bestimmen. Letzterer ist aufgrund von Polarisierungseffekten (Orientierung der Atome, Reabsorption), der endlichen Linienbreite des Lasers und der ungenauen Kenntnis der Verstimmung a priori nicht genau bekannt. Bei bekanntem Absorptionsquerschnitt kann nun die Teilchenzahl zu jedem anderen Zeitpunkt aus der Gesamtabsorption der Wolke bestimmt werden.

Das Ergebnis einer solchen Eichung ist in Abbildung 9.2 dargestellt. Das linke Schaubild zeigt die relative Grundzustandsbesetzung in Abhängigkeit der Temperatur. Für $T_c \approx 815 \text{ nK}$, $\omega_{||} = 2\pi \times 24,5 \text{ Hz}$ und $\omega_{\perp} = 2\pi \times 227 \text{ Hz}$ ergibt sich $N(T_c) \approx 6,3 \times 10^6$. Dieser Wert wird dazu verwendet, die Fluoreszenz- und Absorptionssignale der Atomwolke zu eichen und geht somit auch in N_0/N ein. Der Verlauf der Grundzustandsbesetzung mit

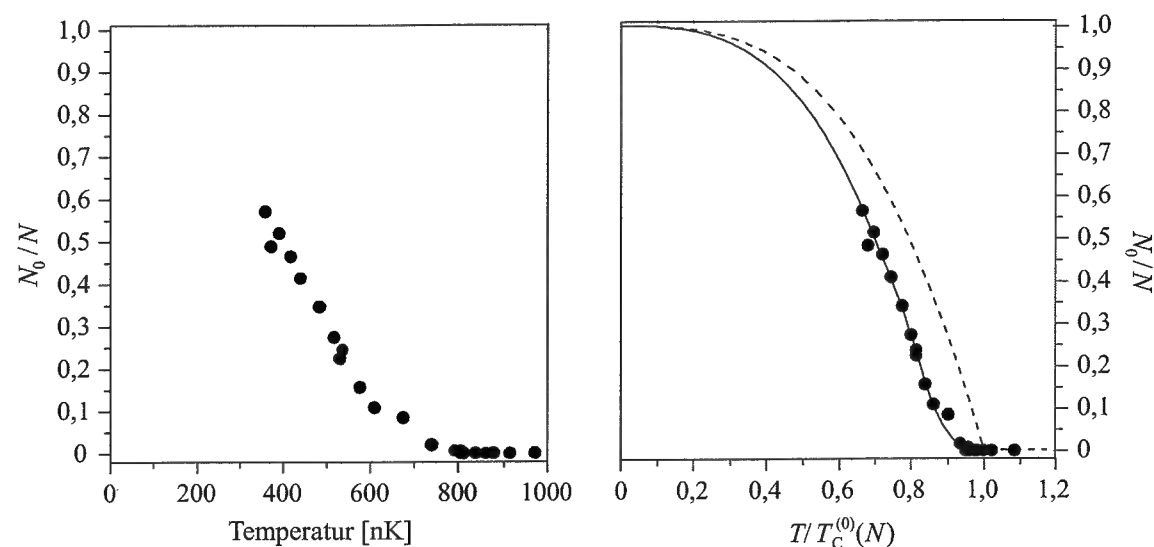


Abbildung 9.2: Links: Relative Besetzung des Grundzustandes als Funktion der Temperatur. Rechts: Um die Daten mit der Erwartung vergleichen zu können, muß berücksichtigt werden, daß während der Verdampfungskühlung mit der Teilchenzahl auch die Übergangstemperatur abnimmt.

der Temperatur weicht von der prinzipiellen Kurvenform (2.21) ab, da das Gas durch Verdampfen nichtkondensierter Atome gekühlt wird. Während der Kühlung sinkt mit N auch T_c . Dieser Effekt läßt sich durch eine Skalierung der Temperaturachse berücksichtigen, wie das rechte Schaubild in Abbildung 9.2 zeigt. Als Skalierungsparameter ist $T_c^{(0)}(N)$ gemäß Gleichung (2.20) gewählt. Während die gestrichelte Kurve den theoretischen Verlauf der relativen Grundzustandsbesetzung eines idealen Gases im thermodynamischen Limes zeigt, dient die durchgezogene Kurve allein der Orientierung und stellt nicht das Ergebnis eines Modells dar. Zu beachten ist erstens, daß die Verschiebung der Übergangstemperatur um ca. -10% nicht gemessen, sondern im Rahmen der Eichung vorausgesetzt wurde¹. Die Übergangstemperatur hängt zweitens von den Oszillationsfrequenzen und der Anzahl von Atomen ab, die sich zum Zeitpunkt der Kondensation in der Magnetfalle befinden. Im Experiment liegt T_c je nach Parameterwahl zwischen 500 nK und 900 nK.

9.2 Lebensdauer kalter Atomwolken

Wie bereits eingangs dieser Arbeit erwähnt, sind beide Apparaturen, die eingesetzt wurden, darauf ausgelegt, die Erzeugung von Kondensaten hoher Säulendichte $\langle nl \rangle$ zu ermöglichen. Insbesondere durch die Verdampfungskühlung, aber auch durch die meisten anderen in Kapitel 5 beschriebenen Methoden ist jedoch die Anzahl kondensierter Atome auf etwa $10^6 \dots 10^7$ nach oben begrenzt. Die mittlere freie Weglänge der Atome kann daher nur durch die Erhöhung der Dichte verkürzt werden. Dies führt in nächster Konsequenz zu ei-

¹ Eine entsprechende Messung ist z.B. in Referenz [174] vorgestellt.

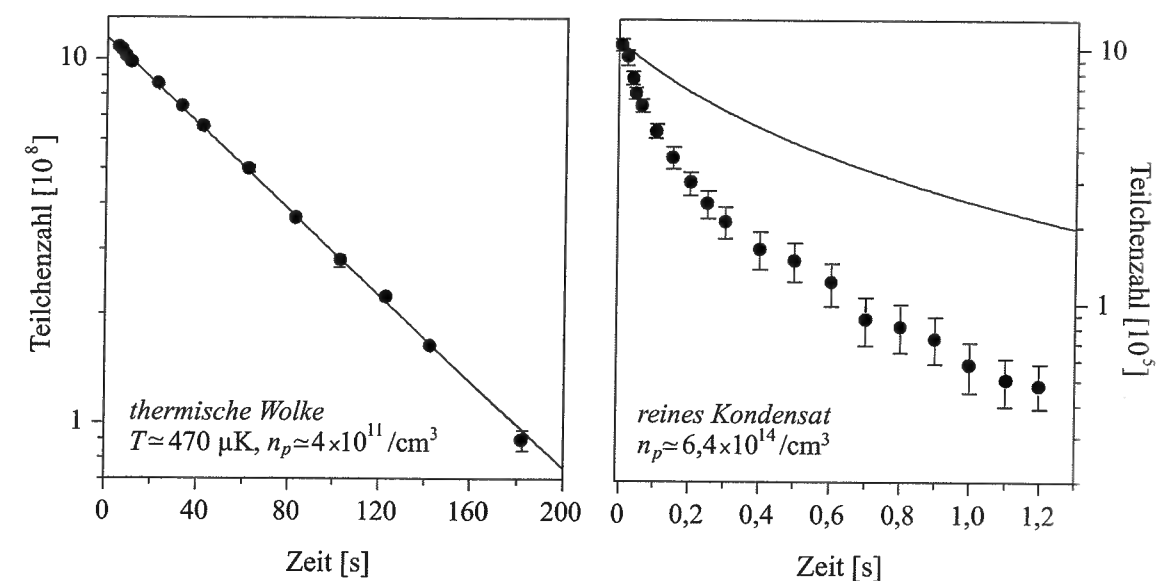


Abbildung 9.3: Links: Zerfall einer „heißen“ Atomwolke vor der Verdampfungskühlung. Die exponentielle Charakteristik ist auf Stöße mit dem Hintergrundgas zurückzuführen und entspricht einer Lebensdauer von etwa 80 s. Rechts: Ein Kondensat hoher Säulendichte zerfällt hingegen innerhalb weniger hundert ms und etwa achtmal schneller als erwartet.

ner vergleichsweise kurzen Lebensdauer, wie anhand der Dichteabhängigkeit inelastischer Stoßraten (3.41) zu erkennen ist. Dabei wirkt sich zwar auf der einen Seite die Kohärenz des Kondensats günstig auf das Verhältnis der elastischen zu den inelastischen Stoßraten aus, die extrem niedrige Temperatur des Gases bewirkt jedoch auf der anderen Seite das Gegenteil (vgl. Kapitel 3.2.6, 3.2.5, 3.3). Da sich große, dichte Kondensate im TF-Regime befinden, skaliert die Dichte mit der Teilchenzahl gemäß $n_p \propto N_0^{2/5}$ (mit n_p wird im folgenden die zentrale Dichte der Atomwolken bezeichnet). Das bedeutet einerseits, daß die Verlustraten nur schwach mit der Teilchenzahl zunehmen, daß sie aber andererseits auch anhalten.

Wie dramatisch unterschiedlich ungekühlte Atomwolken und Kondensate tatsächlich zerfallen, läßt sich anhand von Abbildung 9.3 erkennen. Das linke Schaubild zeigt die Entwicklung der Teilchenzahl von Atomwolken unmittelbar vor der Verdampfungskühlung. Der rein exponentielle Zerfall ist auf Stöße mit dem Hintergrundgas zurückzuführen und hat eine Zeitkonstante von $\tau = 1/K_1 \simeq 80$ s. Dieser Wert wurde in der Konstanzer Apparatur nach mehreren aufeinanderfolgenden Experimentiertagen bestimmt und ist etwa halb so groß wie typische Werte, die nach längeren Experimentierpausen unter sonst gleichen Voraussetzungen beobachtet werden. Damit ist klar, daß Rubidium erwartungsgemäß entscheidend zur Dichte des Hintergrundgases beiträgt, da eine Änderung des Hintergrundgasdrucks allein durch den Transfer von Rb-Atomen in den UHV-Bereich zustandekommen kann. Das Kondensat hingegen zerfällt, wie anhand des rechten Schaubildes zu erkennen ist, signifikant schneller und nicht exponentiell. Die Messung ist in Anwesenheit eines Rf-Feldes durchgeführt worden, das die Potentialtiefe auf $k_B \times 4,4 \mu\text{K}$ beschränkt und einem Abschneideparameter von $\eta \simeq 13$ entspricht. Unter diesen Bedingungen ist die

Lebensdauer des Kondensats maximal, und bereits geringe Abweichungen von der optimalen Potentialtiefe führen zu einem erkennbar schnelleren Zerfall. Der verhältnismäßig hohe Wert von η ist konsistent mit der Überlegung, daß dichteabhängige Verluste im Kondensat (anders als im nichtkondensierten Gas) nicht zu Heizraten durch Antievaporation führen (vgl. Kapitel 5.6.2). Die durchgezogene Kurve im rechten Schaubild zeigt den erwarteten Verlauf der Teilchenzahl, der sich aus der Ratengleichung

$$\dot{N} = -K_1 N - \frac{4}{7} K_2 n_p N - \frac{8}{21} K_3 n_p^2 N, \quad (9.1)$$

also unter Einbezug dichteabhängiger Verluste entsprechend den Ausführungen in den Kapiteln 3.2 und 3.3 ergibt². Desweiteren wurde berücksichtigt, daß die Lebensdauer $1/K_1$, die durch Stöße mit dem Hintergrundgas zustandekommt, in der nun erheblich seichterem Falle nur noch etwa 35 s beträgt, wie in Anhang C erläutert wird. Bedingt ist diese Reduktion durch die Tatsache, daß hier wesentlich geringere Energieüberträge die Atome dazu befähigen, das Speicherpotential zu überwinden. Die starke Abweichung der Theorie von den Daten in Abbildung 9.3 ist der Ausgangspunkt für die verbleibenden Kapitel der vorliegenden Arbeit.

Zunächst gilt festzustellen, daß besagte Abweichung nicht durch eine ungenaue Kenntnis der Ratenkonstanten K_i erklärbar ist. Neben den in Kapitel 3 zitierten theoretischen Untersuchungen finden sich in der einschlägigen Literatur zwei experimentelle Studien inelastischer Verluste von ^{87}Rb -Kondensaten³. Burt et al. gelang durch den Vergleich der Verluste kondensierter und nichtkondensierter Atomwolken im Zustand $|1, -1\rangle$ ein Nachweis der Kohärenz höherer Ordnung von Kondensaten [85]. Die in dieser Referenz angegebene Ratenkonstante für Verluste infolge von Rekombination ist etwa dreimal kleiner als von der Theorie vorhergesagt (siehe Gleichung (3.52)), in der allerdings die Hyperfeinstruktur der Atome nicht berücksichtigt ist. Eine sehr gute Übereinstimmung finden hingegen Söding et al. mit Atomen im Zustand $|2, 2\rangle$ [72]. Im Vorgriff auf die folgenden Kapitel läßt sich an dieser Stelle bereits sagen, daß die Voraussetzungen für die akkurate Bestimmung von Ratenkonstanten in der zweiten Studie sehr viel besser erfüllt sind. Sie ist außerdem im gleichen Hyperfeinzustand durchgeführt worden wie die im folgenden beschriebenen Experimente. Schließlich wird in beiden Studien beobachtet, daß Spinrelaxation gegenüber Rekombination im untersuchten Dichteregime eine vernachlässigbare Rolle spielt. Dies ist in Übereinstimmung mit der in Kapitel 3.2.5 diskutierten Theorie. Insgesamt ergibt sich in der Kombination von Theorie und Experiment ein so geringer Spielraum für die Ratenkonstanten inelastischer Verlustprozesse, daß die oben festgestellte Abweichung physikalischen Ursprungs oder experimentspezifisch sein muß. Nicht unerwähnt sollte an dieser Stelle schließlich bleiben, daß aus einigen weiteren Arbeitsgruppen übereinstimmend berichtet wird, daß Rb-Kondensate im Hyperfeinzustand $|2, 2\rangle$ prinzipiell empfindlich schneller zerfallen als solche im Zustand $|1, -1\rangle$.

² Auf die drei Terme kommt man durch die einfache Umformung $\dot{N}_i = -K_i \int n(\vec{r})^i d^3r = -K_i \langle n^i \rangle N = -c_i K_i n_p^{i-1} N$, mit $c_1 = 1$, $c_2 = 4/7$ und $c_3 = 8/21$ für die parabelförmige Dichteverteilung des Kondensats.

³ Messungen zur Lebensdauer von ^{23}Na - bzw. $^4\text{He}^*$ -Kondensaten finden sich in den Referenzen [175, 23].

Als apparative Ursachen kommen zunächst Verluste durch nahresonantes Streulicht und technische Heizraten in Frage. Beide Möglichkeiten wurden sorgfältig untersucht und können ausgeschlossen werden (siehe Kapitel 7.3). Eine weitere, experimentspezifische Ursache könnte die Anwesenheit einer sog. Oortschen Wolke im Speichervolumen sein. Diese Bezeichnung hat sich für ein verhältnismäßig energiereiches Gas geringer Dichte etabliert, das in der Magnetfalle trotz der Verdampfungskühlung gespeichert bleibt. Stöße zwischen diesen „heißen“ Atomen und jenen aus dem kalten Gas bewirken Verluste und Heizraten und können durch den Einsatz einer Rf-Abschirmung nicht vollständig unterdrückt werden.

9.2.1 Das Konzept der Oortschen Wolke

Das aus der Astronomie bekannte Konzept der Oortschen Wolke wurde von Myatt mit der BEK in Zusammenhang gebracht [176]. Die Analogie beruht darauf, daß die im Experiment eingesetzten Magnetfallen für energiereiche Atome häufig weder harmonisch sind, noch ein Zentralpotential darstellen (vgl. Relation (5.27)). Damit bewegen sich solche Atome auf chaotischen Bahnen, die selten und in unregelmäßigen Abständen den Aufenthaltsbereich der kalten Atomwolke im Zentrum der Falle kreuzen. Die Existenz eines „warmen“ Gases im Speichervolumen wurde bereits kurz nach der ersten Realisierung der BEK von mehreren Autoren prognostiziert [135, 85, 175]. Eine ausführliche Diskussion ihrer Herkunft und Auswirkungen findet sich in den Referenzen [141, 153].

Die Ausprägung einer Oortschen Wolke hat viele Ursachen und läßt sich kaum vermeiden. Zunächst werden energiereiche Atome aus der MOT einerseits in der optischen Melasse nicht eingefangen, andererseits jedoch in die Magnetfalle überführt. Desweiteren gelingt es durch die Verdampfungskühlung nicht, alle Atome mit Energien oberhalb $E_{\text{cut}} = \eta k_B T$ aus der Falle zu entfernen. Prinzipiell ist dies schon dadurch bedingt, daß die Orthogonal-komponente des Rf-Feldes in bestimmten Regionen des Speicherpotentials verschwindet. Zudem entspricht die Schwellenenergie E_{cut} zu Beginn der Verdampfung verhältnismäßig hohen Magnetfeldern, bei denen die Entartung der Elektronenspinresonanzen zwischen benachbarten Zeeman-Niveaus durch den quadratischen Zeeman-Effekt aufgehoben werden kann, falls die Rf-Leistung zu gering gewählt wird (vgl. Kapitel 5.6.3 und die d. a. Referenzen). Durch unvollständige Verdampfung, die generell eine Folge geringer Rf-Leistung ist, prägen sich im Zentrum der Falle Populationen in allen Zeeman-Niveaus des gespeicherten Hyperfeinzustands aus. Insbesondere gegen Ende der Verdampfungskühlung kommt es dadurch nicht nur zu elastischen Stößen zwischen kalten und energiereichen Atomen, die zu einem weiteren Wachstum der Oortschen auf Kosten der kalten Wolke führen, sondern auch zu inelastischen Stößen zwischen Atomen verschiedener Orientierung, die zusätzliche Verluste bedingen. Die Ratenkonstanten für diese Prozesse sind teilweise empfindlich größer als die für inelastische Stöße zwischen spinpolarisierten Atomen. Zu beachten ist ferner, daß die energiereichen Produkte inelastischer Stöße in der Magnetfalle gespeichert bleiben können. Hierbei handelt es sich nicht allein um Atome, sondern auch um Moleküle, die durch Rekombination entstehen. Auch dieser Beitrag zur Oortschen Wolke macht sich insbesondere gegen Ende der Verdampfung bemerkbar.

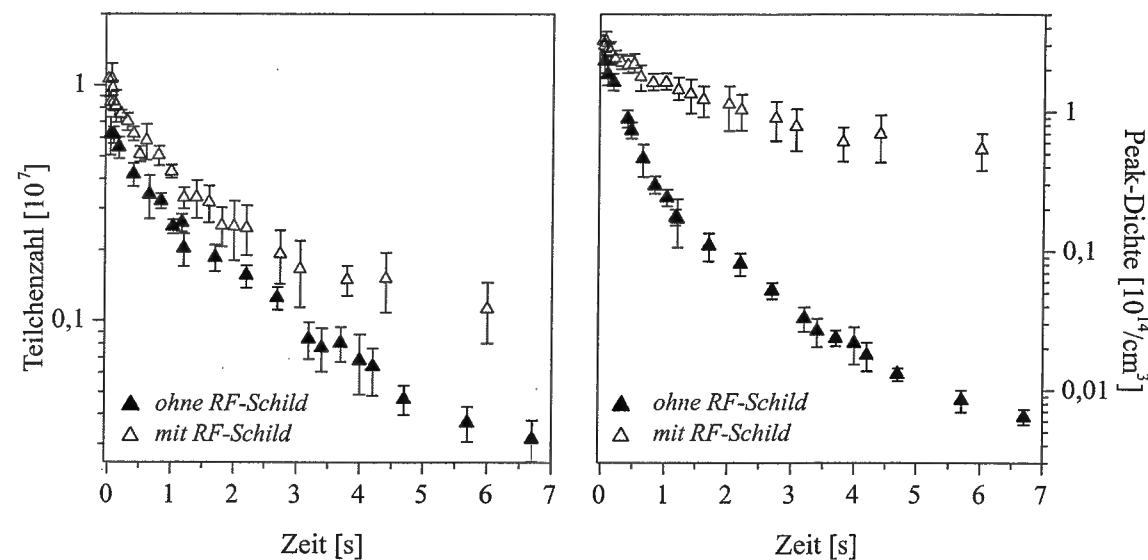


Abbildung 9.4: Auswirkung der Rf-Abschirmung auf den Zerfall von Atomwolken knapp oberhalb des Phasenübergangs.

Der direkte Nachweis einer Oortschen Wolke ist insofern schwierig, als es sich dabei in der Regel um ein Gas geringer Teilchen- bzw. optischer Dichte handelt. Indirekt läßt sich auf seine Anwesenheit aus dem Vergleich von Teilchenzahlmessungen schließen, die auf Absorption einerseits und Fluoreszenz andererseits beruhen. Während die Oortsche Wolke aufgrund ihrer vergleichsweise großen Ausdehnung und ihrer geringen optischen Dichte kaum zur Gesamtabsorption des gespeicherten Gases beiträgt, ist davon auszugehen, daß sich auch die energiereichen Atome unmittelbar nach dem Abschalten der Magnetfalle in der MOT einfangen lassen und dort zur Fluoreszenz beitragen. Mehrere Gruppen berichten, bei Einsatz der letzteren Methode systematisch höhere Teilchenzahlen zu detektieren als durch Absorption [141, 153]. Demzufolge könne man von einer Population der Oortschen Wolke im Bereich von einigen $10^5 \dots 10^6$ Atomen ausgehen. Es ist jedoch nicht klar, ob nicht der Einfang von Atomen aus dem Hintergrundgas der UHV-Region von BEK-Apparaturen für diese Diskrepanz verantwortlich ist. Zudem muß beachtet werden, daß die Fluoreszenz einer MOT, sobald sie in das Regime der Dichtebegrenzung eintritt, nicht mehr proportional zur Teilchenzahl ist. Dieses Regime kann bereits mit wenigen 10^4 Atomen erreicht werden. Die in dieser Arbeit durchgeführten Fluoreszenzmessungen liefern keinen signifikanten Hinweis auf eine Oortsche Wolke, von deren Existenz jedoch prinzipiell ausgegangen werden muß.

Ein indirekter Nachweis für die Oortsche Wolke läßt sich auch aus dem Vergleich von Zerfallsmessungen in An- bzw. Abwesenheit einer Rf-Abschirmung herleiten. Abbildung 9.4 zeigt einen solchen Vergleich. Für die Messungen wurden jeweils knapp $1 \mu\text{K}$ kalte, nicht-kondensierte Wolken von etwa 10^7 Atomen durch Verdampfung bis zu einer festen Radiofrequenz ν_{rf} erzeugt und über eine variable Zeit gespeichert. Die Speicherung erfolgte im Falle der ersten Messung in Anwesenheit einer Rf-Abschirmung bei einer gegenüber ν_{rf} um 20 kHz erhöhten Frequenz, die einem Abschneideparameter von $\eta_T \simeq 10,5$ entspricht. Die Temperatur der Atomwolken bleibt unter diesen Bedingungen über die Speicherzeit nahezu

konstant⁴. Der optimale Wert von η_T entspricht in etwa jenem, den man der Abschätzung in Kapitel 5.6.2 zufolge erwartet, soll die Antievaporation durch Verdampfung kompensiert werden. Damit kann die Heizrate, die auf die Oortsche Wolke zurückzuführen ist, zumindest in Anwesenheit der Abschirmung nicht signifikant sein, da sie sonst durch einen entsprechend niedrigeren Wert von η_T kompensiert werden müßte. Einen weiteren Hinweis auf die hohe Effizienz der Abschirmung liefert die Tatsache, daß eine Halbierung der Rf-Leistung sowohl während der Erzeugung der Wolken als auch während ihrer Speicherung keine Auswirkungen auf den Verlauf von Teilchenzahl und Temperatur hat. Dies spricht für eine in guter Näherung vollständige Verdampfung.

Wird jedoch auf die Abschirmung gänzlich verzichtet, ändert sich die Zerfallsdynamik, wie die zweite Messung zeigt. Da nun die Temperatur der Wolken infolge der Antievaporation schnell zunimmt und die Dichte infolgedessen schnell sinkt (rechtes Schaubild), klingen dichteabhängige Verluste wesentlich schneller ab als in Anwesenheit der Abschirmung. Trotzdem sind die beiden Zerfallskurven im linken Schaubild zu Beginn der Speicherzeit ähnlich steil, gegen Ende der Speicherzeit zerfällt die Teilchenzahl der unabgeschirmten Wolke sogar schneller. Offenbar wird der Rückgang dichteabhängiger Verluste unter diesen Voraussetzungen durch Stöße mit Teilchen aus der Oortschen Wolke überkompensiert. Dabei muß beachtet werden, daß es sich hier streng genommen nicht um Verluste im eigentlichen Sinne handelt, weil davon auszugehen ist, daß alle Atome in der Falle gespeichert bleiben. Vielmehr wächst die Population der Oortschen auf Kosten jener der kalten Wolke, was eher einer Thermalisierung entspricht, im Verlaufe derer „verlorene“ Atome zurückkehren und ihrerseits Schaden anrichten können. Begleitet wird der Prozeß daher von einer beträchtlichen Heizrate der kalten Wolke von etwa $1,2 \mu\text{K/s}$, die für die starke Abnahme der Dichte verantwortlich ist. Unterstützt wird diese Interpretation durch die Tatsache, daß die gemäß Gleichung (5.41) erwartete Heizrate infolge von Antievaporation bereits zu Beginn der Speicherzeit bestenfalls die Hälfte des beobachteten Wertes erklären kann. Zudem nimmt der Effekt der Antievaporation quadratisch mit der Dichte und somit etwa hundertfach innerhalb der ersten Sekunde ab (vgl. Abbildung 9.4).

Die obigen Messungen lassen keine Schlüsse über die Herkunft der Oortschen Wolke zu, insbesondere kann nicht definitiv geprüft werden, ob sie bereits zu Beginn der Speicherzeit zerstörerische Ausmaße besitzt oder zum größten Teil nach Abschalten der Radiofrequenz durch Zerfallsprodukte der kalten Wolke populiert wird, die dann ihrerseits durch „Erosion“ zu einem weiteren Wachstum der Oortschen Wolke führen. Die zweite Möglichkeit erscheint allerdings wesentlich wahrscheinlicher: Da die Resonanz mit dem Rf-Feld – gemessen an der Ausdehnung der Oortschen Wolke – nahe des Potentialminimums lokalisiert ist, hätte die Rf-Abschirmung nur einen geringen Einfluß auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der heißen Atome am Ort der kalten Wolke und somit auch auf die Auswirkungen der Oortschen Wolke (vgl. die Ausführungen in Kapitel 5.6.3 und 10.4, hier insbesondere jene im Zusammenhang mit Abbildung 10.9.). Abgeschirmte Ensembles müßten dann

⁴ Tatsächlich sinkt die Temperatur der Atomwolken bei konstantem η_T erwartungsgemäß leicht, da mit der Abschirmung die anfängliche Heizrate kompensiert wird, die durch Antievaporation zustandekommt, im Verlauf der Messung jedoch mit sinkender Dichte abnimmt. Um die Konstanz der Temperatur zu gewährleisten, müßte die Abschirmungsfrequenz während der Speicherzeit variiert werden.

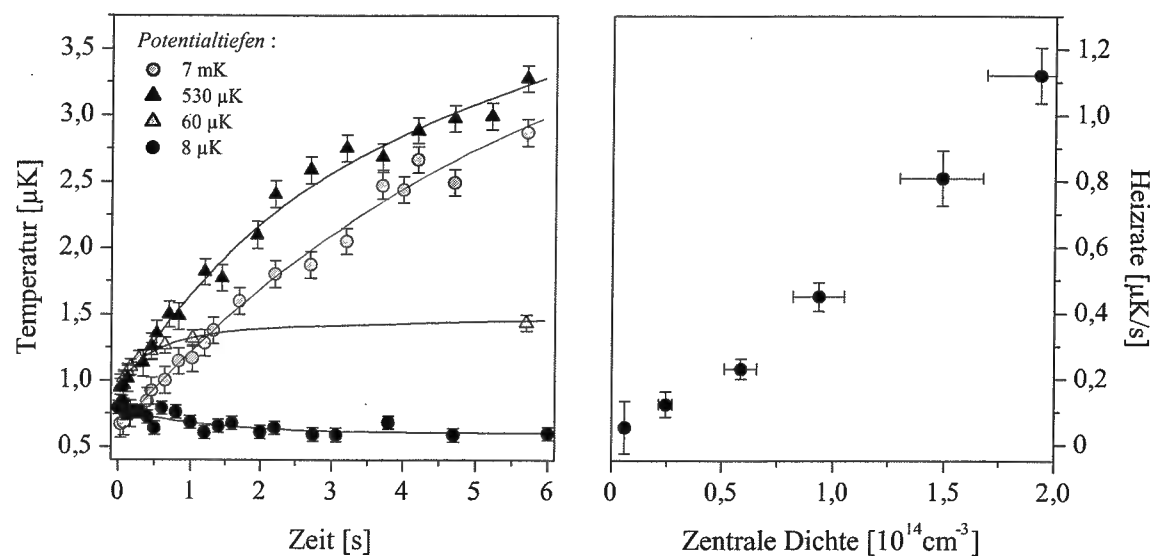


Abbildung 9.5: Links: Temperaturentwicklung unterschiedlich abgeschirmter Atomwolken mit einer Anfangsdichte von $3 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. Rechts: Anfängliche Heizrate ungeschirmter Atomwolken in Abhängigkeit ihrer Peak-Dichte. Die Anfangstemperatur beträgt für alle Datenpunkte knapp $1 \mu\text{K}$.

besonders schnell zerfallen, da erstens deren Dichte vergleichsweise langsam abnimmt und somit zusätzlich hohe Verluste infolge inelastischer Stöße auftreten und zweitens alle Heizraten des Systems durch Verdampfung kompensiert werden. Das Gegenteil ist aber offenbar der Fall, was dafür spricht, daß sich die Ausprägung einer Oortschen Wolke durch die Abschirmung weitgehend unterdrücken läßt. Dagegen erfüllen die meisten der Produkte inelastischer Stöße die energetischen Voraussetzungen und besitzen zudem die passende Spinpolarisation, um in der Magnetfalle gespeichert zu bleiben, sofern deren Tiefe nicht durch die Abschirmung begrenzt wird. Geht man etwa davon aus, daß allein das atomare Produkt der Rekombination gespeichert bleibt, wächst die Population der Oortschen Wolke mindestens mit der Rate $-\dot{N}_3/3$, sofern auf eine Abschirmung verzichtet wird. Für die in Abbildung 9.4 dargestellte Messung ergibt sich daraus ein beträchtlicher Zuwachs der Oortschen Wolke um etwa 8×10^5 Atome innerhalb der ersten halben Sekunde, wobei die gleichzeitig stattfindende „Erosion“ nicht berücksichtigt ist. Hier wird deutlich, daß die wichtigste Rolle der Rf-Abschirmung darin besteht, die Zerfallsprodukte der kalten Wolke aus dem Potential zu entfernen.

Zusätzliche Informationen über den Ursprung und die (energetische) Zusammensetzung der Oortschen Wolke liefern Messungen der Heizrate ungeschirmter Ensembles. Das linke Schaubild in Abbildung 9.5 zeigt die zeitliche Entwicklung der Temperatur nicht-kondensierter Atomwolken vergleichbarer Dichte und Temperatur für verschiedene Werte von E_{cut} . Während sich die Temperatur durch eine Abschirmung bei ca. $k_B \times 8 \mu\text{K}$ nahezu konstant halten läßt, ist zu erkennen, daß sich Abschirmungen oberhalb von etwa $k_B \times 500 \mu\text{K}$ kaum auf die Entwicklung der Temperatur auswirken. Damit ist klar, daß die „schädlichen“ Teilchen der Oortschen Wolke geringere Energien haben. Auffällig ist ferner erstens, daß die ausgeprägte Anfangsheizrate erhalten bleibt, wenn die Potentialtiefe auf $k_B \times 60 \mu\text{K}$ beschränkt wird, und zweitens, daß die Kurve, die dieser Potentialtiefe ent-

spricht, nahezu vollständig sättigt. Letzteres kann nicht ein Effekt der Verdampfung sein, da der Abschneideparameter am Ende der Messung $\eta \simeq 40$ beträgt⁵. Beides deutet erneut darauf hin, daß die Anfangsheizrate nicht auf eine bereits zu Beginn der Messung etablierte Oortsche Wolke zurückzuführen ist, da deren Atome größtenteils höhere Energien besitzen. Wahrscheinlich ist hingegen, daß Atome mit $E < k_B \times 60 \mu\text{K}$ insbesondere zu Beginn der Messung in der kalten Wolke entstehen und anschließend „verbraucht“ werden, also mit dieser thermalisieren. Als „Quellen“ dieser vergleichsweise kalten Oort-Atome kommen insbesondere inelastische Zwei-Körper-Stöße und elastische Sekundärstöße mit den Produkten aller Zerfallsprozesse in Frage: Auch Stoßprodukte, die zunächst genügend Energie besitzen, um das Potential zu überwinden, können elastisch mit kalten Atomen stoßen, bevor sie die Wolke und (eventuell) anschließend die Falle endgültig verlassen. Je nach Energieübertrag kann daraufhin eines der beteiligten Atome gespeichert bleiben und in der Folge weiteren Schaden anrichten.

Sekundärstöße finden umso wahrscheinlicher statt, je höher das Produkt $\langle nl \rangle \sigma(E)$ zwischen der mittleren Säulendichte der Wolke und dem elastischen Stoßquerschnitt, je höher also die „Opazität“ der Wolke bezüglich ultrakalter Atome ist. Sowohl die Zerfallsraten als auch die Opazität nehmen während der Messung schnell ab, wodurch sich die beobachtete Sättigung der Temperatur erklären ließe. Werden inelastische Prozesse von Sekundärstößen begleitet, spielen letztere unwillkürlich auch bei Stößen zwischen Atomen der Oortschen und der kalten Wolke eine Rolle, da die ähnlichen Stoßenergien beider Prozesse einen vergleichbaren Wirkungsquerschnitt implizieren. Das heißt, daß unter diesen Voraussetzungen auch die „Erosion“ der kalten Wolke von Sekundärstößen begleitet wäre. Es gilt also festzuhalten, daß sich sowohl der nichtexponentielle Zerfall des abgeschirmten Kondensats als auch die Nichtlinearität der Temperaturzunahme ungeschirmter Wolken qualitativ durch Sekundärstöße erklären ließen.

Einen Hinweis auf einen nichtlinearen Zusammenhang der Heizrate mit Größen, die ihrerseits von der Teilchenzahl abhängen (wie etwa die Säulendichte), liefert auch die in Abbildung 9.5 rechts dargestellte Messung. Aufgetragen ist die anfängliche Heizrate von knapp $1 \mu\text{K}$ kalten, ungeschirmten Atomwolken in Abhängigkeit ihrer Anfangsdichte. Da alle Datenpunkte bei gleicher Temperatur aufgenommen wurden, ist nicht zu unterscheiden, ob die Heizrate von der Teilchenzahl, der Dichte, der Stoßrate oder der Säulendichte abhängt. Ihre überproportionale Zunahme spricht allerdings dafür, daß entweder der Entstehung der Oortschen Wolke ein dichteabhängiger Prozeß zugrunde liegt oder daß die Thermalisierung tatsächlich von der Säulendichte der kalten Wolke abhängt. Denkbar ist natürlich auch eine Kombination beider Effekte.

⁵ Aufgrund ihrer Dichteabhängigkeit würde sich Antievaporation zwar prinzipiell auch durch eine Sättigung der Temperatur äußern, allerdings verschwindet dieser Effekt aus o. a. Gründen auf viel kürzeren Zeitskalen.

9.2.2 Diskussion

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit die Anwesenheit einer Oortschen Wolke für den in Abbildung 9.3 dargestellten, extrem schnellen Zerfall des Kondensats verantwortlich gemacht werden kann. Von der Existenz einer Oortschen Wolke wird zwar ausgegangen, ihr direkter Nachweis gelang in unseren Experimenten jedoch nicht. Wie eben erläutert, spricht vieles dafür, daß die Ausprägung einer Oortschen Wolke durch die Rf-Abschirmung entweder effizient verhindert werden kann oder daß es zumindest gelingt, die Auswirkungen einer solchen Wolke stark zu reduzieren. Bestätigt wird dies durch die Tatsache, daß die Halbierung der Rf-Leistung sowohl während der Präparation der Wolken als auch während ihrer Speicherung keine Auswirkungen auf die Lebensdauer abgeschirmter Wolken zeitigt. Der Vergleich der Zerfälle in An- bzw. Abwesenheit einer Abschirmung und die Heizratenmessungen sind allerdings mit der Annahme vereinbar, daß eine Oortsche Wolke signifikanter Ausmaße *nach* Abschalten der Rf-Abschirmung entsteht. Als Ursache dafür kommen insbesondere inelastische Stöße und Sekundärstöße von deren Produkten in Frage. Simulationen, die auf semiempirischen Ratengleichungen beruhen und im Rahmen von S. Amtages Diplomarbeit in Konstanz durchgeführt wurden, sind mit diesem Szenario konsistent [147]. Es ist daher unwahrscheinlich, daß der schnelle Zerfall des abgeschirmten Kondensats auf den Kontakt mit der Oortschen Wolke zurückzuführen ist. Dagegen spricht bereits die nichtexponentielle Charakteristik des Zerfalls: Aufgrund ihrer großen Ausdehnung stellt die Oortsche Wolke für das Kondensat ein „Hintergrundgas“ konstanter Dichte dar und sollte daher zu einem exponentiellen Zerfall führen. Eine Dichteabhängigkeit käme höchstens ins Spiel, wenn zu Beginn der Messung Sekundärstöße wahrscheinlich sind. Diese würden aber auch unwillkürlich zu einer „Verstärkung“ der Verluste infolge inelastischer Stöße führen. In der Tat ist es wahrscheinlich, daß die hohen Verluste abgeschirmter Wolken und die schnelle Ausprägung einer Oortschen Wolke bei Verzicht auf eine Abschirmung gleichen physikalischen Ursprungs sind. In diesem Sinne sind alle Beobachtungen mit der Annahme zu vereinen, daß inelastische Stöße von Sekundärstößen begleitet werden, daß also die mittlere freie Weglänge der Stoßprodukte unter den hier gegebenen experimentellen Bedingungen kürzer als die Ausdehnung der kalten Wolke ist. Diese Feststellung motiviert das folgende Kapitel.

Kapitel 10

Stoßlawinen in einem Bose-Einstein-Kondensat

Im Lichte der Diskussion, mit der das vorangegangene Kapitel schließt, erscheint es sinnvoll, Sekundärstöße als Erklärung für den anomalen Zerfall des Kondensats in Betracht zu ziehen. Da das Experiment darauf ausgelegt ist, an großen *und* dichten Atomwolken Effekte der Wechselwirkung zu studieren, wäre es nicht erstaunlich, sollte sich dieser Verdacht bestätigen.

In der einschlägigen Literatur haben Sekundärstöße bisher wenig Beachtung gefunden. Dies ist darin begründet, daß bis dato nahezu alle Experimente an kalten Atomwolken im Regime geringer Opazität durchgeführt wurden. Bedingt durch die Weiterentwicklung der experimentellen Methoden, die zur Erzeugung von Kondensaten eingesetzt werden, insbesondere aber durch die Möglichkeit, die Streulänge von Atomen mit Hilfe von Feshbach-Resonanzen zu manipulieren (vgl. Kapitel 3.2.4), lassen sich jedoch mittlerweile im Experiment hohe Säulendichten realisieren. Dies lenkt das Interesse in zunehmendem Maße auf Sekundärstöße und deren Auswirkungen. Beijerinck untersucht in Referenz [119] die Heizrate von Atomwolken hoher Opazität, die auf einmalige Sekundärstöße jener Atome zurückzuführen ist, die zuvor durch streifende Stöße mit dem heißen Hintergrundgas beschleunigt wurden. Seine Analyse zeigt, daß der Beitrag von Sekundärstößen zur Heizrate, die insgesamt durch den Kontakt mit dem Hintergrundgas zustandekommt, linear mit der Säulendichte skaliert und in Potentialen geringer Tiefe wichtiger sein kann als der Beitrag der streifenden Stöße selbst. In Referenz [141] diskutieren Cornell et al. den Extremfall einer Atomwolke, deren Säulendichte so hoch ist, daß ihre Atome nach streifenden Stößen mit dem Hintergrundgas durch wiederholte Sekundärstöße vollständig abgebremst werden und somit ihre gesamte Energie in der Wolke deponieren. Demnach ist von einer Heizrate auszugehen, die mit $(nl)^6$ skaliert und die experimentell realisierbare Säulendichte von Kondensaten prinzipiell nach oben begrenzt. Die Voraussetzungen für dieses Szenario sind allerdings in heutigen BEK-Experimenten noch längst nicht realisiert. Schließlich weisen Yurovsky et al. in Referenz [177] ausgehend von einer einfachen Abschätzung darauf hin, daß die hohen Verlustraten, die Na-Kondensate in der Umgebung

von Feshbach-Resonanzen aufweisen (siehe Referenz [178]), zumindest teilweise durch Sekundärstöße von Zerfallsprodukten bedingt sein könnten. Für den hier interessierenden Fall, in dem die Projektile erstens eine extrem niedrige Energie und zweitens eine mittlere freie Weglänge besitzen, die in etwa mit der Ausdehnung der Wolke vergleichbar ist, eignet sich keiner der oben zitierten Ansätze, von denen ohnehin nur der von Beijerinck quantitativ ist. Die im folgenden präsentierten Ergebnisse wurden teilweise in Referenz [33] publiziert.

10.1 Stoßwahrscheinlichkeit von Zerfallsprodukten

Um zu klären, inwieweit Sekundärstöße den Zerfall des Kondensats beeinflussen, sollen im folgenden die Wahrscheinlichkeiten berechnet werden, mit denen die verschiedenen Zerfallsprodukte auf kalte Atome stoßen, bevor sie das Gas verlassen. Vom Beerschen Gesetz ausgehend läßt sich die Stoßwahrscheinlichkeit eines Teilchens, das sich im Gas ausgehend vom Ort $\vec{r}$ entlang einer Trajektorie $\vec{R}$ bewegt, als

$$p_{\vec{R}}(E) = 1 - \exp \left[-\sigma(E) \int_0^\infty n(\vec{r} + \vec{R}) dR \right] \quad (10.1)$$

darstellen. Dabei wird von ruhenden „Absorbern“ ausgegangen, eine Annahme, die sinnvoll ist, solange die Geschwindigkeit des betrachteten Teilchens näherungsweise der Relativgeschwindigkeit beim Stoß entspricht. Neben dem (energieabhängigen) Stoßquerschnitt hängt die Wahrscheinlichkeit von der Säulendichte entlang $\vec{R}$ ab und entspricht der relativen Abschwächung eines Teilchenstroms, dessen Quelle im Inneren der Wolke lokalisiert ist. Um die *mittlere* Stoßwahrscheinlichkeit zu bestimmen, müßte $p_{\vec{R}}(E)$ über alle möglichen Trajektorien gemittelt werden, wobei die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Orte $\vec{r}$ zu berücksichtigen wäre, an denen die Zerfälle stattfinden. Ein solches Vorgehen ist analytisch nicht möglich und numerisch sehr aufwendig. Es zeigt sich jedoch, daß in guter Näherung

$$p(E_j) = 1 - \exp [-\langle nl \rangle_j \sigma(E_j)] \quad (10.2)$$

angesetzt werden kann, also die Stoßwahrscheinlichkeit, die der mittleren Säulendichte $\langle nl \rangle_j$ des Gases entspricht, von der bereits einige Male die Rede war. Bei ihr handelt es sich um das Mittel des Integrals in Gleichung (10.1) über den Raumwinkel einerseits und die Ortsverteilung der Quellen andererseits. Dabei wird, wie weiter unten erläutert, zwischen Hintergrundgas-, Zwei-Körper- und Rekombinationsstößen anhand der Potenz j ihrer Dichteabhängigkeit unterschieden. E_j bezeichnet die Energie der Stoßprodukte und bestimmt den Wirkungsquerschnitt für den Sekundärstoß mit einem kalten Atom. Die Vorteile dieses Ansatzes werden in Abschnitt 10.3 deutlich, wo er die Grundlage für eine analytische Beschreibung von Stoßlawinen darstellt.

Dem Ausdruck $\langle nl \rangle_1$ kommt eine besondere Bedeutung zu: Er geht in die Definition der Opazität

$$\mathcal{O}_s = \langle nl \rangle_1 \sigma_s \quad (10.3)$$

mit Bezug auf elastische Stöße im s-Wellen-Regime ein, von der im folgenden häufig die Rede sein wird¹. Sie entspricht bis auf Vorfaktoren dem Verhältnis der charakteristischen Wolkenausdehnung zur mittleren freien Weglänge der Atome und stellt somit eine entscheidende Größe im Hinblick auf die Frage dar, ob sich ein Kondensat im sog. hydrodynamischen Regime befindet oder nicht. Dieses wird für $\mathcal{O}_s \gg 1$ erreicht, wenn also die mittlere freie Weglänge sehr viel kleiner als die Ausdehnung des Gases ist.

Offensichtlich eignet sich ^{87}Rb aufgrund seiner großen Streulänge besonders gut für Experimente im Regime hoher Opazität. An Gleichung (10.2) ist außerdem zu erkennen, daß Sekundärstöße bereits in stark verdünnten Gasen eine Rolle spielen werden: In heutigen BEK-Experimenten sind Gasparameter von $n_p a^3 \approx 10^{-4} \dots 10^{-5}$ realisiert. Mit $\langle nl \rangle_{\sigma_s} \simeq 8\pi a^2 W n_p / 2$ ist die Opazität der kalten Wolke um etwa den Faktor $4\pi W/a$ größer als der Gasparameter. Mit dem Zusammenhang (4.11) zwischen der Breite W des Kondensats im TF-Regime und dessen Teilchenzahl gilt für typische Rubidium-Experimente $W/a \simeq 3,4 N_0^{1/5} (a_{ho}/a)^{4/5} = 10^3 \dots 10^4$. Daher ist mit $\mathcal{O}_s \geq 0,1$ und einer Stoßwahrscheinlichkeit von $p \geq 0,1$ zu rechnen. Im folgenden sollen beide Größen genauer quantifiziert werden.

Dichtegemittelte Säulendichte

Um die Stoßwahrscheinlichkeit nach Gleichung (10.2) zu bestimmen, muß der Ausdruck

$$\langle nl \rangle_j := \frac{1}{\int n^j(\vec{r}) d^3r} \int n^j(\vec{r}) \cdot \frac{1}{4\pi} \int n(\vec{r} + \vec{R}) \frac{d^3R}{R^2} d^3r \quad (10.4)$$

ausgewertet werden, der in Abbildung 10.1 veranschaulicht ist. Am Aufpunkt $\vec{r}$ entstehen Zerfallsprodukte, die das Gas entlang beliebiger Trajektorien $\vec{R}_k$ verlassen können. Zunächst muß also die Säulendichte von diesem Punkt aus über den Raumwinkel gemittelt werden, wofür das innere Integral verantwortlich ist. Anschließend erfolgt eine weitere Mittelung über die räumliche Wahrscheinlichkeitsverteilung der Orte $\vec{r}$, an denen die Zerfälle stattfinden. Dabei müssen die verschiedenen Prozesse gesondert betrachtet werden: Aufgrund der homogenen Dichte des Hintergrundgases entspricht die Verteilung von Hintergrundgasstößen der auf Eins normierten Dichteverteilung des kalten Gases. Hingegen ist die Verteilung von inelastischen Zwei-Körper-Stößen zwischen gespeicherten Atomen proportional zu $n^2(\vec{r})$, die von Rekombinationsstößen zu $n^3(\vec{r})$. Für Sekundärstöße von Rekombinationsprodukten ist also die Säulendichte am größten, da der Prozeß vorzugsweise im Zentrum der Wolke stattfindet. Interessieren elastische Stöße eines zufällig herausgegriffenen Atoms, muß $j = 1$ angesetzt werden, da in diesem Falle nicht (wie oben) Voraussetzung ist, daß am Ort $\vec{r}$ bereits ein Stoß mit einer spezifischen Dichteabhängigkeit stattgefunden hat. Ausschlaggebend ist in diesem Falle die Verteilung der Kondensatato-

¹ Der Begriff der Opazität ist der Optik entliehen, wo er ein Maß für die Intransparenz eines Mediums darstellt. Der Logarithmus der Opazität stellt die optische Dichte dar. In Ermangelung eines zur optischen Dichte analogen Begriffs, wird in dieser Arbeit im Zusammenhang mit Stößen das Produkt $\langle nl \rangle \sigma$ als „Opazität“ bezeichnet. Der Autor bittet für diese freie Begriffsübertragung um Nachsicht.

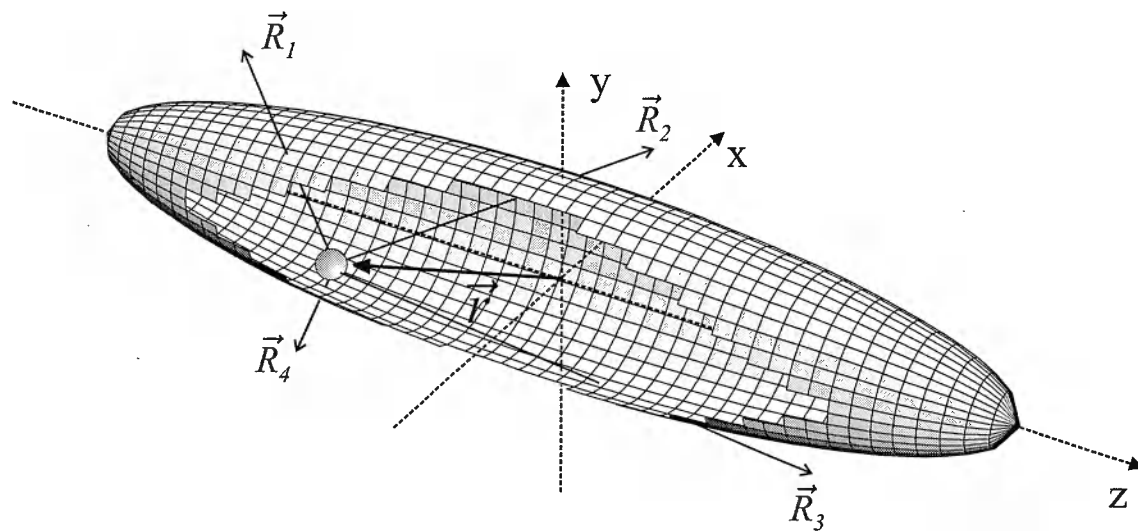


Abbildung 10.1: Bei der Berechnung der mittleren Säulendichte werden zunächst ausgehend vom Ort $\vec{r}$, an dem der Primärstoß stattfindet, alle möglichen Trajektorien durch die Wolke berücksichtigt. Anschließend erfolgt die Mittelung der Säulendichte über die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\vec{r}$.

me. Durch das im Nenner stehende Integral werden schließlich die jeweiligen Verteilungen normiert.

Die Auswertung von (10.4) ist mühsam, jedoch für die hier relevanten Dichteverteilungen analytisch möglich (in Anhang D wird sie am Beispiel der Gauss-Verteilung erläutert). Für die gaußförmige Dichteverteilung des nichtentarteten Gases ergibt sich

$$\langle nl \rangle_j = \sqrt{\frac{\pi}{2}} n_p \sigma_{\perp} I(\epsilon) \frac{j}{(1+j)} \quad \text{mit} \quad I(\epsilon) := \int_0^{\infty} \frac{ds}{(1+s^2)\sqrt{1+\epsilon^2 s^2}}. \quad (10.5)$$

Dabei sind n_p der zentrale Wert und $\sigma_{\perp} = \sqrt{\frac{k_B T}{m \omega_{\perp}^2}}$ die Standardabweichung der radialen Dichteverteilung. Das Integral $I(\epsilon)$ hängt vom Verhältnis $\epsilon = \omega_z / \omega_{\perp}$ der Oszillationsfrequenzen ab und quantifiziert somit den Einfluß der Anisotropie auf die Säulendichte. Für $\epsilon = 1$, also sphärische Symmetrie, beträgt es Eins, während sein Wert für alle anderen $\epsilon > 0$ durch

$$I(\epsilon) = \frac{\operatorname{artanh} \left[\sqrt{1 - 1/\epsilon^2} \right]}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \quad (10.6)$$

gegeben ist.

An dieser Stelle bietet es sich an, den Zusammenhang zwischen der Opazität (10.3) und der oft angegebenen mittleren Stoßrate $\gamma_{\text{el}} = \langle n \rangle \sigma_s \bar{v}$ einer kalten (thermischen) Wolke zu klären. Mit dem Ausdruck

$$\bar{v} = \sqrt{2} \langle v \rangle = 4 \sqrt{\frac{k_B T}{\pi m}} \quad (10.7)$$

für die mittlere thermische Relativgeschwindigkeit, der Relation $\langle n \rangle = n_p / \sqrt{8}$ und dem Ergebnis (10.5) für $j = 1$ läßt sich schnell die Relation

$$\mathcal{O}_s = \frac{I(\epsilon)}{8} \frac{\gamma_{\text{el}}}{\nu_{\perp}} \quad (10.8)$$

finden. Das Verhältnis $\gamma_{\text{el}} / (4\nu_{\perp})$ stellt eine einfache Abschätzung für die mittlere Anzahl elastischer Stöße dar, an denen die Teilchen des Gases während einem Viertel der kürzesten Oszillationsperiode, also auf dem kürzesten Weg vom Zentrum der Wolke zu deren Rand, beteiligt sind². Von einem ähnlichen Szenario wurde bei der Berechnung der Säulendichte ausgegangen. Es ist daher nicht erstaunlich, daß die Opazität bis auf den numerischen Faktor $I(\epsilon)/2$ mit dieser Abschätzung übereinstimmt.

Das Ergebnis (10.5) ist auch für die Berechnung der mittleren Säulendichte eines Bose-verteilten Gases von Bedeutung. Wie anhand der Gleichungen (2.25) und (2.18) zu erkennen ist, läßt sich dessen Dichte als unendliche Summe von Gauß-Verteilungen darstellen. Dementsprechend zerfällt (10.4) in eine Summe von Integralen, deren Auswertung jeweils bis auf Vorfaktoren zu Ergebnissen der Form (10.5) führt. Man erhält schließlich

$$\langle nl \rangle_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_{\perp}}{\lambda_T^3} I(\epsilon) \frac{\sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{z^{k+j}}{(k+j)k^2 j^2}}{g_3(z)} \quad (10.9)$$

und in analoger Weise $\langle nl \rangle_2$ bzw. $\langle nl \rangle_3$. Für numerische Anwendungen sind diese Ergebnisse jedoch aufgrund der unendlichen Summationsgrenzen ungeeignet. Wie bereits für $g_2(\alpha)$ und $g_{5/2}(\alpha)$ in Kapitel 6.3 bzw. Anhang B gezeigt, läßt sich jedoch auch $g_{3/2}(\alpha)$ gut durch ein Polynom endlicher Ordnung approximieren. Für praktische Anwendungen wird in dieser Arbeit die Darstellung

$$g_{3/2}(\alpha) \simeq 0,8718 \alpha + 0,7763 \alpha^2 + 0,7255 \alpha^{12} \quad (10.10)$$

benutzt, deren Genauigkeit für $\alpha < 0,99$ ausreichend hoch ist. Eine entsprechende Darstellung von $g_3(\alpha)$ ergibt sich aus (10.10) über die Teilchenzahlnormierung der Dichteverteilung. Mit diesen Ansätzen liefert Gleichung (10.4) ein zu (10.9) analoges Ergebnis, in dem jetzt allerdings endliche Summen auftauchen.

Mit der parabelförmigen Dichteverteilung (4.8) des Kondensats im TF-Regime liefert Gleichung (10.4) schließlich für $j = 1$ die mittlere Säulendichte

$$\langle nl \rangle_1 = \frac{5}{24} n_p W_{\perp} I(\epsilon), \quad (10.11)$$

wo $W_{\perp}$ die volle radiale Ausdehnung (4.10) des Kondensats bezeichnet. Da die analytische Rechnung für die Fälle $j = 2, 3$ besonders aufwendig ist, werden Mittelungen höherer Gewichtung numerisch durchgeführt.

² In Gleichung (10.8) wird vorausgesetzt, daß $\nu_{\perp}$ die höchste Oszillationsfrequenz ist.

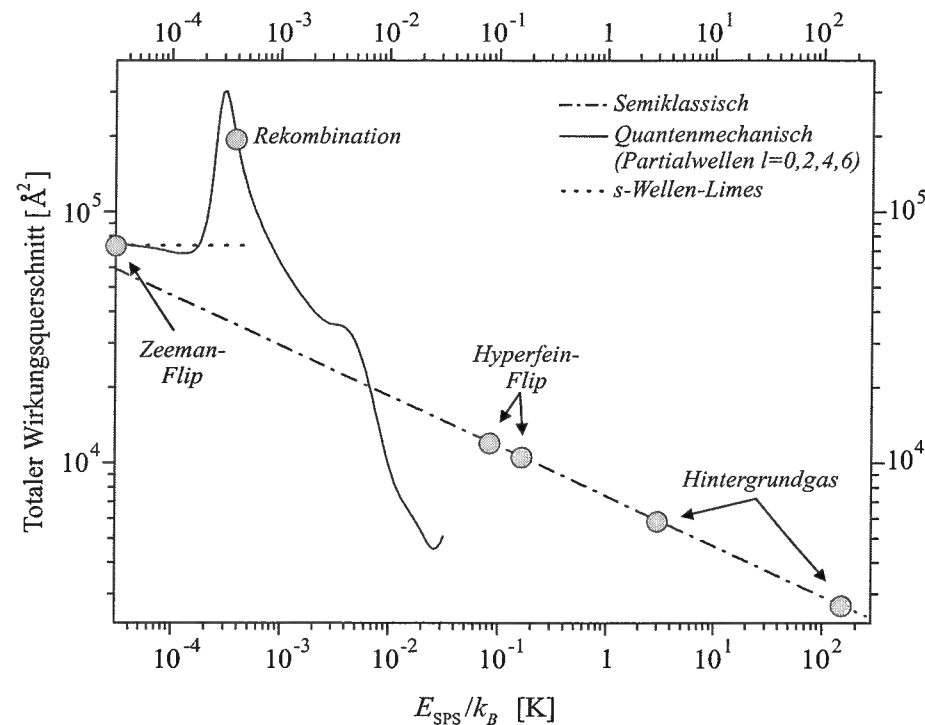


Abbildung 10.2: Totaler Wirkungsquerschnitt für Stöße zwischen Zerfallsprodukten und ultrakalten Atomen, in Abhängigkeit der Energie im Schwerpunktsystem.

Totaler Wirkungsquerschnitt

Die Stoßwahrscheinlichkeit hängt schließlich vom totalen Wirkungsquerschnitt ab, der, wie Abbildung 10.2 zu entnehmen ist, eine starke Energieabhängigkeit aufweist. Daher wird auch die Stoßwahrscheinlichkeit der einzelnen Zerfallsprodukte stark variieren:

- Hintergrundgasstöße finden im Schwerpunktsystem bei einer Energie von ca. $k_B \times 150$ K statt und lassen sich in der semiklassischen Streutheorie behandeln (vgl. Anhang C). Nach Gleichung (C.8) beträgt die Energie, die im Mittel auf das kalte Atom (im Laborsystem) übertragen wird, etwa $k_B \times 6$ K, das einfallende Atom setzt seine Bewegung also im Mittel nahezu ungebrems fort. Sekundärstöße beider Produkte lassen sich daher ebenfalls in der semiklassischen Näherung behandeln.
- Die bei Spinrelaxationsstößen freigesetzte Energie entspricht, je nach dem, ob es sich um sog. Zeeman- oder Hyperfein-Flips handelt, $\mu_B \tilde{B}_0$ bzw. $2 \times \mu_B \tilde{B}_0$ oder $2 \times a_{\text{HF}}$ bzw. $4 \times a_{\text{HF}}$ (siehe Tabelle 3.1 in Kapitel 3.2.5). Sie wird zu gleichen Teilen auf die beiden Atome übertragen, die an dem Stoß beteiligt sind. Da das Offset-Feld mit $\tilde{B}_0 \simeq 2$ G gering ist, Rubidium hingegen mit $a_{\text{HF}} = h \times 3417$ GHz eine verhältnismäßig große Hyperfeinaufspaltung besitzt, müssen die Fälle gesondert betrachtet werden. Der Wirkungsquerschnitt für Sekundärstöße jener Atome, deren Bewegungsenergie auf einen Hyperfein-Flip zurückzuführen ist, wird semiklassisch berechnet. Dagegen besitzen die Produkte eines Zeeman-Flips so wenig

j	Herkunft der Teilchen	E_j/k_B	$\sigma(E_j)$ [Å²]	$\langle nl \rangle_j \sigma(E_j)$	$p(E_j)$
1	Kondensat	$\leq 1 \mu\text{K}$	76.000	1,4	$p_s = 0,75$
1	Hintergrundgas	150 K	2.600	0,05	0,05
		3 K	5.930	0,1	0,1
2	Spinrelaxation	164 mK	10.600	0,21	0,19
		82 mK	12.200	0,21	0,19
		34 μK	76.000	1,59	0,8
		17 μK	76.000	1,59	0,8
3	Rekombination	400 μK	170.000	3,81	0,98

Tabelle 10.1: Stoßwahrscheinlichkeiten zu Beginn der Speicherzeit. E_j stellt die Energie der Stöße im Schwerpunktsystem dar.

Energie, daß ihre Sekundärstöße im s-Wellen-Regime mit dem energieunabhängigen Stoßquerschnitt $\sigma_s = 8\pi a^2$ stattfinden.

- Es zeigt sich schließlich, daß die bereits in Kapitel 3.1.2 erwähnte d-Wellen-Resonanz im Stoßquerschnitt von Rubidium Sekundärstöße von Rekombinationsprodukten stark begünstigt: Bei der Rekombination wird die Energie $E_R = 2/3 \times k_B \times 1,2$ mK auf das Atom übertragen, das die Energie- und Impulserhaltung bei dem Prozeß ermöglicht (vgl. Kapitel 3.3). Im Schwerpunktsystem stößt dieses anschließend mit einem kalten Atom bei einer Energie von $k_B \times 400 \mu\text{K}$. Ein Blick auf Abbildung 10.2 lehrt, daß der Wirkungsquerschnitt für einen solchen Prozeß etwa zweieinhalbfach größer ist als jener für elastische Stöße im s-Wellen-Regime. Da über den Wirkungsquerschnitt ultrakalter Sekundärstöße zwischen Molekülen im höchsten gebundenen Zustand und Atomen wenig bekannt ist, können derartige Prozesse im folgenden nicht berücksichtigt werden, obwohl davon auszugehen ist, daß sie eine nicht minder wichtige Rolle spielen. Einen Hinweis darauf findet man in Referenz [179]: Für Stöße zwischen Rb-Atomen und Rb-Molekülen in einem geringfügig stärker gebundenen Zustand wird dort die komplexe Streulänge $a_{ma} = a'_{ma} + ia''_{ma}$ mit $a'_{ma} = -180 \pm 150 a_0$ und $a''_{ma} < 110 a_0$ angegeben (vgl. dazu Kapitel 3.2.5). Zwar ermitteln die Autoren für den Imaginärteil der Streulänge lediglich eine obere Grenze, sie kommen jedoch auch zu dem Schluß, daß ein Sekundärstoß des Moleküls mit hoher Wahrscheinlichkeit dessen Abregung zur Folge hat und somit inelastisch verläuft. Da durch Stoßabregung Energien in der Größenordnung von $k_B \times 0,1$ K freigesetzt werden, kann man zumindest davon ausgehen, daß der Wirkungsquerschnitt für weitere Sekundärstöße signifikant kleiner ist.

Die in Abbildung 9.3 dargestellte Lebensdaueremessung wurde an Kondensaten durchgeführt, die zu Beginn der Speicherzeit aus $1,1 \times 10^6$ Atomen bestehen. Mit den Oszillationsfrequenzen $\omega_z = 2\pi \times 24,5$ Hz und $\omega_\perp = 2\pi \times 227$ Hz entspricht dies einer zentralen Dichte von $n_p = 6,4 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. Die Stoßwahrscheinlichkeiten, die sich unter diesen Bedingungen ergeben, sind in Tabelle 10.1 zusammengefaßt. Sie bestätigen die Annahme, daß Sekundärstöße den Zerfall des Kondensats beschleunigen: Rekombinationsprozesse werden offenbar mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit von mindestens einem

Sekundärstoß gefolgt. Die Energie, die dabei auf das ultrakalte Atom übertragen wird, übertrifft nicht allein das chemische Potential des Kondensats, sondern auch die Potentialtiefe um ein Vielfaches. Zu Beginn der Speicherzeit führt Rekombination daher zum Verlust von mindestens vier Atomen. Eine ähnliche Situation liegt bei inelastischen Zweikörper-Stößen vor, die zu einem Zeeman-Flip führen: Mit der beachtlichen Wahrscheinlichkeit von 0,8 treffen die Stoßprodukte jeweils auf ein kondensiertes Atom, bevor sie die Wolke verlassen. Im Mittel gehen bei dem Prozeß nicht zwei sondern mindestens 3,6 Atome verloren. Günstig wirkt sich in diesem Zusammenhang allerdings aus, daß Zeeman-Flips einen Beitrag von lediglich 10 % zur Spinrelaxationsrate stellen, die im Falle von ^{87}Rb im Zustand $|2,2\rangle$ ohnehin vergleichsweise gering ist (vgl. Kapitel 3.2 bzw. Tabelle 3.1).

10.2 Entstehung von Stoßlawinen

Angesichts der hohen Wahrscheinlichkeit, mit der insbesondere die Produkte der Rekombination auf kondensierte Atome stoßen, muß damit gerechnet werden, daß auch die Produkte eines ersten Sekundärstoßes das Kondensat nicht ungehindert verlassen können. In diesem Zusammenhang spielt die Stoßenergie eine Schlüsselrolle. Allgemein ist bei hohen Energien bereits die Wahrscheinlichkeit $p(E)$ für einen ersten Sekundärstoß klein. Da der differentielle Wirkungsquerschnitt Vorwärtsstreuung stark begünstigt, ist zudem der Energieübertrag ΔE im Mittel gering (vgl. Abbildung C.1 in Anhang C). Daher besitzt das energiereichere der beiden Teilchen nach einem Sekundärstoß einen unverändert kleinen Wirkungsquerschnitt für einen weiteren Stoß, der wegen $p(E)p(E - \langle\Delta E\rangle) \simeq p(E)^2 \ll 1$ sehr unwahrscheinlich und somit vernachlässigbar ist. Zu beachten ist bestenfalls das langsamere Produkt des ersten Sekundärstoßes, dessen Wirkungsquerschnitt signifikant größer sein kann. Anders im Falle niedriger Stoßenergien: Wie in Abbildung 3.3 (Kapitel 3.1.2) zu erkennen ist, wird der differentielle Streuquerschnitt im Schwerpunktsystem mit sinkender Energie zunehmend isotrop, bis schließlich im s-Wellen-Regime die Energie des „einfallenden“ Teilchens (im Mittel) zu gleichen Teilen auf die Stoßpartner übertragen wird. Zudem sind hier der totale Wirkungsquerschnitt und die Stoßwahrscheinlichkeit p_s groß und energieunabhängig. Nach dem ersten Sekundärstoß müssen daher *zwei* Atome mit einem identischen Wirkungsquerschnitt berücksichtigt werden: Liegen nach dem ersten Stoß im Mittel $2p_s$ Atome vor, so sind es nach dem jeweiligen zweiten $4p_s^2$, nach dem dritten $8p_s^3$ und so fort. Offenbar ist nun von entscheidender Bedeutung, ob die Stoßwahrscheinlichkeit größer oder kleiner als 0,5 ist. Ist ersteres der Fall, wächst mit jedem Stoß die mittlere Anzahl von Atomen, für die ein weiterer Sekundärstoß gleich wahrscheinlich ist: eine Stoßlawine nimmt ihren Lauf. In diesem Zusammenhang läßt sich die *kritische Opazität*

$$\mathcal{O}_c = 0,693 \quad \text{mit} \quad p_s[\mathcal{O}_c] = 1 - e^{-\mathcal{O}_c} = 0,5 \quad (10.12)$$

definieren, die einer Stoßwahrscheinlichkeit von 0,5 entspricht. Sie stellt eine Analogie zu der kritischen Masse dar, die am Ursprung einer nuklearen Kettenreaktion steht.

Auf die Lebensdauer des Kondensats wirken sich Stoßlawinen dramatisch aus. Ist die Opazität gering, kann die Energie, die bei inelastischen Stößen freigesetzt wird, von den

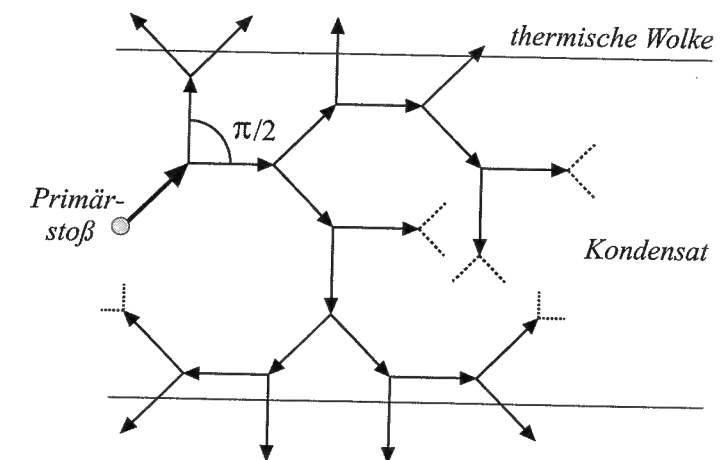


Abbildung 10.3: Ausbreitung einer Stoßlawine in einem homogenen Kondensat, dessen radiale Ausdehnung viermal größer als die mittlere freie Weglänge seiner Atome ist.

Stoßprodukten abgeführt werden. Ist die Opazität hingegen „überkritisch“, bewirken Stoßlawinen, daß ein erheblicher Teil dieser Energie im Kondensat dissipiert wird. Die Folge ist ein hoher Teilchenverlust. Dabei gehen nicht allein jene Atome verloren, die aus dem Kondensat mit einer Energie austreten, die zur Überwindung der Potentialtiefe ausreicht (sog. *direkte Verluste*). Bei jedem Sekundärstoß nimmt die Energie der Projektile im Mittel um einen Faktor Zwei ab. Dadurch entstehen auch Atome, die in dem endlich tiefen Potential gespeichert bleiben und anschließend durch elastische Stöße mit dem kalten Gas vollständig thermalisieren. Dies führt zu einer Heizrate, die entweder unmittelbar die Abnahme der relativen Grundzustandsbesetzung zur Folge hat oder durch Verdampfung kompensiert werden muß, was wiederum mittelbar den Verlust von Teilchen bedeutet (*indirekte Verluste*). Eine relevante Energieskala wird daher nicht allein durch die Potentialtiefe vorgegeben, sondern auch durch das chemische Potential des Kondensats.

Wie realistisch ein solches Szenario ist, hängt davon ab, wie sich die freie Weglänge der Atome zu den Dimensionen des Kondensats verhält, wie bald also eine Stoßlawine den Rand des Kondensats erreicht. Auch hier kommt der Isotropie der Streuung bei niedrigen Energien eine wichtige Bedeutung zu. Im Laborsystem entspricht sie einem mittleren Streuwinkel von $\pi/4$. Dadurch „fächert“ die Stoßlawine schnell auf und breitet sich nahezu isotrop aus. Insbesondere werden bald Teilchen erzeugt, deren Trajektorien zurück zum Wolkenzentrum führen. Das bedeutet, daß die räumliche Korrelation der Sekundärstöße mit dem Ort, an dem der auslösende Primärstoß stattgefunden hat, bereits nach wenigen Stößen verloren geht. Dieser Effekt ist in Abbildung 10.3 veranschaulicht. Dargestellt ist die Ausbreitung einer Stoßlawine in einem zweidimensionalen, homogenen Kondensat, in dem die mittlere freie Weglänge von Atomen „nur“ seiner halben radialen Ausdehnung entspricht. Offenbar wäre unter diesen Voraussetzungen bereits mit einem beachtlichen Teilchenverlust zu rechnen.

Im Experiment ist das Kondensat allerdings inhomogen. Eine moderate Opazität bedeutet in diesem Falle nicht etwa, daß der erste Sekundärstoß am Rand des Kondensats stattfindet, wo die Ausbreitung von Stoßlawinen geometrisch eingeschränkt wäre. Die

Opazität bestimmt allein, wie hoch die freie Weglänge und die Stoßwahrscheinlichkeit *im Mittel* sind. Auch ein Stoß, der insgesamt unwahrscheinlich ist, findet jedoch präferentiell im Zentrum der Wolke statt, wo die Dichte maximal ist. Einen ersten Hinweis darauf, daß Stoßlawinen unter den in Tabelle 10.1 zusammengefaßten Voraussetzungen eine Rolle spielen, erhält man durch den Vergleich der Dimensionen $W_{\perp} = 9,5 \mu\text{m}$ und $W_z = 88 \mu\text{m}$ des Kondensats mit den freien Weglängen $(n_p \sigma(E_R))^{-1} = 0,9 \mu\text{m}$ und $(n_p \sigma_s)^{-1} = 2 \mu\text{m}$, die Rekombinationsprodukte bzw. Atome mit extrem geringer Energie im Wolkenzentrum besitzen. Wie hoch die Anzahl von Stößen ist, an denen *ein* Zerfallsprodukt im Mittel beteiligt ist, bevor es das Gas verläßt, kann unter der Voraussetzung abgeschätzt werden, daß alle Stöße im s-Wellen-Regime stattfinden und in guter Näherung unkorreliert sind. Dann findet jeder Stoß mit der Wahrscheinlichkeit p_s statt, und die mittlere Anzahl von Stößen ergibt sich zu

$$\langle m \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m p_s^m (1 - p_s) = \frac{p_s}{1 - p_s}. \quad (10.13)$$

An dieser Stelle zeigt sich erneut, daß es zu Stoßlawinen kommt, sobald die kritische Opazität erreicht wird. Dann stößt jedes Teilchen im Mittel genau einmal.

Daß es sich bei Gleichung (10.13) um eine konservative Abschätzung handelt, zeigt das folgende Zahlenbeispiel: Bei den typischen Parametern $T = 1 \mu\text{K}$, $n_p = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $\nu_{\perp} = 200 \text{ Hz}$ und $\epsilon = 0,1$ beträgt die Opazität einer thermischen Wolke $\mathcal{O}_s = 0,55$, ist also „unterkritisch“ und entspricht $\langle m \rangle = 0,7$. Es ist sinnvoll, dieses Ergebnis mit der mittleren Anzahl von Stößen pro Viertel Oszillationsperiode zu vergleichen, die sich aus dem Zusammenhang (10.8) zwischen der Opazität und der Stoßrate ergibt. Dabei muß beachtet werden, daß das Beersche Gesetz von ruhenden Stoßpartnern ausgeht, während die Stoßrate mit der Relativgeschwindigkeit ausgewertet wird und somit bewegte Teilchen voraussetzt³. Mit $\gamma_{\text{el}}/(4\sqrt{2}\nu_{\perp}) = 1,1$ liefert diese Abschätzung eine höhere Anzahl von Stößen, obwohl nur der „ungünstigste“ Fall betrachtet wurde, in dem das Teilchen das Gas auf dem kürzesten Weg verläßt. Auch wenn die „klassische“ Stoßrate mit zunehmender Wechselwirkung ihre Aussagekraft verliert und im Kondensat ohnehin bedeutungslos ist, so wird hier doch deutlich, daß es bereits bei moderaten Opazitäten zu kaskadierenden Sekundärstößen kommt. Unter den in Tabelle 10.1 zusammengefaßten Voraussetzungen ist die kritische Opazität mit $\mathcal{O}_s = 1,4$ weit überschritten und entspricht $\langle m \rangle = 3$. Daher muß mit Stoßlawinen gerechnet werden. Im folgenden wird ein Modell eingeführt und diskutiert, in dessen Rahmen sich die Auswirkungen von Lawinen quantifizieren lassen.

10.3 Ein einfaches Modell

Obwohl davon auszugehen ist, daß Stoßlawinen unter den gegebenen experimentellen Voraussetzungen hauptsächlich durch Rekombinationsprozesse und Zeeman-Flips ausgelöst werden, sind im folgenden alle Zerfallsprozesse als Auslöser berücksichtigt. Damit werden

³ Die Relativbewegung bewirkt, daß die Strecke $\langle v \rangle/(4\nu_{\perp})$, die ein Teilchen der mittleren Dichte $\langle n \rangle$ ausgesetzt ist, effektiv um den Faktor $\sqrt{2}$ länger wird.

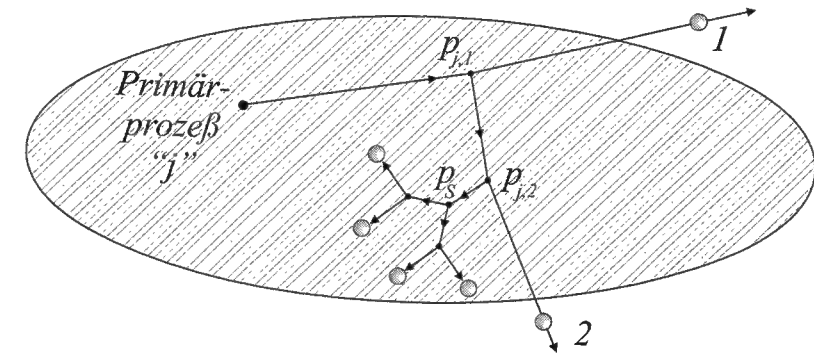


Abbildung 10.4: Im Modell berücksichtigtes Szenario für den Fall, daß Stoßlawinen erst nach zwei Sekundärstößen ausgelöst werden können. Es wird vorausgesetzt, daß die mit „1“ und „2“ bezeichneten Atome kein weiteres Mal stoßen.

auch Situationen betrachtet, in denen die Opazität der Wolke selbst für Atome höherer Energien nicht vernachlässigbar ist. Als Ausgangspunkt dienen daher die Verlustraten

$$\dot{N}_j = -K_j \int n^j(\vec{r}) d^3r = -K_j N \langle n^{j-1} \rangle = -c_j K_j N n_p^{j-1} \quad (10.14)$$

mit $j = 1, 2, 3$ und den bereits in den Kapiteln 9.2, 3.2 und 3.3 eingeführten Ratenkonstanten K_j . Für den Fall einer parabelförmigen Dichteverteilung wurden die numerischen Faktoren c_j im Zusammenhang mit Gleichung (9.1) angegeben, für eine Gauß-Verteilung lauten sie $c_1 = 1$, $c_2 = 1/\sqrt{8}$ und $c_3 = 1/\sqrt{27}$. Wird die Bose-Verteilung durch die Darstellung (10.10) approximiert, liefern die Integrale aus Gleichung (10.14) jeweils Polynome endlicher Ordnung in der Fugazität $\tilde{z}$.

Mit der Rate $-\dot{N}_j$ entstehen im Gas Zerfallsprodukte der charakteristischen Energie $E_{j,1}$ (vgl. Tabelle 10.1). Impliziert diese bereits s-Wellen-Streuung, wird die Bezeichnung $E_{j,1} \equiv E_{j,s}$ eingeführt, und die Zerfallsprodukte können Stoßlawinen auslösen. Anderenfalls muß mindestens ein erster Sekundärstoß stattfinden, bei dem ein Atom „erzeugt“ wird, das seinerseits eine Lawine im s-Wellen-Regime auslösen kann. Wie weiter oben erläutert, ist es im Falle anisotroper Streuung stets wahrscheinlicher, daß das langsamere der beiden Atome, die nach dem ersten Sekundärstoß vorliegen, auf ein weiteres Atom trifft, wohingegen Kollisionen des energiereicheren Teilchens (näherungsweise) vernachlässigt werden können. Entscheidend ist daher der mittlere Energieübertrag $\langle \Delta E_{j,1} \rangle$ des ersten Sekundärstoßes, der gleichzeitig die Energie $E_{j,2}$ des nächsten Stoßes darstellt⁴. Ist das s-Wellen-Regime mit dieser Energie immer noch nicht erreicht, kann eine Stoßlawine frühestens vom langsameren Produkt eines zweiten Sekundärstoßes ausgelöst werden und so fort. Dieses Szenario ist in Abbildung 10.4 veranschaulicht. Dargestellt ist der Fall, in dem es nach zwei Sekundärstößen zur Ausprägung einer Stoßlawine kommt. In der eben diskutierten Näherung setzt dies voraus, daß zuvor genau zwei Teilchen verloren gegangen sind, ohne ihrerseits Lawinen auszulösen. Daraus ergibt sich eine untere Grenze für den Teilchenverlust. Das Atom, das die Stoßlawine letztendlich auslöst, wird mit

⁴ Die Berechnung der Energie, die im Mittel bei einem elastischen Stoß übertragen wird, ist in Anhang C beschrieben.

der Wahrscheinlichkeit $\tilde{p}_j = p_{j,1}p_{j,2}$ erzeugt, wobei die Notation $p(E_{j,i}) \equiv p_{j,i}$ eingeführt wurde. Gleichzeitig gehen im Mittel $\tilde{g}_j = (1 - p_{j,1}) + 2p_{j,1}(1 - p_{j,2}) + 2p_{j,1}p_{j,2} = 1 + p_{j,1}$ Atome verloren, bevor es zu einer Stoßlawine kommen kann. Im allgemeinen Fall, in dem $m > 1$ Sekundärstöße erforderlich sind, um ein Atom zu erzeugen, dessen nächster Stoß im s-Wellen-Regime stattfinden würde, beträgt der Verlust im Mittel

$$\begin{aligned} \tilde{g}_j &= 1(1 - p_{j,1}) + 2p_{j,1}(1 - p_{j,2}) + \dots + m(1 - p_{j,m}) \prod_{i=1}^{m-1} p_{j,i} + m \prod_{i=1}^m p_{j,i} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{m-1} \prod_{i=1}^l p_{j,i}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Anhand der ersten Zeile von Gleichung (10.15) läßt sich leicht verifizieren, daß die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, mit denen zwischen 1 und m Atome verloren gehen, in der Tat Eins beträgt. Das die Lawine auslösende Atom selbst liegt schließlich mit der Wahrscheinlichkeit

$$\tilde{p}_j = \prod_{i=1}^m p_{j,i} \quad (10.16)$$

vor. Auf diese Weise läßt sich jeder Verlustrate $\dot{N}_j$ eine Rate $-\tilde{p}_j \dot{N}_j$ zuordnen, mit der Atome erzeugt werden, die prinzipiell Stoßlawinen auslösen können. Unabhängig von der „Zukunft“ dieser Atome hat die Verlustrate bereits zu diesem Zeitpunkt auf $\tilde{g}_j \dot{N}_j$ zugenommen. In der Stoßlawine wird anschließend maximal die Energie $E_{j,m+1} \equiv E_{j,s}$ dissipiert, also unter Umständen nur ein Bruchteil der ursprünglichen Energie des Zerfallsproduktes.

Die Berechnung der Stoßwahrscheinlichkeiten $p_{j,i}$ bedarf nun einer genaueren Betrachtung. In Abschnitt 10.1 wurde bei der Mittelung der Säulendichte, die für den ersten Sekundärstoß relevant ist, die spezifische Ortsverteilung der Primärstöße berücksichtigt. In nächster Konsequenz müßte die Säulendichte für alle folgenden Stöße unter Berücksichtigung der räumlichen Korrelationen gemittelt werden. Es müßten also, mit anderen Worten, die Trajektorien der Produkte aufeinanderfolgender Stöße verfolgt werden. Nicht allein des hohen numerischen Aufwandes wegen wird von einem solchen Vorgehen abgesehen. Wie bereits in Abschnitt 10.2 erläutert, wirkt sich die Isotropie der Streuung bei niedrigen Energien dahingehend aus, daß räumliche Korrelationen zwischen Stößen schnell verloren gehen. Dadurch läßt sich die Isotropie der Streuung näherungsweise vom Schwerpunktsystem auf das Laborsystem übertragen. Offenbar ist eine solche Näherung gut, wenn die Teilchen im Mittel an mehreren Stößen beteiligt sind⁵. Unter diesen Voraussetzungen spielt der Gesamtimpuls aller an der Lawine beteiligten Atome (der dem Impuls des auslösenden Teilchens entspricht) keine entscheidende Rolle mehr: Noch bevor die Stoßlawine aufgrund dieses Gesamtimpulses den Rand des Kondensats erreicht, besitzen viele ihrer Atome einen individuellen Impuls, der zum dichten Zentrum der Wolke gerichtet ist. Zu beachten ist, daß die endliche Ausdehnung des Kondensats durch die Annahme isotroper Streuung nicht vernachlässigt wird, da der Mittelung der Säulendichte die exakte Dichteverteilung zugrundeliegt. Unter den hier realisierten Voraussetzungen erscheint

⁵ Exakt ist sie stets für jene Teilchen der Lawine, deren Energie geringer als die Potentialtiefe ist. Für diese Teilchen besitzt das Kondensat eine quasi unendliche Ausdehnung.

j	Primärstoß	K_j	i	$E_{j,i}/k_B$ [mK]	$\sigma(E_{j,i})$ [$\text{\AA}^2$]
1	Hintergrundgas	$1/(39\text{ s})$	1	3×10^3	5.930
			2	75	12.400
			3	3,75	32.300
			(4)	$0,38 \equiv E_{1,s}$	$\geq \sigma_s$
2	1×Zeeman-Flip	$1,4 \times 10^{-18} \text{ cm}^3/\text{s}$	(1)	$0,017 \equiv E_{2,s}^z$	$76.000 = \sigma_s$
	2×Zeeman-Flip	$3,7 \times 10^{-17} \text{ cm}^3/\text{s}$	(1)	$0,034 \equiv E_{2,s}^{zz}$	$76.000 = \sigma_s$
	1×Hyperfein-Flip	$2,2 \times 10^{-16} \text{ cm}^3/\text{s}$	1	82	12.200
			2	3,75	32.300
			(3)	$0,38 \equiv E_{2,s}^h$	$\geq \sigma_s$
	2×Hyperfein-Flip	$1,3 \times 10^{-16} \text{ cm}^3/\text{s}$	1	164	10.600
			2	6	21.700
			(3)	$0,4 \equiv E_{2,s}^{hh}$	$\geq \sigma_s$
3	Rekombination*	$0,6 \times 10^{-29} \text{ cm}^6/\text{s}$	(1)	$0,4 \equiv E_{3,s}$	$\geq \sigma_s$

Tabelle 10.2: Ratenkonstanten der Primärstöße und Energien bzw. Wirkungsquerschnitte der ersten Sekundärstöße, die erforderlich sind, um Teilchen mit Energien $E_{j,s}$ zu erzeugen. Die mit (i) bezeichneten Stöße werden bereits der Stoßlawine zugeordnet und gehen also nicht in die Berechnung von $\tilde{p}_j$ und $\tilde{g}_j$ ein. (*): Angegeben ist hier $K_3/3$, da von den Rekombinationsprodukten nur das Atom berücksichtigt wird. K_2 und K_3 sind den Referenzen [46] und [72] entnommen.

die Vernachlässigung von Korrelationen zwischen Stößen zumindest zum Zeitnullpunkt gerechtfertigt, wie die Ausführungen in Abschnitt 10.2 deutlich machen.

Ist die oben diskutierte Näherung zulässig, vereinfacht sich die Beschreibung von Stoßlawinen erheblich, da für jeden Stoß, unabhängig von der Anzahl vorangegangener Stöße, die einfach gemittelte Säulendichte $\langle nl \rangle_1$ angesetzt werden kann. Aus Gründen der Konsistenz sind im folgenden auch die jeweils ersten Stöße der Zerfallsprodukte in der gleichen Näherung behandelt, was für $j = 2, 3$ zu einer leichten Unterschätzung der Stoßwahrscheinlichkeit führt. Die Unterscheidung von Primärstößen bezüglich ihrer Ordnung j beschränkt sich damit auf die Berücksichtigung der spezifischen Energie der Stoßprodukte (also ihrer spezifischen differentiellen bzw. totalen Wirkungsquerschnitte) oberhalb einer Energie von $k_B \times 0,75$ mK. Wie in Abbildung 10.2 zu erkennen ist, gilt nämlich unterhalb dieser Energie $\sigma(E) \geq \sigma_s$, so daß bereits vor dem Erreichen des s-Wellen-Regimes beide Produkte eines Sekundärstoßes berücksichtigt werden müssen und somit Stoßlawinen auslösen können. Der Einfachheit halber wird für alle Stöße im Bereich $E \leq k_B \times 0,75$ mK der Wirkungsquerschnitt σ_s angesetzt, was erneut eine konservative Abschätzung der Stoßwahrscheinlichkeit nach sich zieht. In Tabelle 10.2 sind die Ratenkonstanten der Primärprozesse sowie die Wirkungsquerschnitte und die mittleren Energieüberträge jener Sekundärstöße zusammengefaßt, die stattfinden müssen, bevor es zu Stoßlawinen kommen

kann⁶. Diese Größen werden benötigt, um die Raten $-\tilde{p}_j \dot{N}_j$ und $\tilde{g}_j \dot{N}_j$ zu berechnen, mit denen Stoßlawinen ausgelöst werden bzw. Atome verloren gehen, noch bevor es zu Stoßlawinen kommt. Was nun noch fehlt, ist die Beschreibung der Verluste, die durch die Stoßlawine selbst zustandekommen.

10.3.1 Direkte und indirekte Verluste

Findet jeder Stoß unterhalb der Energie $E_{j,s}$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $p_s = 1 - \exp[-\langle nl \rangle_1 \sigma_s]$ statt, lassen sich die Verluste leicht berechnen, die durch Stoßlawinen zustandekommen. Nach dem ersten Stoß im s-Wellen-Regime besteht die Lawine im Mittel aus $2p_s$ Atomen der Energie $E_{j,s}/2$, deren jedes entweder mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - p_s)$ verloren geht oder mit der Wahrscheinlichkeit p_s ein weiteres Mal stößt. Da die Energie bei jedem weiteren Stoß im Mittel halbiert wird, bietet sich an, die Verluste nach den Stufen k aufzuschlüsseln, die den Stoßenergien $E_{j,s}/2^k$ zugeordnet werden können. Im Anschluß an einen Zerfallsprozeß der Ordnung j werden diese Stufen mit den Wahrscheinlichkeiten $\tilde{p}_j p_s^k$ und im Mittel von jeweils $\tilde{p}_j p_s^k 2^k$ Atomen erreicht. Somit läßt sich jeder Stufe die Verlustrate $\dot{N}_j \tilde{p}_j p_s^k 2^k (1 - p_s)$ zuordnen. Stoßlawinen bewirken daher eine Verstärkung der Raten (10.14) gemäß

$$\dot{N}_{j,\text{aval}} = \dot{N}_j \left[\tilde{g}_j + \tilde{p}_j (1 - p_s) \sum_{k=0}^{k_j^{\max}} 2^k p_s^k \right]. \quad (10.17)$$

Prinzipiell darf die geometrische Reihe in Gleichung (10.17) höchstens bis zu einer Stufe $k_j^{\max} \approx \log_2[E_{j,s}/\mu]$ summiert werden, in der die Energie $E_{j,s}$ des auslösenden Atoms auf die Größenordnung des chemischen Potentials des Kondensats heruntergeteilt wurde⁷. Die Speicherung der Atome in einem Potential der endlichen Tiefe E_{trap} erfordert jedoch einen früheren Abbruch der Summation bei dem Wert

$$k_j^{\max} \leq \log_2 \left[\frac{E_{j,s}}{E_{\text{trap}}} \right]. \quad (10.18)$$

Atome, die das Potential nicht überwinden können, deponieren nämlich ihre gesamte Energie in der kalten Wolke und bewirken eine Heizrate, die zu den bereits erwähnten indirekten Verlusten führt. Dieser Effekt ist in Gleichung (10.17) nicht berücksichtigt und muß gesondert behandelt werden. Die Abbruchbedingung (10.18) entspricht daher einer Beschränkung auf direkte Verluste.

Für die Rate indirekter Verluste läßt sich eine einfache Abschätzung finden, wenn die Temperatur des Gases, wie meistens der Fall, durch die Rf-Abschirmung festgelegt ist.

⁶ Bei den Ratenkonstanten handelt es sich um jene für Stöße kohärenter Atome (vgl. Kapitel 3.2.6 und 3.3).

⁷ Teilchen geringerer Energien verursachen kollektive Anregungen des Kondensats. Deren Dämpfung resultiert zwar ebenfalls in Verlusten, kann jedoch im Rahmen des hier diskutierten Modells nicht beschrieben werden.

Dann wird besagte Heizrate durch Verdampfung (also eine „Kühlrate“) genau kompensiert. Atome, die in der $(k_j^{\max} + 1)$ -ten Stufe der Stoßlawine entstehen, also gerade noch gespeichert bleiben, dissipieren ihre Energie $E_{j,k_j^{\max}+2} \simeq E_{\text{trap}}/2$ in der kalten Wolke. Verdampfte Atome entziehen hingegen der Wolke näherungsweise die Energie E_{trap} . Soll kein Energietransfer stattfinden und somit die Temperatur konstant bleiben, müssen etwa halb so viele Atome verdampft werden, wie in der $(k_j^{\max} + 1)$ -ten Stufe der Lawine entstehen. Somit läßt sich die Rate indirekter Verluste zu

$$\dot{N}_{j,\text{heat}} \simeq \frac{1}{2} \tilde{p}_j \dot{N}_j 2^{(k_j^{\max}+1)} p_s^{(k_j^{\max}+1)} \quad (10.19)$$

abschätzen. Die gesamte Verlustrate ergibt sich schließlich zu

$$\dot{N} = \sum_j (\dot{N}_{j,\text{aval}} + \dot{N}_{j,\text{heat}}). \quad (10.20)$$

Da die Auswirkungen des Moleküls, das bei der Rekombination entsteht, aus den in Abschnitt 10.1 erläuterten Gründen im folgenden nicht berücksichtigt werden, ist in den Gleichungen (10.17) und (10.19) die Rate $\dot{N}_3/3$ (bzw. die Ratenkonstante $K_3/3$) anzusetzen. Zur obigen Verlustrate muß dann der von Lawinen unbeeinflusste Term $2\dot{N}_3/3$ addiert werden.

10.3.2 Prognosen

In Abbildung 10.5 sind die Prognosen des Modells zusammengefaßt. Das linke Schaubild zeigt die durch Stoßlawinen bedingte Verstärkung $(\sum_j \dot{N}_{j,\text{aval}} + \dot{N}_{j,\text{heat}})/(\sum_j \dot{N}_j)$ der gesamten Verlustrate eines ^{87}Rb -Kondensats im Zustand $|F=2, m_F=2\rangle$ als Funktion seiner Teilchenzahl bzw. Opazität (mit $\mathcal{O}_s \propto N_0^{3/5}$). Potentialtiefe und Oszillationsfrequenzen, die im Schaubild angegeben sind, entsprechen der experimentellen Situation. Erwartungsgemäß beträgt die Verstärkung im Limes geringer Opazität Eins und steigt nach Überschreiten der kritischen Opazität schnell an. Während ihr Verlauf im Bereich $\mathcal{O}_s \lesssim 3$ durch die von p_s abhängenden Terme in (10.17) und (10.19) bestimmt ist, ist die Verstärkung im Bereich hoher Opazitäten, wo $p_s \approx 1$ gilt, näherungsweise durch $(\sum_j \dot{N}_j \tilde{p}_j E_{j,s}/E_{\text{trap}})/(\sum_j \dot{N}_j)$ gegeben, wie sich durch Einsetzen des Ausdrucks (10.18) in Gleichung (10.19) verifizieren läßt. Die Verstärkung steigt daher hier nur noch langsam mit der Opazität. Im hydrodynamischen Regime mit $\mathcal{O}_s \gg 1$ müssen schließlich, anders als bei der Herleitung der Verlustraten geschehen, auch die energiereicheren Produkte der ersten Sekundärstöße berücksichtigt werden. Unter diesen Bedingungen würden die Zerfallsprodukte ihre beträchtliche Energie $E_{j,1}$ vollständig auf die kalte Wolke übertragen, wodurch es zu einem explosionsartigen Zerfall käme.

An Gleichung (10.17) ist zu erkennen, daß direkte Verluste für einen gegebenen Satz von $k_j^{\max} \geq 1$ bei einer bestimmten Opazität ein Maximum erreichen und schließlich für $\mathcal{O}_s \gg 1$, also $p_s \rightarrow 1$, verschwinden, ein Verhalten, daß sich auch in Abbildung 10.5 zeigt. Hier wird deutlich, daß die Rf-Abschirmung mit zunehmender Opazität ihrer wichtigsten Aufgabe immer weniger gerecht wird, nämlich die Zerfallsprodukte aus der

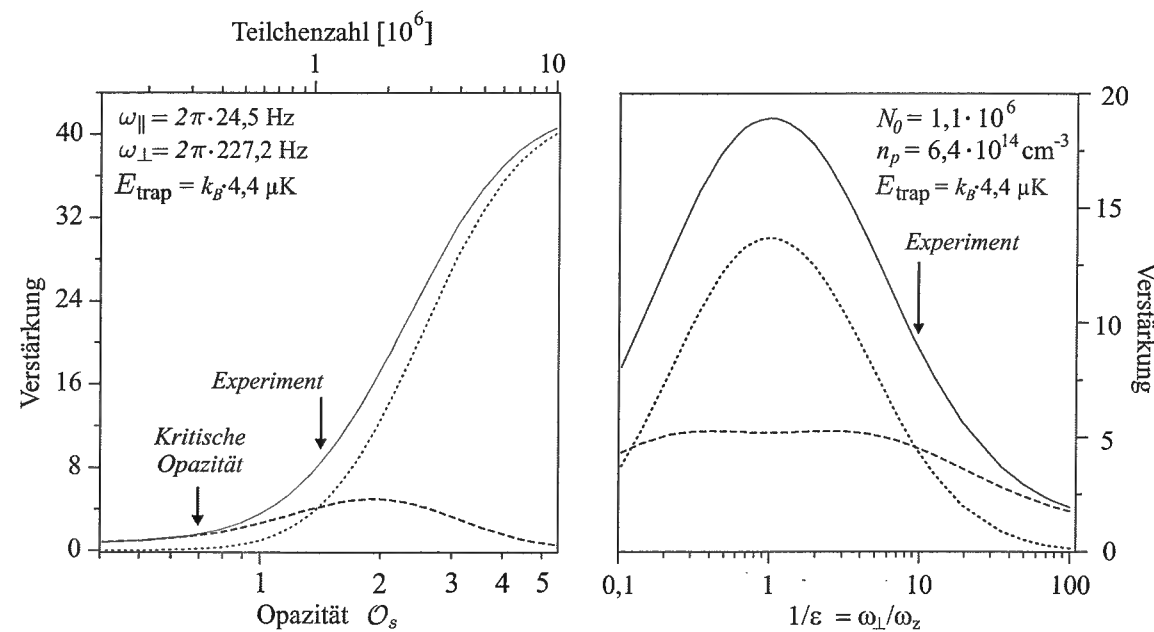


Abbildung 10.5: Vom Modell vorhergesagte Verstärkung der Verlustrate eines Kondensats infolge von Stoßlawinen (durchgezogene Kurven), aufgeschlüsselt nach den Beiträgen direkter und indirekter Verluste (gestrichelt bzw. gepunktet). Links: Abhängigkeit der Verstärkung von der Teilchenzahl bzw. der Opazität für die im Experiment realisierten Potentialparameter. Rechts: Verstärkung als Funktion der Anisotropie bei der im Experiment erreichten Peak-Dichte und Teilchenzahl, also konstanten Verlustraten N_j .

Fälle zu entfernen, bevor sie ihre Energie durch elastische Stöße teilweise oder ganz auf die kalten Atome übertragen können (vgl. Kapitel 9.2). Für die in Abbildung 10.5 gewählten Parameter entstehen in der Stoßlawine oberhalb von $O_s \approx 2$ immer seltener Teilchen, die energiereich genug sind, um das Potential zu verlassen. Für $p_s \rightarrow 1$ wird bei jedem Zerfall die Energie $\tilde{p}_j E_{j,s}$ in der Wolke dissipiert, unabhängig davon, ob diese abgeschirmt ist oder nicht. Die Abschirmung bewirkt jetzt allein die Konversion der zugeführten Energie in einen indirekten Teilchenverlust nach Gleichung (10.19).

Das rechte Schaubild in Abbildung 10.5 zeigt den Einfluß der Anisotropie des Speicherpotentials auf die Verstärkung der Verluste. Er ist auf den Beitrag des Integrals (10.6) zur Säulendichte (10.11) zurückzuführen. In der Simulation wurde ϵ unter der Randbedingung variiert, daß die zentrale Dichte des Kondensats bei vorgegebener Teilchenzahl konstant bleibt⁸. Damit bezieht sich die Verstärkung in diesem Fall auf eine gleichbleibende primäre Verlustrate. Offenbar ist ein sphärisch symmetrisches Potential am ungünstigsten, während Stoßlawinen in scheiben- bzw. zigarrenförmig eingeschlossenen Gasen gleichermaßen unterdrückt sind. Daraus lassen sich Lehren für das Experiment ziehen: Will man Korrekturen zur Mean-Field-Theorie (wie etwa die *quantum depletion* nach Gleichung (4.16)) untersuchen, ist eine extreme Anisotropie vorteilhaft, da sie sich günstig auf die

⁸ Teilchenzahl, Dichte und Potentialtiefe entsprechen auch hier den experimentell realisierten Werten.

Lebensdauer des Kondensats auswirkt, während sie den entscheidenden Parameter $\sqrt{n_p a^3}$ nicht beeinflusst. Eine Annäherung an das hydrodynamische Regime kann hingegen nicht durch die Wahl eines stark anisotropen Potentials gelingen, da man in diesem Fall gerade an einer Erhöhung der Stoßwahrscheinlichkeit interessiert ist, was im Gegenzug hohe Verluste durch Stoßlawinen impliziert.

Vom hydrodynamischen Regime sind heutige Experimente allerdings weit entfernt. Für viele Untersuchungen ist ohnehin eine lange Lebensdauer erstrebenswert. Um im Hinblick darauf die primären Verlustraten N_j gering zu halten, werden Messungen häufig an Kondensaten geringer Dichte (bzw. Teilchenzahl) durchgeführt. Aus diesem Grund spielen Stoßlawinen in den meisten bis dato erfolgreichen BEK-Experimenten eine untergeordnete Rolle und äußern sich (wenn überhaupt) in direkten Verlusten. Wie eben gesehen, ist jedoch weit vor dem Erreichen des hydrodynamischen Regimes bereits mit Stoßlawinen zu rechnen, und in der Umgebung der kritischen Opazität kann eine geringe Erhöhung der Anzahl kondensierter Teilchen dramatische Auswirkungen auf die Lebensdauer haben. In der Tat ist die Opazität mit $O_s = 1,4$ unter den hier realisierten Bedingungen so hoch, daß gemäß der Gleichungen (10.17) und (10.19) mit einer beachtlichen Verstärkung von Acht zu rechnen ist, die sich zu annähernd gleichen Teilen aus direkten und indirekten Verlusten zusammensetzt, wie die Markierungen in Abbildung 10.5 zeigen. Es ist daher sehr wahrscheinlich, daß der in Kapitel 9.2 konstatierte anomale Zerfall des Kondensats auf Stoßlawinen zurückzuführen ist.

Vor dem quantitativen Vergleich mit dem Experiment ist an dieser Stelle noch ein kurzer Blick auf die Dynamik des Zerfalls lehrreich, der durch Stoßlawinen zustandekommt. Ausgehend von Gleichung (10.11) und den Ausführungen in Kapitel 4.2 ist zu erkennen, daß die Opazität des Kondensats im TF-Regime mit der Teilchenzahl wie $O_s \propto N_0^{3/5}$ skaliert. Dagegen ist die Opazität eines klassischen Gases proportional zur Teilchenzahl, jene eines Bose-Gases sogar überproportional (vgl. Relationen (10.5) und (10.9)). In der Abweichung vom klassischen Verhalten spiegelt sich in dem einen Fall die repulsive Wechselwirkung der Atome im Kondensat, im anderen die statistisch bedingte „Attraktion“ Bose-verteilter Teilchen wider. Dies bewirkt, daß die Opazität eines Kondensats infolge von Verlusten langsamer abnimmt als jene des (nichtkondensierten) Bose-Gases. Stoßlawinen sind daher in einem Kondensat überkritischer Opazität persistent, während sie in einem nichtkondensierten Bose-Gas mit abnehmender Teilchenzahl schnell ausklingen. Dieser Effekt ist in Abbildung 10.6 veranschaulicht. Dargestellt ist der Verlauf der Opazität mit der Teilchenzahl für die drei relevanten Dichteverteilungen ausgehend von einem gleichen (beliebigen) Anfangswert $O_s(N_{\text{init}})$ in dem gleichen Potential. Für die Bose-Verteilung wurde $\tilde{z}(N_{\text{init}}) = 1$, also $T = T_c(N_{\text{init}})$ gewählt. Zu beachten ist, daß eine gegebene Anfangsopazität im Falle der drei Verteilungen mit unterschiedlichen Werten von N_{init} erreicht wird. Die höchste im Konstanzer Experiment erzielte Opazität von 1,4 wird beispielsweise entweder mit $1,1 \times 10^6$ kondensierten Atomen, oder mit $1,3 \times 10^7$ Bose-verteilten Atomen bei $\tilde{z} = 1$ (bzw. $T = T_c = 1,16$ μ K) oder schließlich mit 6×10^7 (nahezu) Boltzmann-verteilten Teilchen bei $T = 4,6$ μ K $\approx 2,3 T_c$ (entsprechend $\tilde{z} = 0,1$) realisiert. Für diese Beispiele wird die kritische Opazität bei $O_s(N)/O_s(N_{\text{init}}) \approx 0,5$ erreicht, sobald das Bose-Gas 46 % seiner Teilchen verloren hat, das Kondensat hingegen bereits 68 %. Stoßlawinen werden daher die Dynamik der beiden Zerfälle unterschiedlich stark prägen. Eine unterschiedli-

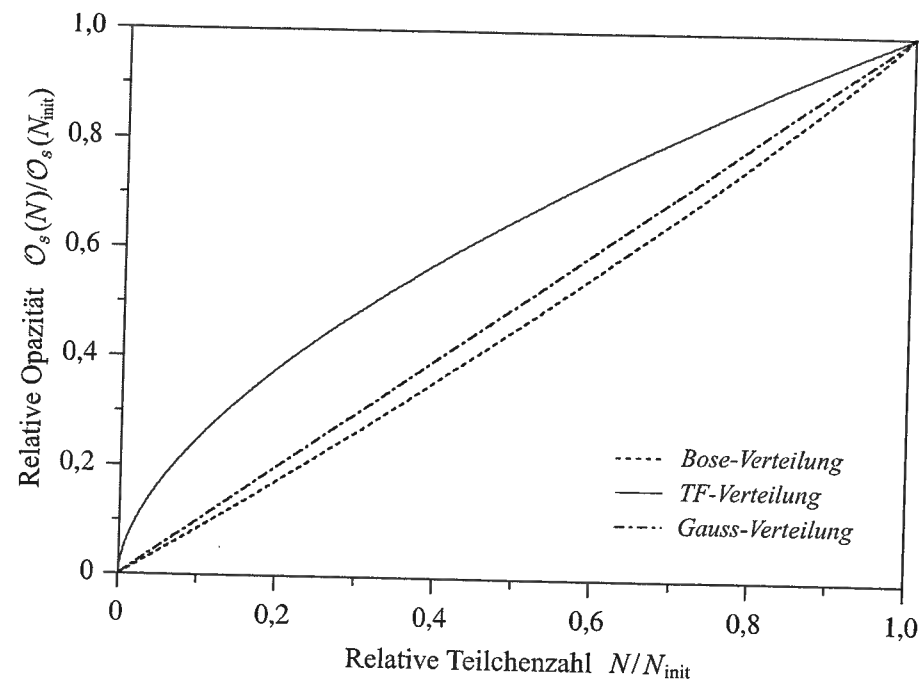


Abbildung 10.6: Abnahme der Opazität mit der Teilchenzahl für die drei relevanten Dichteverteilungen, bei gleicher Anfangsopazität (beide Größen sind auf ihre Anfangswerte skaliert).

che Dynamik erwartet man bereits aufgrund der Auswirkungen der Kohärenz (bzw. ihres Fehlens) auf die Ratenkonstanten K_2 und K_3 (vgl. Kapitel 3.2.6 und 3.3). Der Vergleich des oben diskutierten Modells mit Lebensdaueremessungen an Kondensaten einerseits und thermischen, nahezu kondensierten Wolken andererseits ist daher von systematischer Bedeutung.

10.4 Vergleich mit dem Experiment

In Abbildung 10.7 ist der Zerfall des Kondensats auf „langer“ und kurzer Zeitskala dargestellt. Innerhalb der ersten 100 ms gehen bereits etwa 50 % der Teilchen verloren. Zu Beginn der Messung ist der Zerfall etwa achtmal schneller als von Gleichung (9.1) vorhergesagt (gepunktete Kurve) und eindeutig nichtexponentiell. Da apparative Ursachen ausgeschlossen wurden, kommen als Erklärung für den anomalen Zerfall in erster Linie der Kontakt mit der Oortschen Wolke und Stoßlawinen in Frage (vgl. Kapitel 9.2). Können Sekundärstöße vernachlässigt werden, ist ein nichtexponentieller Zerfall nicht auf die Anwesenheit einer Oortschen Wolke zurückzuführen, da diese ein „warmes“ Hintergrundgas darstellen würde, dessen Dichte über die Ausdehnung des Kondensats und auf der Zeitskala der Messung nahezu konstant wäre und somit zu einem exponentiellen Zerfall führen würde. Spielen Sekundärstöße hingegen eine Rolle, so betrifft dies gleichermaßen die Teilchen der Oortschen Wolke und die Zerfallsprodukte des Kondensats: Sie besitzen den gleichen (großen) Wirkungsquerschnitt für Stöße mit kondensierten Atomen. Während

10.4 Vergleich mit dem Experiment

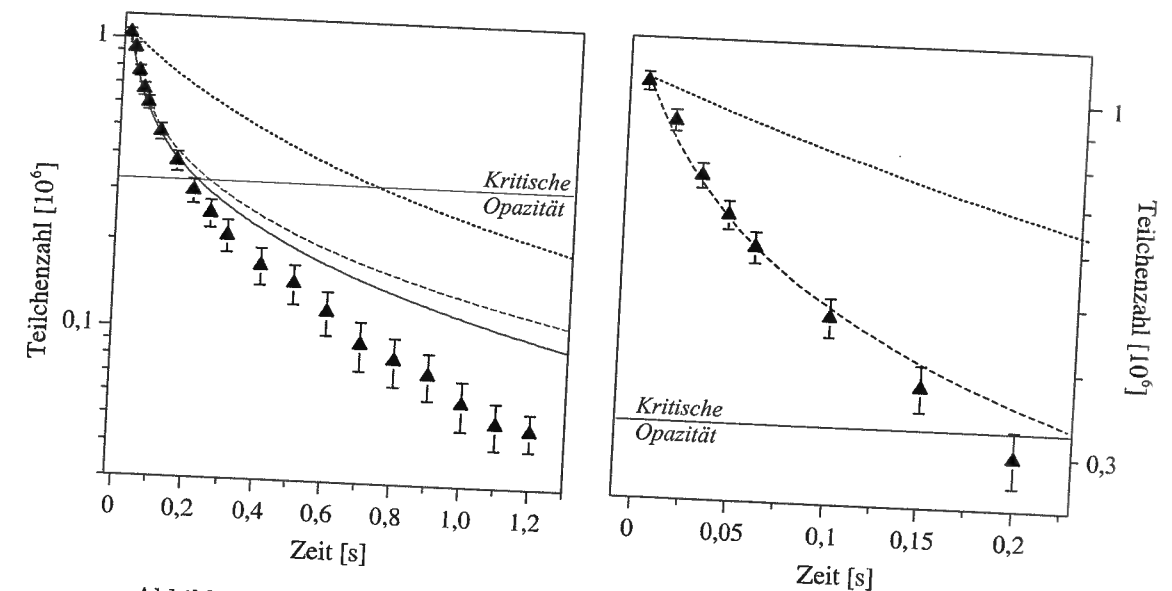


Abbildung 10.7: Beobachteter Zerfall des Kondensats im Vergleich mit theoretischen Vorhersagen. Gepunktete Kurve: numerische Lösung der Differentialgleichung (9.1); gestrichelte und durchgezogene Kurven: numerische Lösungen von Gleichung (10.20) ohne Berücksichtigung bzw. unter Einbezug der Auswirkungen einer Oortschen Wolke.

Zerfallsprodukte jedoch mit einer gut bekannten Rate in jedem Experiment entstehen und somit von fundamentaler Bedeutung sind, läßt sich für die Population der Oortschen Wolke bestenfalls eine obere Grenze angeben, die durch die Empfindlichkeit der Methoden gegeben ist, die, zumindest im vorliegenden Falle, erfolglos zu ihrem Nachweis eingesetzt wurden. Zudem ist die Größe der Oortschen Wolke vom Experiment abhängig und läßt sich durch geeignete Maßnahmen minimieren [153]. Zuallererst müssen daher Sekundärstöße der Zerfallsprodukte berücksichtigt werden.

Die gestrichelte Kurve in Abbildung 10.7 wurde durch numerische Integration von Gleichung (10.20) erzeugt. Es handelt sich also nicht um eine Anpassung an die Daten, sondern um eine Vorhersage, die sich unter Berücksichtigung der experimentell realisierten Bedingungen ($E_{\text{trap}}/k_B = 4,4 \mu\text{K}$, $\omega_z/2\pi = 24,5 \text{ Hz}$, $\omega_\perp/2\pi = 227,2 \text{ Hz}$ und $N_0(t=0) = 1,1 \times 10^6$) sowie mit den in Tabelle 10.2 zusammengefaßten Parametern aus dem Modell ergibt. Insbesondere für den (gekennzeichneten) Bereich überkritischer Opazität, in dem die Gültigkeit des Modells gewährleistet ist (vgl. Abschnitte 10.2 und 10.3), ist die Übereinstimmung mit den Daten sehr gut und bestätigt die Annahme, daß der anomale Zerfall des Kondensats auf Stoßlawinen zurückzuführen ist, die überwiegend von Rekombinationsprodukten ausgelöst werden.

Die Abweichung des Modells von den Daten im Bereich $t \geq 100 \text{ ms}$ ist möglicherweise seinem beschränkten Gültigkeitsbereich zuzuschreiben: Je geringer die Opazität des Kondensats wird, desto weniger ist die Vernachlässigung räumlicher Korrelationen zwischen den Stößen innerhalb einer Lawine gerechtfertigt. Die Abweichung ist jedoch zumindest teilweise auch auf Prozesse zurückzuführen, die in dem Modell nicht berücksichtigt wurden. Hier spielt insbesondere die komplizierte Thermodynamik des Systems eine ent-

scheidende Rolle. Durch exotherme Stöße und die Ankopplung an die Umwelt wird dem System ständig Energie zugeführt⁹. Das effektive Volumen, das thermisch angeregten Atomen zur Verfügung steht, bzw. die Anzahl (und der energetische Abstand) angeregter Zustände werden durch das Speicherpotential, das effektiv repulsive Potential des Kondensats und die Rf-Abschirmung bestimmt bzw. begrenzt¹⁰. Solange sich diese Größen nicht ändern und dem System mit konstanter Rate Energie zugeführt wird, wird jeder Verlust *nichtkondensierter* Teilchen durch Streuung von Teilchen aus dem Kondensat in angeregte Zustände kompensiert. Dies betrifft sowohl Stoßverluste als auch solche, die durch Verdampfung zustandekommen. Der Grund dafür ist, daß $\tilde{z} = 1$ für $T < T_c$ eine Erhaltungsgröße darstellt¹¹. Weil die Temperatur und das Volumen unter diesen Umständen ebenfalls erhalten bleiben, ist die Anzahl angeregter Atome N_T , die man durch Integration der (zeitunabhängigen) Dichteverteilung (4.14) erhält, konstant. Alle Verluste angeregter Teilchen gehen somit letztendlich auf Kosten des Kondensats: Ein Teil der Energie, die dem System zugeführt wird, wird dazu eingesetzt, die thermische Verteilung mit Atomen aus dem Kondensat zu regenerieren, der verbleibende Teil wird durch Verdampfung angeregter Teilchen abgeführt, die wiederum aus dem Kondensat „nachgeliefert“ werden. Kompliziert werden die Verhältnisse nun durch die Tatsache, daß sich sowohl Form und Tiefe des Potentials, das angeregten Teilchen zur Verfügung steht, als auch die Heizrate des Systems tatsächlich im Verlaufe der Messung ändern. Ersteres ist durch den Zerfall des Kondensats und den Anstieg des Abschneideparameters η bedingt, der seinerseits auf die Abnahme der Heizrate zurückzuführen ist. Dadurch ändern sich auch T und N_T über die Meßdauer. In dem Modell wird zwar die Heizrate in der Tat durch Verluste aus dem Kondensat kompensiert, jedoch sind weder Verluste angeregter Teilchen berücksichtigt, die *nicht* durch Verdampfung zustandekommen, noch wird einer Änderung von T oder N_T Rechnung getragen. Ein solches Vorgehen ist sinnvoll, solange erstens die relative Besetzung des Grundzustandes groß ist und sich zweitens der Zerfall des Kondensats nur gering auf das Potential auswirkt. Beides gilt zu Beginn der Messung, da nahezu reine Kondensate erzeugt wurden und Ausdehnung bzw. Dichte des Kondensats im TF-Regime nur langsam mit der Anzahl N_0 kondensierter Teilchen abnehmen. In diesem Bereich ist die Übereinstimmung mit dem Modell gut.

Eine Abweichung des Modells von den Daten kann außerdem eine Folge des in Referenz [180] diskutierten Effektes sein, der hier nicht berücksichtigt wurde: Der simultane Verlust mehrerer Teilchen durch inelastische Stöße oder, wie in diesem Fall, durch Stoßlawinen bewirkt lokale Fluktuationen der Mean-Field-Energie und führt daher zu Anregungen des Kondensats. Deren Dämpfung kommt wiederum durch den Verlust von Teilchen aus dem Kondensat zustande. Die Dämpfungsrate hängt davon ab, wie sich die Energie der Anregung zum chemischen Potential des Kondensats verhält, und kann gegenüber der

⁹ Für die Statistik des Systems ist nur die Energie äußerer Freiheitsgrade relevant.

¹⁰ Die repulsive Wechselwirkung der angeregten Teilchen mit dem Kondensat führt zu der in Kapitel 4.2 diskutierten Phasentrennung und beeinflusst daher das Potential.

¹¹ Das Bose-Gas wird hier als näherungsweise ideal angenommen. Berücksichtigt wird allein seine Mean-Field-Wechselwirkung mit dem Kondensat (siehe Abbildung 4.1). Voraussetzung für die folgenden Ausführungen ist außerdem, daß sich das System stets im thermodynamischen Gleichgewicht befindet.

elastischen Stoßrate des Systems klein sein. Dieser Prozeß bewirkt daher nicht allein zusätzliche Verluste, sondern kann auch eine längere Zeitskala des Zerfalls einführen, der nun von der „Vergangenheit“ des Kondensats abhängt.

Die gute Übereinstimmung des Modells mit den Daten auf kurzer Zeitskala deutet darauf hin, daß sich der schnelle Anfangsverlust nicht oder nur zu einem geringen Teil auf die Anwesenheit einer Oortschen Wolke zurückführen läßt, die bereits zu Beginn der Messung etabliert ist. Da die Zerfallsprodukte des Kondensats während dessen Erzeugung und Speicherung mit gleichbleibender Effizienz aus der Falle entfernt werden, gibt es keinen Grund zu der Annahme, daß die Population der Oortschen Wolke im Verlauf der Lebensdauer messung signifikant zunimmt. Eine bessere Übereinstimmung des Modells mit den Daten läßt sich daher nicht durch die Berücksichtigung einer zusätzlichen Verlustrate erreichen, die dem Kontakt mit einer Oortschen Wolke zuzuschreiben ist. Im übrigen wäre eine solche Rate oberhalb der kritischen Opazität ebenfalls durch Stoßlawinen verstärkt und würde daher auch den vom Modell prognostizierten Anfangsverlust vergrößern.

Um die Auswirkungen einer Oortschen Wolke genauer zu quantifizieren, bietet es sich an, das gleiche Experiment mit einer nichtkondensierten Wolke durchzuführen. Deren Zerfall ist nicht von jenen Prozessen begleitet, die weiter oben als mögliche Ursache für die Abweichung zwischen Theorie und Experiment diskutiert wurden. Wie in Abschnitt 10.3.2 festgestellt wurde, nimmt zudem die Opazität einer thermischen Wolke schneller ab als jene des Kondensats. Das bedeutet, daß Stoßlawinen über einen weiten Bereich der Meßdauer (bzw. der Teilchenzahl) keine Rolle spielen. In diesem Bereich sind Verluste, die nicht den bekannten Verlustraten zuzuschreiben sind, hauptsächlich auf den Kontakt mit der Oortschen Wolke zurückzuführen und müßten dementsprechend eine exponentielle Charakteristik aufweisen. Unter diesen Voraussetzungen ließe sich die Dichte der Oortschen Wolke abschätzen. Im Bereich überkritischer Opazität bietet die Messung zudem die Möglichkeit, die Vorhersagen des theoretischen Modells an einem Bose-verteilten System zu testen. Aus Gründen, die in Abschnitt 10.3.2 erläutert wurden, ist dies von systematischer Bedeutung.

Der Zerfall der thermischen Wolke auf langer und kurzer Zeitskala ist in Abbildung 10.8 dargestellt. Mit $1,1 \times 10^7$ Atomen und $T = 1 \mu\text{K}$ befindet sich das System zu Beginn der Messung unmittelbar am Phasenübergang. Entsprechend der höheren Temperatur des Gases wurde die Potentialtiefe in diesem Fall auf $k_B \times 10 \mu\text{K}$ beschränkt. Teilchenzahl und Temperatur des Gases wurden aus Absorptionsbildern auf die in Kapitel 9.1 erläuterte Weise bestimmt. Der beobachtete Anfangsverlust ist in diesem Fall um einen Faktor Zwei größer als von Gleichung (9.1) vorhergesagt (gepunktete Kurve). Die gestrichelte Kurve stellt die Vorhersage des Modells dar und wurde durch numerische Integration von Gleichung (10.20) erzeugt. Dabei wurde die Polylogarithmusfunktion in der Bose-Verteilung durch den Ausdruck (10.10) approximiert, wodurch sich die gemittelte Säulendichte des Gases mit vergleichsweise geringem numerischen Aufwand berechnen läßt (vgl. Kapitel 10.1). Zu Beginn der Messung beträgt die Opazität des Gases 0,9 und ist somit überkritisch. Die Übereinstimmung mit den Daten ist für $t \leq 0,7$ s sehr gut und spricht erneut dafür, daß der beschleunigte Anfangsverlust durch Stoßlawinen zustandekommt, die überwiegend von Rekombinationsprozessen ausgelöst werden.

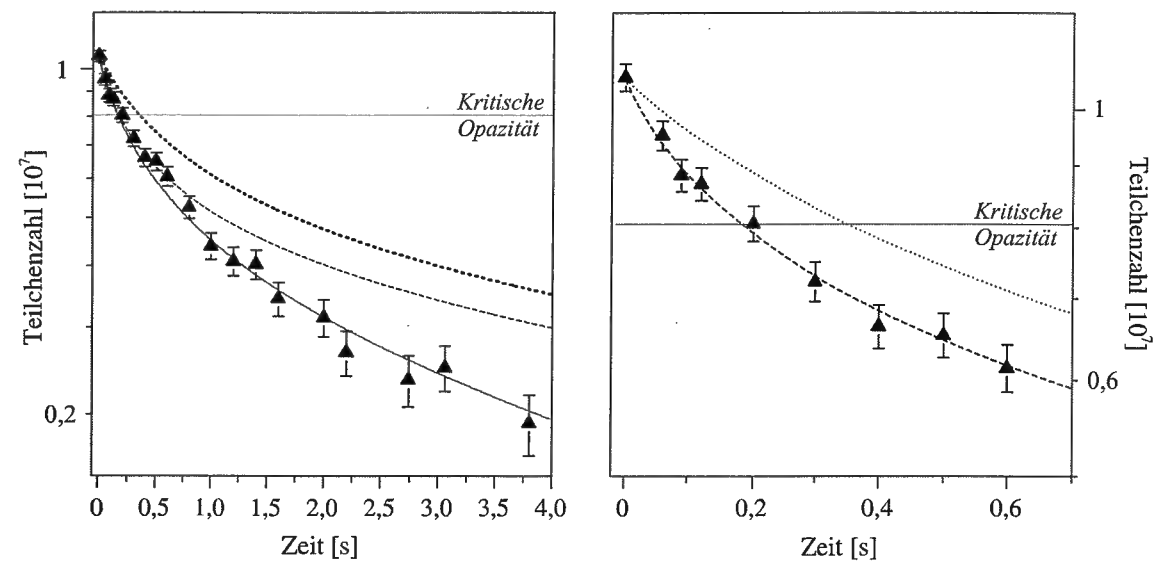


Abbildung 10.8: Zerfall einer nichtkondensierten Atomwolke bei $T = 1 \mu\text{K}$. Die verschiedenen theoretischen Vorhersagen sind gleich gekennzeichnet wie in Abbildung 10.7.

Sofern die Abweichung der Simulation von den Daten für $t \geq 0,7 \text{ s}$ nicht der Einfachheit des Modells zuzuschreiben ist, ist zu erwarten, daß sich eine bessere Übereinstimmung durch den Einbezug der zusätzlichen Verlustrate erzielen läßt, die durch den Kontakt mit der Oortschen Wolke zustandekommt. Den Ausführungen in Kapitel 9.2.1 zufolge ist damit zu rechnen, daß die „schädlichen“ Teilchen der Oortschen Wolke Energien der Größenordnung $k_B \times 100 \dots 400 \mu\text{K}$ besitzen. Daher kann die Dichte der Oortschen Wolke über die Ausdehnung des kalten Gases als konstant angenommen werden. Wie gut diese Näherung ist, verdeutlicht Abbildung 10.9. Dargestellt sind die Dichteverteilungen der Oortschen und der kalten Wolke in ihren exakten adiabatischen Potentialen (vgl. Kapitel 5.6.3). An dieser Stelle wird erneut deutlich, daß die Rf-Abschirmung gegen Ende der Verdampfungskühlung nahezu keinen Einfluß auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeit heißer Atome am Potentialminimum hat.

Unter diesen Voraussetzungen ist weit unterhalb der kritischen Opazität eine Verlustrate der Form $\dot{N} = -K_O N$ anzusetzen. Da außerdem für den Wirkungsquerschnitt von Stößen zwischen Atomen der Oortschen und der kalten Wolke $\sigma \geq \sigma_s$ gilt, läßt sich die Ratenkonstante in guter Näherung durch $K_O \simeq \sigma_s \bar{v}_O n_{p,O}$ darstellen. Dabei bezeichnet $\bar{v}_O$ die mittlere Relativgeschwindigkeit der stoßenden Teilchen (also die mittlere Geschwindigkeit der Oortschen Atome) und $n_{p,O}$ die Peak-Dichte der Oortschen Wolke. Im Bereich hoher Opazität folgt die Verstärkung der Verlustrate durch Stoßlawinen schließlich den Gleichungen (10.17) bzw. (10.19) mit $\tilde{g}_O = 0$ und $\tilde{p}_O = 1$. Für eine gegebene „Temperatur“ T_O der Oortschen Wolke ist k_O^{max} bestimmt und die Ratenkonstante K_O hängt – bei bekannter Potentialform – allein von der Population N_O der Oortschen Wolke ab. Durch deren Variation kann nun eine Anpassung der Simulation zu einem festen Wert von T_O an die Daten vorgenommen werden. Auf diese Weise kommt die durchgezogene Kurve in Abbildung 10.8 zustande. Die beste Übereinstimmung ergibt sich für $K_O = 1/7,8 \text{ s}$ und ist im realisti-

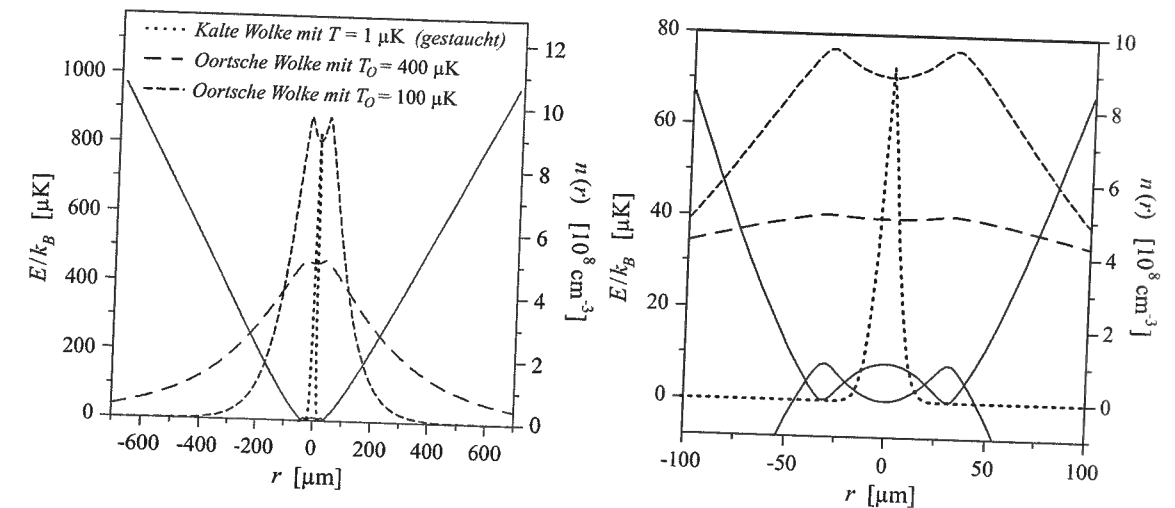


Abbildung 10.9: Adiabatische Potentiale (durchgezogene Kurven) und Dichteverteilungen der Oortschen (gestrichelt) und der kalten Wolke (gepunktet) in radialer Richtung für die in Abbildung 10.8 dargestellte Messung. Rechts sind die Verhältnisse in unmittelbarer Umgebung des Ursprungs dargestellt. In beiden Bildern ist die Dichteverteilung der kalten Wolke um den Faktor 4×10^5 gestaucht.

schen Wertebereich $500 \mu\text{K} \geq T_O \geq 60 \mu\text{K}$ nur gering von der angesetzten Temperatur der Oortschen Wolke abhängig. Dies ist dadurch bedingt, daß die Opazität der kalten Wolke schnell unterkritisch wird. In dem exakten Potential entspricht der optimale Wert der Ratenkonstante bei $T_O = 400 \mu\text{K}$ einer Peak-Dichte von $n_{p,O} = 5 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$ bzw. $N_O \simeq 10^6$ Atomen. Für $T_O = 100 \mu\text{K}$ ergeben sich hingegen Werte von $n_{p,O} = 1,1 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$ bzw. $N_O \simeq 10^5$. In Anbetracht der Tatsache, daß sich vor der Verdampfungskühlung knapp 2×10^9 Atome in der Magnetfalle befinden, erscheinen diese Parameter realistisch. Auf Resonanz hätte die Oortsche Wolke für beide Wertepaare eine optische Dichte von nur $\mathcal{D}^{(0)}(0,0) \simeq 0,05$, die, in Einklang mit der Beobachtung, nicht direkt nachgewiesen werden könnte. Offenbar läßt sich die Übereinstimmung des Modells mit den Daten durch den Einbezug der Oortschen Wolke auf den Bereich $t \geq 0,7 \text{ s}$ ausdehnen. Aus der Anpassung der Simulation an die Daten ergibt sich eine obere Abschätzung für das Produkt $n_{p,O} \bar{v}_O$ im Bereich des Überlapps der Dichteverteilungen. Die entsprechende Verlustrate K_O ist allerdings so klein, daß sie trotz der Verstärkung durch Stoßlawinen nahezu keinen Einfluß auf den vom Modell prognostizierten Anfangsverlust hat. Dies gilt auch für den ungünstigsten Fall, in dem $T_O \simeq 400 \mu\text{K}$ angesetzt wird und die Stoßlawine die maximal mögliche Anzahl von Stufen mit $\sigma \geq \sigma_s$ besitzt. Der insgesamt etwa zweifach beschleunigte Anfangsverlust ist somit nach wie vor auf Stoßlawinen zurückzuführen, die zumeist durch Rekombinationsprozesse ausgelöst werden.

Die Lebensdauermessungen an kondensierten und nichtkondensierten Wolken wurden unter den gleichen Bedingungen durchgeführt, insbesondere ist die gleiche Anzahl von Teilchen in die Magnetfalle überführt und die gleiche Rf-Rampe zur Verdampfung eingesetzt worden. Eine höhere Teilchenzahl der Oortschen Wolke im Falle der Messung am Kondensat könnte allein durch die unvollständige Verdampfung der Zerfallsprodukte zustan-

dekommen, die während der zusätzlichen Kühlzeit von etwa 120 ms entstehen. Diese wird aufgewendet, um die Temperatur von 1 μ K auf wenige hundert nK zu reduzieren und damit das Kondensat zu erzeugen. Ausgehend von der Entwicklung der Teilchenzahl bzw. der Dichte der kalten Wolke während der Verdampfung läßt sich grob abschätzen, daß in dieser Zeit höchstens 5×10^5 Rekombinationsprozesse und erheblich weniger Spinrelaxationsprozesse stattfinden. Der überwiegende Teil der Stoßprodukte wird die Falle aufgrund der Rf-Abschirmung entweder sofort oder nach weiteren Sekundärstößen verlassen, anderenfalls müßte die Oortsche Wolke bereits in der Messung an der thermischen Wolke wesentlich mehr „schädliche“ Teilchen enthalten als, wie oben abgeschätzt, $N_O \simeq 10^6$. Daher besteht kein Grund anzunehmen, daß die Population der Oortschen Wolke zum Zeitpunkt der Messung am Kondensat signifikant zugenommen haben könnte, und es erscheint sinnvoll, die eben ermittelte Ratenkonstante (einschließlich deren Verstärkung durch Stoßlawinen) in die Vorhersage des Modells für den Zerfall des Kondensats einzubeziehen. Auf diese Weise kommt die durchgezogene Kurve in Abbildung 10.7 (links) zustande. Offenbar hat dies auch in diesem Fall kaum Auswirkungen auf den prognostizierten Anfangsverlust, die Übereinstimmung zu längeren Zeiten hin wird geringfügig besser. Hier läßt sich somit ausschließen, daß eine Oortsche Wolke für den anomalen Anfangsverlust verantwortlich ist, der in beiden Messungen beobachtet wird. Demgegenüber kann aus der insgesamt guten Übereinstimmung des Modells mit beiden Messungen geschlossen werden, daß den Zerfall der Wolken erstens Stoßlawinen beschleunigen, die zweitens fast ausschließlich durch Rekombinationsprozesse ausgelöst werden.

10.5 Diskussion

In ihrer Gesamtheit lassen alle Messungen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, nur den Schluß zu, daß der Prozeß, der den Zerfall von Atomwolken hoher Säulendichte beschleunigt, im Inneren der Wolken lokalisiert und nicht auf den Kontakt mit einer Oortschen Wolke zurückzuführen ist. Unterstützt wird diese Schlußfolgerung durch die gute Übereinstimmung des oben diskutierten Modells mit den Messungen. Auch wenn die Berechnung der Verluste durch Stoßlawinen aufgrund der durchgeführten Näherungen mit einer schwer quantifizierbaren Ungenauigkeit behaftet ist, so kann doch als gesichert gelten, daß inelastische Stöße unter den hier realisierten Bedingungen von Sekundärstößen gefolgt werden und daher auf jeden Fall mit erhöhten Verlusten und Heizraten zu rechnen ist. Dies geht aus den Stoßwahrscheinlichkeiten hervor, die in Kapitel 10.1 (nahezu) exakt bestimmt wurden. Bis heute konnte zudem in Fachkreisen kein weiterer Prozeß identifiziert werden, der die „Kurzlebigkeit“ großer Rb-Kondensate im Zustand $|F = 2, m_F = 2\rangle$ erklären könnte, die auch aus anderen Arbeitsgruppen (etwa Amsterdam, Boulder, Orsay) berichtet wird. Für einen quantitativen Vergleich stehen in der einschlägigen Literatur leider allein die Daten aus der Publikation [72] für einen Vergleich mit dem Modell zur Verfügung. Die dort präsentierte Lebensdaueremessung wurde allerdings weit unterhalb der kritischen Opazität durchgeführt, wo Verluste durch Stoßlawinen vernachlässigbar sind. Der anomale Zerfall von Kondensaten vergleichbarer Säulendichte im besagten Zustand konnte jedoch unlängst auch in der Münchner Apparatur beobachtet werden und ist im Einklang mit den Vorhersagen des Modells.

Lebensdaueremessungen an kalten Rb-Wolken hoher Säulendichte im Zustand $|F = 1, m_F = -1\rangle$ finden sich hingegen in Referenz [85]. Hier wird von einem wesentlich langsamerem Zerfall berichtet, als er unter Berücksichtigung von Stoßlawinen zu erwarten wäre. Mit dieser Beobachtung decken sich die Ergebnisse vergleichbarer Messungen, die am gleichen Zustand in der Münchner Apparatur durchgeführt wurden. In beiden Fällen läßt sich der Teilchenverlust vollständig unter alleiniger Berücksichtigung der inelastischen Dreikörper-Stöße erklären, wobei die entsprechende Ratenkonstante sogar *kleiner* ist, als von der Theorie (allerdings unter Vernachlässigung der Hyperfeinwechselwirkung) vorhergesagt [80] und im Experiment für den Zustand $|F = 2, m_F = 2\rangle$ gemessen [72]. Wird die Gültigkeit des Modells nicht in Zweifel gezogen, gibt es für diese Diskrepanz zwei mögliche Erklärungen. Zunächst kann die Ratenkonstante für den tieferen Hyperfeinzustand tatsächlich noch kleiner sein, als durch eine Anpassung der Rekombinationsrate $-N_3$ an die Daten ermittelt wird. Aus dem Vergleich mit dem Experiment ergäbe sich dann die bereits durch Stoßlawinen verstärkte Ratenkonstante. Um dies zu verifizieren, ist eine systematische Bestimmung der Ratenkonstante in Abhängigkeit der Dichte erforderlich, die bisher noch nicht durchgeführt wurde. Interessanter ist jedoch die zweite Möglichkeit: Die am schwächsten gebundenen Zustände der beiden Triplet-Potentiale, die asymptotisch zwei freien Atomen in den Zuständen $|F = 2, m_F = 2\rangle$ bzw. $|F = 1, m_F = -1\rangle$ entsprechen, besitzen mit $k_B \times 1,2$ mK und $k_B \times 1,16$ mK etwa die gleiche Bindungsenergie [47]. Zudem ist der Verlauf des totalen elastischen Streuquerschnittes über der Stoßenergie für beide Hyperfeinzustände nahezu identisch. Sofern durch Rekombination Moleküle in den am schwächsten gebundenen Zuständen entstehen, sollten Stoßlawinen daher in den beiden Systemen bei gleicher Opazität mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgelöst werden. Möglich ist nun allerdings, daß durch Rekombination von Atomen im Zustand $|F = 1, m_F = -1\rangle$ vorzugsweise Dimere im nächsttieferen Molekülzustand entstehen. Dessen Bindungsenergie beträgt $k_B \times 30$ mK [47] und ist damit so hoch, daß die Stoßwahrscheinlichkeit der Zerfallsprodukte unter typischen experimentellen Voraussetzungen gering ist. Diese Zusammenhänge müssen in künftigen theoretischen und experimentellen Studien geklärt werden.

Kapitel 11

Ausblick

Stoßlawinen, die von den Produkten inelastischer Stöße zwischen ultrakalten Atomen ausgelöst werden, können einem Kondensat erheblichen Schaden zufügen. Dabei ist zu beachten, daß der Prozeß unter Umständen nicht nur die Lebensdauer ultrakalter Atomwolken auf ein Maß reduziert, das mit vielen Experimenten nicht vereinbar ist, sondern auch zur Folge haben kann, daß sich das Gas während einer Messung nicht in einem quasi-stationären Gleichgewicht befindet. Stoßlawinen sind eine Folge der Metastabilität atomarer Kondensate, deren Übergang in das „echte“ thermodynamische Gleichgewicht umso schneller stattfindet, je größer und dichter sie sind. Wenn man so will, vervollständigen Stoßlawinen den Thermalisierungsprozeß des Gases, der bei niedrigen Säulendichten auf Klassen von Teilchen mit geringen Energien beschränkt ist. Dieser Mechanismus setzt daher generell der Größe von Kondensaten eine Grenze. Die Existenz einer solchen Grenze läßt sich zwar intuitiv verstehen [141], neu ist allerdings die Erkenntnis, wie nahe sich heutige Experimente daran bewegen und wie schmal der Bereich ist, in dem Stoßlawinen zum limitierenden Zerfallsprozeß heranwachsen. Für dieses Verhalten ist zum einen der sprunghafte Anstieg der Anzahl von Atomen verantwortlich, die an einer Stoßlawine teilnehmen, sobald die kritische Opazität überschritten ist. Zum anderen ist es die Tatsache, daß insbesondere inelastische Prozesse aufgrund ihrer Dichteabhängigkeit im Zentrum inhomogener Gase lokalisiert sind, wo auch die Stoßprodukte auf eine hohe Dichte treffen.

Neben der Tatsache, daß Stoßlawinen generell Experimente im Regime starker Wechselwirkung erschweren, ist zu erwarten, daß sie bei Messungen eine Rolle spielen, in denen sie bisher nicht berücksichtigt wurden. Betroffen ist beispielsweise die Bestimmung der Ratenkonstanten inelastischer Stoßprozesse, die häufig unter Bedingungen hoher Opazität stattfindet, weil sich hier dichteabhängige Verluste von anderen leichter unterscheiden lassen. Die so ermittelten Ratenkonstanten *können* aufgrund ihrer Verstärkung durch Sekundärstöße fehlerbehaftet sein. Dies gilt sowohl für Experimente im Regime nichtresonanter Streuung als auch für solche in der Umgebung von Feshbach-Resonanzen [85, 175, 178, 181, 23, 182] (auf die Möglichkeit der Verstärkung von Verlusten durch Sekundärstöße im Zusammenhang mit Feshbach-Resonanzen haben bereits Yurovsky et al. in Referenz [177] hingewiesen). Im Kontext kollabierender und explodierender Kon-

densate [90] könnten Stoßlawinen die Entstehung einer diffusen Wolke nichtkondensierter Atome erklären, die das Kondensat nach dessen Kollaps umgibt. Bei der Erzeugung von Molekülen innerhalb atomarer Kondensate schließlich, wie unlängst in den Referenzen [179, 182] beschrieben, ist bei hohen Opazitäten damit zu rechnen, daß die Stoßabregung schwach gebundener Moleküle ebenfalls zu Stoßlawinen führt.

Im Regime nichtresonanter Streuung, also in „traditionellen“ BEK-Experimenten, sind insbesondere Rb-Kondensate von Lawinen betroffen, weil hier die Stoßwahrscheinlichkeiten energiereicherer Atome größer sind als in vielen anderen Kondensaten vergleichbarer Säulendichte. Hier wird ein Dilemma deutlich: Gilt das Interesse Effekten der Wechselwirkung in Kondensaten, ist man an einem hohen Gasparameter na^3 interessiert. Korrekturen zur Mean-Field-Theorie etwa skalieren wie $\sqrt{na^3} \propto N_0^{1/5} a^{6/5}$ (vgl. Kapitel 4.3). Damit ist in diesem Zusammenhang die Streulänge a der entscheidende Parameter. Andererseits wächst mit ihr auch die Opazität des Kondensats, für die sich aus den Gleichungen (10.3) und (10.11) der Zusammenhang $\mathcal{O}_s \propto N_0^{3/5} a^{8/5}$ ergibt. Bei vorgegebenen Oszillationsfrequenzen ist die Wahl von Atomen mit großer, positiver Streulänge im Hinblick auf Stoßlawinen in der Regel noch ungünstiger, als diese Abhängigkeiten vermuten lassen. In einem solchen Fall ist nämlich damit zu rechnen, daß durch Rekombination Moleküle mit einer besonders geringen Bindungsenergie entstehen und daß die Zerfallsprodukte somit einen besonders hohen Stoßquerschnitt besitzen (vgl. Kapitel 3.1.2). Unter Umständen kann es also günstiger sein, sich für Atome mit einer kleinen Streulänge zu entscheiden, deren Rekombinationsprodukte auch bei vergleichsweise hohen Säulendichten geringe Stoßwahrscheinlichkeiten aufweisen und somit nur selten Stoßlawinen auslösen. In diesem Falle muß der Gasparameter über die Teilchenzahl erhöht werden, was nun allerdings schwierig sein kann, weil die Effizienz der Verdampfungskühlung mit der Streulänge der Atome abnimmt.

Welche Elemente sich besonders gut für Experimente im Regime hoher Gasparameter eignen, ist daher schwer vorherzusagen. Im Grundzustand stellt Helium diesbezüglich ein vielversprechendes System dar, da dessen Molekülpotentiale keine gebundenen Zustände aufweisen. Dadurch kann es hier nicht zur Rekombination kommen. Allgemein spielen neben der Streulänge und der Energie der höchsten gebundenen Molekülzustände natürlich auch die Ratenkonstanten inelastischer Prozesse und das Auftreten bzw. die Lage von Resonanzen oder Einbrüchen im elastischen Streuquerschnitt der Atome eine entscheidende Rolle. Außerdem ist zu beachten, daß die Spinrelaxationsrate anderer atomarer Spezies wesentlich größer sein kann als die von Rubidium. Sofern zusätzlich die Energie der entsprechenden Stoßprodukte ungünstig liegt, können inelastische Zwei-Körper-Stöße selbst bei hohen Dichten im Hinblick auf Stoßlawinen von zentraler Bedeutung sein. Vermeiden läßt sich dies allerdings, wenn auf die Speicherung in einer Dipolfalle zurückgegriffen wird, in der sich die Atome in ihren tiefsten Zeeman-Zustand präparieren lassen. Dann ist Spinrelaxation stets exotherm und bei tiefen Temperaturen unterdrückt.

Im Experiment werden also Stoßlawinen den Gasparameter für die einzelnen atomaren Spezies auf leicht unterschiedliche Werte beschränken. Insgesamt wird diese Grenze jedoch weit vor Erreichen des hydrodynamischen Regimes erreicht. Das bedeutet allerdings nicht, daß dem Experimentator im Hinblick auf das Studium von Effekten der Wechselwir-

kung alle Möglichkeiten verstellt sind. Ein gewisser Spielraum, etwa für die Untersuchung von Korrekturen zur Mean-Field-Theorie, ergibt sich durch die Abhängigkeit der Opazität von der Geometrie des Speicherpotentials, wie die Ausführungen in Kapitel 10.3.2 zeigen. Dort war deutlich geworden, daß sich die Opazität des Gases bei gleichbleibendem Wert der zentralen Dichte (also konstantem Gasparameter *und* konstanten primären Verlustraten) durch die Wahl eines extrem anisotropen Potentials reduzieren läßt. Hier muß allerdings beachtet werden, daß die Erhöhung einer der Oszillationsfrequenzen bei gleicher Dichte Rückwirkungen auf den räumlich definierten Gültigkeitsbereich der TF-Näherung entlang der entsprechenden Richtung hat (vgl. Kapitel 4.2 und hier insbesondere Gleichung 4.13). Es kann also erreicht werden, daß die Dichteverteilung entlang dieser Richtung nahezu der des idealen Gases entspricht, während die Wechselwirkung insgesamt signifikante Auswirkungen auf den Phasenübergang oder die Entvölkerung bzw. die Eigenschaften des Grundzustandes zeitigt. Im Hinblick auf Experimente ergeben sich daraus ohne Frage faszinierende Möglichkeiten, wie erste Arbeiten auf dem Gebiet zeigen [183, 184, 185]. Ist man jedoch daran interessiert, Bedingungen zu realisieren, unter denen die Atome beim einmaligen Durchqueren des Gases entlang beliebiger Richtungen sehr häufig stoßen, unter denen also beispielsweise das thermodynamische Gleichgewicht eine lokale Charakteristik aufweist, so empfiehlt es sich im Gegenteil, ein möglichst *isotropes* Potential bereitzustellen. Hier sind Stoßlawinen besonders destruktiv, und der Erfolg entsprechender Experimente wird stark von dem eingesetzten Element und den Möglichkeiten abhängen, die sich in Zukunft für die Manipulation der Streulänge und der Ratenkonstanten inelastischer Stoßprozesse ergeben.

In diesem Zusammenhang wird Feshbach-Resonanzen eine große Bedeutung zukommen (vgl. Kapitel 3.2.4). In ihrer Umgebung kann nicht allein die Streulänge (und mit ihr der elastische Stoßquerschnitt) über Größenordnungen variieren, sondern auch die Rekombinationsrate. Sowohl im Experiment als auch in der Theorie deutet sich an, daß es Resonanzen gibt, in deren Umgebung sich eine große, positive Streulänge bei vergleichsweise geringen inelastischen Stoßquerschnitten gewährleisten läßt (siehe Referenzen [181] bzw. [80, 81]). Elastische Streuresonanzen und ihre zugehörigen inelastischen Resonanzen können also bei geringfügig unterschiedlichen Feldern lokalisiert sein. Neben diesem Umstand wirkt sich auch die endliche Breite der elastischen Streuresonanzen im Hinblick auf geringe Verluste durch Stoßlawinen günstig aus. Sie bewirkt, daß die Streuung zwischen ultrakalten Atomen resonant sein kann, während dies zugleich für die Streuung von Zerfallsprodukten an kalten Atomen nicht zutrifft. In den nächsten Jahren sollte das Studium von Feshbach-Resonanzen eine Fülle wertvoller Informationen liefern, auf deren Grundlage auch die Zuverlässigkeit theoretischer Vorhersagen wachsen wird. Daher erscheint die Hoffnung berechtigt, daß sich die Grenzen zumindest teilweise umgehen lassen, die sich auf den ersten Blick aus dem Auftreten von Stoßlawinen für das Experiment ergeben.

Aufgrund des Umzugs der Arbeitsgruppe an das MPI für Quantenoptik in Garching mußten die Experimente an der Universität Konstanz abgebrochen werden. Mittlerweile sind einige der Ergebnisse aus Konstanz in der neuen Apparatur reproduziert worden, deren Beschreibung sich zum Teil in den Kapiteln 5.3, 7 und 8 dieser Arbeit findet. Weitergehende, systematische Untersuchungen sind in Planung. Hier bietet es sich zunächst an, Stoßlawinen über einen größeren Bereich von Opazitäten und in Abhängigkeit der Isotropie des

Potentials zu untersuchen. Außerdem sollen erste Messungen im tieferen Hyperfeinzustand weitergeführt werden. Insbesondere aber gilt das Interesse den Feshbach-Resonanzen im Zustand $|F = 1, m_F = 1\rangle$, deren Lage und Breite mit hoher Genauigkeit vorhergesagt wird [54].

Die neue Apparatur bietet für diese Vorhaben beste Voraussetzungen. Sie erlaubt es, größere Kondensate als in der Konstanzer Apparatur innerhalb von etwa 10 s zu erzeugen, eine Zeitskala, die fast ausschließlich durch die Dauer der Verdampfungskühlung bestimmt ist. Von größter Bedeutung für alle zukünftigen Messungen ist jedoch die herausragende Stabilität des Experiments: In 90 aufeinanderfolgenden experimentellen Zyklen läßt sich unterhalb von T_c eine Temperatur von beispielsweise 350 nK mit einer Standardabweichung von lediglich 5,5 nK reproduzieren. Dem interessierten Leser sei an dieser Stelle die Referenz [139] empfohlen.

Anhang A

Expansion des Bose-Gases

Die Ortsverteilung der Atome in einem harmonischen Potential $U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \omega_i^2 r_i^2$ erhält man in der semiklassischen Näherung durch Integration der Phasenraumdichte

$$\rho(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{\tilde{z}^{-1} \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \sum_i \frac{p_i^2}{m} + m \omega_i^2 r_i^2 \right\} - 1} \quad (\text{A.1})$$

über den Impuls. Unter Vernachlässigung von Stößen expandiert das Gas nach Abschalten des Potentials kräftefrei. Nach einer Expansionszeit t tragen zur Dichte am Ort $\vec{r}$ alle Atome bei, die von Positionen $\vec{r}_0$ gestartet sind und eine ausreichende Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{p}/m$ hatten, um $\vec{r}$ erreichen zu können. Die Ortsverteilung zum Zeitpunkt t ergibt sich dann gemäß

$$n_T(\vec{r}, t) = \iint \rho(\vec{r}_0, \vec{p}) \delta(\vec{r}_0 - \vec{r} + \vec{p}t/m) d^3 r_0 d^3 p. \quad (\text{A.2})$$

Zu berechnen gilt daher

$$n_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m^3 dv_x dv_y dv_z}{\tilde{z}^{-1} \exp \left\{ \frac{\beta m}{2} \sum_{i=1}^3 v_i^2 + \omega_i^2 (r_i - v_i t)^2 \right\} - 1}. \quad (\text{A.3})$$

Um die Integration durchführen zu können, muß der Exponent auf die Form

$$\sum_{i=1}^3 v_i^2 + \omega_i^2 (r_i - v_i t)^2 \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^3 A_i (v_i - B_i r_i)^2 + C_i r_i^2 \quad (\text{A.4})$$

gebracht werden. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$A_i = \lambda_i^2, \quad B_i = \frac{\omega_i^2 t}{\lambda_i^2}, \quad C_i = \frac{\omega_i^2}{\lambda_i^2}, \quad \text{mit} \quad \lambda_i^2 = 1 + \omega_i^2 t^2. \quad (\text{A.5})$$

Mit der Notation $\tilde{Z}^{-1} = \tilde{z}^{-1} \exp \left\{ \sum_i \frac{\beta m}{2} \frac{\omega_i^2}{\lambda_i^2} r_i^2 \right\}$ gilt es nun,

$$n_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m^3 dv_x dv_y dv_z}{\tilde{Z}^{-1} \exp \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{\beta m \lambda_i^2}{2} \left(v_i - \frac{\omega_i^2 t}{\lambda_i^2} r_i \right)^2 \right\} - 1} \quad (\text{A.6})$$

zu berechnen. Aufgrund der unendlichen Integrationsgrenzen können die Verschiebungen $\frac{\omega_i^2 t}{\lambda_i^2}$ weggelassen werden. Die Variablensubstitution $\zeta_i := \sqrt{\frac{\beta m}{2}} \lambda_i v_i$ ermöglicht dann die Transformation in Kugelkoordinaten, und man erhält

$$n_T(\vec{r}, t) = \frac{m^3}{h^3} \left(\frac{2}{\beta m} \right)^{3/2} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{4\pi \zeta^2 d\zeta}{\tilde{Z}^{-1} \exp \zeta^2 - 1}}_{:=I}. \quad (\text{A.7})$$

Mit der Substitution $\xi := \zeta^2$ läßt sich das Integral auf die Form einer Polylogarithmusfunktion (2.18) bringen:

$$I = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\xi^{1/2} d\xi}{\tilde{Z}^{-1} e^{\xi} - 1} = \pi^{3/2} g_{3/2}(\tilde{Z}). \quad (\text{A.8})$$

Nach Einführung der thermischen de Broglie-Wellenlänge $\lambda_T = h^3 / \sqrt{2\pi m k_B T}$ findet man schließlich die gesuchte Dichteverteilung

$$n_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{\lambda_T^3} \frac{1}{\lambda_x(t) \lambda_y(t) \lambda_z(t)} g_{3/2} \left(\tilde{z} \exp \left\{ -\frac{m}{2k_B T} \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 \frac{r_i^2}{\lambda_i^2(t)} \right\} \right), \quad (\text{A.9})$$

die offensichtlich aus der ursprünglichen Verteilung (2.25) durch Skalierung hervorgeht. Für $\omega_i t \gg 1$, also lange Expansionszeiten, entwickelt sich die Dichteverteilung gemäß

$$n_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{\lambda_T^3} \frac{1}{\omega_x \omega_y \omega_z t^3} g_{3/2} \left(\tilde{z} \exp \left\{ -\frac{m}{2k_B T} \sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{t^2} \right\} \right), \quad (\text{A.10})$$

woran zu erkennen ist, daß die Expansion des thermischen Gases, im Gegensatz zu jener des Kondensats, isotrop wird. Gleichung (A.9) erlaubt es, aus der Ortsverteilung des expandierten Gases auf seine Temperatur zurückzuschließen.

Temperaturmessungen müssen zu jedem Zeitpunkt des experimentellen Zyklus durchgeführt werden und damit auch bei Phasenraumdichten, bei denen das Gas in sehr guter Näherung durch die Boltzmann-Statistik beschrieben wird. Den Übergang erhält man für $|\mu| \gg k_B T$, also $\tilde{z} \ll 1$. Unter diesen Voraussetzungen gilt $g_{3/2}(\alpha) \rightarrow \alpha$ (siehe Gleichung (2.18)). Damit bleibt die Dichteverteilung eines Boltzmann-Gases zu jedem Zeitpunkt nach der harmonischen Speicherung gaußförmig. Mit Hilfe der Teilchenzahlnormierung $N_T = \int n_T(\vec{r}, t) d^3 r$ läßt sich dann das chemische Potential eliminieren und man erhält anstelle von (A.9) das Ergebnis

$$n_T^{\text{Klass}}(\vec{r}, t) = N_T \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{\omega_x \omega_y \omega_z}{\lambda_x(t) \lambda_y(t) \lambda_z(t)} \exp \left\{ -\frac{m}{2k_B T} \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 \frac{r_i^2}{\lambda_i^2(t)} \right\}. \quad (\text{A.11})$$

Auch in diesem Fall wird die Verteilung im Laufe der Expansionszeit isotrop. Aus (A.11) erkennt man, daß sich die Standardabweichung der Ortsverteilung gemäß

$$\sigma_{r_i}(t) = \sqrt{\frac{k_B T}{m \omega_i^2} + \frac{k_B T}{m} t^2} = \sqrt{\sigma_{r_i,0}^2 + \sigma_{v_i}^2 t^2} \quad (\text{A.12})$$

mit der Zeit entwickelt. Gleichung (A.12) bietet die Möglichkeit, die Temperatur des Boltzmann-Gases durch die Beobachtung der *Dynamik* der Expansion zu bestimmen.

Dies bleibt auch für eine Bose-Verteilung eingeschränkt gültig: Für die Entfernung $\Delta_{r_i}(f, t)$, in der die zentrale Dichte (A.9) auf den Wert $f \cdot n_T(0, t)$ abnimmt, gilt:

$$g_{3/2} \left(\tilde{z} \exp \left\{ -\frac{m \omega_i^2}{2k_B T} \frac{\Delta_{r_i}(f, t)}{\lambda_i^2(t)} \right\} \right) \stackrel{!}{=} f \cdot g_{3/2}(\tilde{z}). \quad (\text{A.13})$$

Auflösen nach $\Delta_{r_i}(f, t)$ liefert

$$\Delta_{r_i}(f, t) = \left\{ 2 \ln \tilde{z} - 2 \ln \left[g_{3/2}^{-1}(f \cdot g_{3/2}(\tilde{z})) \right] \right\}^{1/2} \sqrt{\frac{k_B T}{m \omega_i^2} + \frac{k_B T}{m} t^2}. \quad (\text{A.14})$$

Da die Fugazität $\tilde{z}$ allein durch die Teilchenzahlnormierung festgelegt wird, hat der Vorfaktor keine Zeitabhängigkeit. Somit ist obige Gleichung zu (A.12) analog, in die sie für $\tilde{z} \ll 1$ und $f = 1/\sqrt{e}$ übergeht. Anders als dort ist jedoch hier die Breite der Verteilung zu einem Zeitpunkt t nicht allein durch die Temperatur, sondern (über die Fugazität) auch durch die Teilchenzahl bestimmt. Daher läßt sich die Temperatur allein aus der Dynamik (A.14) nicht mehr exakt bestimmen.

Anhang B

Polynomiale Näherungen der Bose-Einstein-Funktionen

Bei der Auswertung von Schnitten durch die Säulendichten $\tilde{n}(x, y)$ und $\hat{n}(x)$ Bose-verteilter Atomwolken, die aus Absorptions- oder Phasenkontrastaufnahmen gewonnen werden, müssen die Bose-Einstein-Funktionen $g_2\{\tilde{z} \exp[-\beta U(x, y)]\}$ und $g_{5/2}\{\tilde{z} \exp[-\beta U(x)]\}$ numerisch an die Daten angepaßt werden (vgl. (6.8) und (6.9)). Da es sich hierbei nicht um analytische Funktionen handelt (siehe (2.18)), ist dies mit einigem Aufwand verbunden,

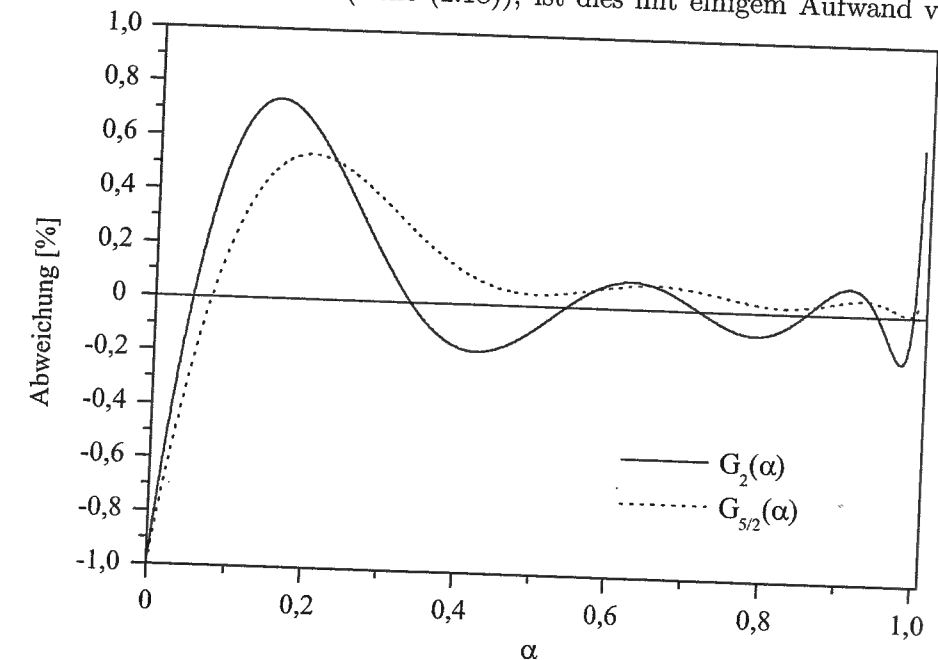


Abbildung B.1: Abweichungen der Funktionen $G_2(\alpha)$ und $G_{5/2}(\alpha)$ von den Bose-Einstein-Funktionen $g_2(\alpha)$ und $g_{5/2}(\alpha)$.

insbesondere können nicht Fitroutinen einer Standardsoftware wie etwa *Origin* benutzt werden. Um dieses Problem zu umgehen, werden die polynomialen Näherungen

$$\begin{aligned} G_2(\alpha) &\approx 1,01\alpha + 1,07\alpha^3 - 3,148\alpha^5 + 7,077\alpha^7 - 7,391\alpha^9 + 3,016\alpha^{11} \\ G_{5/2}(\alpha) &\approx 1,01\alpha + 0,618\alpha^3 - 1,408\alpha^5 + 2,675\alpha^7 - 2,464\alpha^9 + 0,909\alpha^{11} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

benutzt, die durch eine Anpassung an die numerisch berechneten Bose-Einstein-Funktionen ermittelt wurden. Die Verteilungen $\tilde{n}(x, y)$ und $\tilde{n}(x)$ werden somit durch eine Summe von 6 gemeinsam zentrierten Gauß-Verteilungen approximiert, deren Standardabweichungen in einem festen Verhältnis zueinander stehen. Der relevante Wertebereich beider Funktionen ist $0 \leq \alpha \leq 1$. Für $\alpha \rightarrow 0$ weichen die Näherungen um jeweils 1 % von $g_2(\alpha)$ und $g_{5/2}(\alpha)$ ab. Für alle anderen Werte von α ist die Abweichung noch geringer, wie in Abbildung B.1 zu erkennen ist. Im Bereich $0,1 \leq \tilde{z} \leq 1$ reproduzieren die Anpassungen von $G_2\{\tilde{z} \exp[-\beta U(x, y)]\}$ und $G_{5/2}\{\tilde{z} \exp[-\beta U(x)]\}$ an die jeweils exakten (numerisch erzeugten) Profile die Werte von β und $\tilde{z}$ mit einer Übereinstimmung von mindestens 99 %. Damit eignen sich die beiden Funktionen sehr gut für die quantitative Auswertung von Absorptionsbildern.

Anhang C

Klein-Winkel-Streuung in der semiklassischen Näherung

Wie in Kapitel 3 erläutert, müssen Stöße zwischen kalten Atomen in allen Stadien des Experimentes quantenmechanisch beschrieben werden. Technisch zu bewältigen ist dies, da bei den extrem tiefen Temperaturen nur wenige Partialwellen berücksichtigt werden müssen und das Wechselwirkungspotential gut bekannt ist. Stöße des Hintergrundgases oder der „warmen“ Produkte inelastischer Zerfallsprozesse mit kalten Atomen können hingegen nur semiklassisch behandelt werden. Ob solche Stöße zu Verlusten oder zu einer Heizrate führen hängt davon ab, wie sich die auf das (nahezu) ruhende Atom übertragene Energie

$$\Delta E(\beta) = 2 E (1 - \cos \beta) \frac{m}{m_P} \left(\frac{m_r}{m} \right)^2 \quad (\text{C.1})$$

zur Tiefe E_{trap} des Speicherpotentials verhält [118, 142]. Dabei sind β der Streuwinkel und $E/2$ die Energie des Stoßpaares im Schwerpunktsystem, das sich aus den Massen m_P („Projektil“) und m zusammensetzt und die reduzierte Masse m_r besitzt. Sinngemäß läßt sich für jede Energie $E/2$ durch $\Delta E(\beta_c) = E_{\text{trap}}$ ein Grenzwinkel β_c definieren. Verlust- und Heizrate ergeben sich dann gemäß

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= n_P v_r 2\pi \int_{\beta_c}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\beta) \sin \beta d\beta \\ \dot{Q} &= n_P v_r 2\pi \int_0^{\beta_c} \Delta E(\beta) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\beta) \sin \beta d\beta, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

wobei im Zusammenhang mit der Heizrate vorausgesetzt wird, daß die in der Falle verbleibenden Teilchen vollständig thermalisieren. Neben der Dichte der Projektile n_P und der mittleren Relativgeschwindigkeit v_r benötigt man für die Bestimmung beider Größen den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\beta)$.

Für hinreichend große Streuwinkel läßt sich die Streuung klassisch behandeln. Für ein Potential der Form $-C_6/R^6$ gilt mit der Notation $\sigma(\beta) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\beta)$ in diesem Regime [142]:

$$\frac{\sigma(\beta)}{\sigma(0)} = 0,2846 \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^{-14/6} \quad \text{für } \beta \gg \beta_0. \quad (\text{C.3})$$

Der kritische Winkel β_0 ist durch

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{k^2\sigma}} \quad \text{mit } k = \frac{m_r v_r}{\hbar} \quad (\text{C.4})$$

gegeben. Er hängt vom totalen Streuquerschnitt σ ab und begrenzt den Gültigkeitsbereich der klassischen Näherung zu kleinen Streuwinkeln hin: Für $\beta \simeq \beta_0$ werden die mit der Relativgeschwindigkeit verknüpfte de Broglie-Wellenlänge und die Reichweite des Wechselwirkungspotentials vergleichbar, und Beugungseffekte müssen fortan berücksichtigt werden. Für $\beta \ll \beta_0$ läßt sich die semiklassische Näherung

$$\frac{\sigma(\beta)}{\sigma(0)} = 1 - 0,9975 \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \quad (\text{C.5})$$

angeben [186, 142]. Im Übergangsbereich zwischen den beiden Regimen folgt der differentielle Streuquerschnitt den o. a. Referenzen zufolge in guter Näherung dem semiempirischen Gesetz

$$\frac{\sigma(\beta)}{\sigma(0)} = \left\{ 1 - 3,75 \sin \left[0,556 \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \right] + 2,94 \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \right\}^{-7/6}. \quad (\text{C.6})$$

Die Absolutwerte für $\sigma(0)$ und σ schließlich sind für das van der Waals-Potential durch

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= \frac{k^2 \sigma^2}{16\pi^2 \cos^2(\pi/5)} \\ \sigma &= 8,083 \left(\frac{C_6}{\hbar v_r} \right)^{2/5} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

gegeben. Die entsprechenden Verläufe des differentiellen Streuquerschnittes sind in Abbildung C.1 dargestellt.

Den Ausführungen in Kapitel 9.2 zufolge dominiert Rubidium im Hintergrundgas des UHV-Bereichs der Apparatur und begrenzt die Lebensdauer der Atomwolke bei einer Potentialtiefe von $E_{\text{trap}} \approx k_B \times 7 \text{ mK}$ auf knapp 80 s. Ausgehend von den Gleichungen (C.2), (C.3), (C.5) und (C.6) läßt sich dann leicht die Lebensdauer bestimmen, die in einem Potential der Tiefe $E_{\text{trap}} \approx k_B \times 10 \mu\text{K}$ unter sonst gleichen Bedingungen zu erwarten ist. Sie beträgt 35 s.

Mittlerer Energieübertrag durch Stöße

Die differentielle Wirkungsquerschnitt in der semiklassischen Näherung wird auch in Kapitel 10 zur Berechnung der im Mittel auf ein kaltes Atom übertragenen Energie

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{2\pi}{\sigma} \int_0^\pi \Delta E(\beta) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\beta) \sin \beta d\beta \quad (\text{C.8})$$

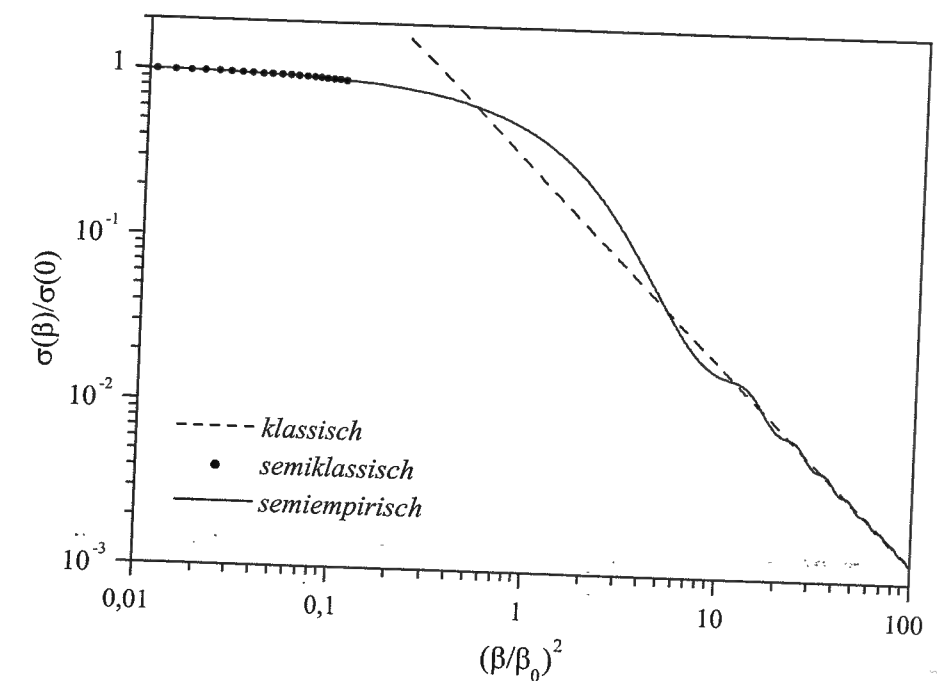


Abbildung C.1: Differentieller Wirkungsquerschnitt für Klein-Winkel-Streuung entsprechend den Gleichungen (C.3), (C.5) und (C.6).

herangezogen, sofern die kinetische Energie des einfallenden Atoms mehr als $k_B \times 60 \text{ mK}$ beträgt. Unterhalb dieser Energie wird auf die in Kapitel 3.1.2 (Abb. 3.3) präsentierten Ergebnisse der quantenmechanischen Rechnung [46] zurückgegriffen.

Anhang D

Mittlung der Säulendichte

In Kapitel 10 werden die dichtegemittelten Säulendichten kondensierter und thermischer Atomwolken benötigt, um die Stoßwahrscheinlichkeiten der Produkte inelastischer oder (sekundärer) elastischer Stöße bestimmen zu können. Ausgehend von Gleichung 10.4 ist im folgenden die Berechnung von $\langle nl \rangle_1$ für ein Boltzmann-verteiltes Gas zusammengefaßt. Die Rechnungen für $j > 1$ und die Bose- bzw. die TF-Verteilung sind aufwendiger, folgen jedoch dem gleichen Prinzip.

D.1 Auswertung am Beispiel der Boltzmann-Verteilung

Für $T \gg T_c$ ist die Dichteverteilung des Gases im harmonischen Bereich des Ioffe-Potentials zylindersymmetrisch und durch

$$n(\rho, z) = n_p \exp \left(-\frac{\rho^2}{2\sigma_\rho^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right) = n_p \exp \left(-\frac{\rho^2 + \varepsilon^2 z^2}{2\sigma_\rho^2} \right) \quad \text{mit} \quad (D.1)$$

$$n_p = \frac{N}{(2\pi)^{3/2} \sigma_\rho^2 \sigma_z} = \frac{N \varepsilon}{(2\pi)^{3/2} \sigma_\rho^3} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_\rho}{\sigma_z} = \frac{\omega_z}{\omega_\rho}$$

gegeben (siehe Gleichung (A.11) für $t = 0$). Gemäß Gleichung (10.4) muß die Säulendichte zunächst ausgehend von einem gegebenen Ort (ρ_0, z_0) über den Raumwinkel gemittelt werden, d.h. über beliebige Trajektorien $\vec{R}$, die von diesem Ort ausgehen. Die Integration wird in Kugelkoordinaten ausgeführt und beginnt mit der Parametrisierung

$$\left. \begin{aligned} z' &= z_0 + R \cos \vartheta \\ y' &= \rho_0 + R \sin \vartheta \cos \varphi \\ x' &= R \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \rho^2 &= \rho_0^2 + R^2 \sin^2 \vartheta + 2\rho_0 R \sin \vartheta \cos \varphi \\ z^2 &= z_0^2 + 2z_0 R \cos \vartheta + R^2 \cos^2 \vartheta \end{aligned} \quad (D.2)$$

der Trajektorie $\vec{R}$. Die über den Raumwinkel gemittelte Säulendichte $\langle \tilde{n}l \rangle(\rho_0, z_0)$ ergibt sich dann gemäß

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n}l \rangle(\rho_0, z_0) &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \int_{R=0}^{\infty} n(\rho_0, z_0, R, \vartheta, \varphi) dR d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{R=0}^{\infty} n_p \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_\rho^2} \left\{ \rho_0^2 + R^2 \sin^2 \vartheta + 2\rho_0 R \sin \vartheta \cos \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon^2 (z_0^2 + 2z_0 R \cos \vartheta + R^2 \cos^2 \vartheta) \right\} \right) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dR. \end{aligned} \quad (D.3)$$

Nach der Skalierung $\rho_0 \rightarrow \rho_0/\sigma_\rho$, $z_0 \rightarrow z_0/\sigma_\rho$, $R \rightarrow R/\sigma_\rho$ und der anschließenden Substitution $R \rightarrow R \sin \vartheta$ gilt es,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n}l \rangle(\rho_0, z_0) &= \frac{n_p \sigma_\rho}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{R=0}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ \rho_0^2 + R^2 + 2\rho_0 R \cos \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon^2 (z_0^2 + 2z_0 R \tan \vartheta + R^2 \tan^2 \vartheta) \right\} \right) d\vartheta d\varphi dR \end{aligned} \quad (D.4)$$

zu berechnen. Über die Substitution $\tan \vartheta = s \Rightarrow \frac{ds}{d\vartheta} = 1 + s^2$ gelangt man von hier aus zu dem Ausdruck:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n}l \rangle(\rho_0, z_0) &= \frac{n_p \sigma_\rho}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ \rho_0^2 + R^2 + 2\rho_0 R \cos \varphi \right\} \right) \\ &\quad \times \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ z_0^2 + 2z_0 R s + R^2 s^2 \right\} \right) ds d\varphi dR. \end{aligned} \quad (D.5)$$

Mit diesem Ergebnis läßt sich die dichtegemittelte Säulendichte $\langle nl \rangle_1$ auf die Form

$$\langle nl \rangle_1 = \frac{1}{N} \int_V n(\rho, z) \langle \tilde{n}l \rangle(\rho, z) dV = \frac{2\pi}{N} \int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{\rho=0}^{\infty} \rho n(\rho, z) \langle \tilde{n}l \rangle(\rho, z) d\rho dz \quad (D.6)$$

bringen, wobei von der Teilchenzahlnormierung $\int n(\rho, z) dV = N$ Gebrauch gemacht wurde. Auch hier können nun zunächst die Skalierungen $\rho \rightarrow \rho/\sigma_\rho$ und $z \rightarrow z/\sigma_\rho$ vorgenommen werden, was nach etwas Umformen zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle nl \rangle_1 &= n_p \sigma_\rho \frac{\varepsilon}{4\pi \sqrt{2\pi}} \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{\infty} \rho \exp \left(-\left\{ \rho^2 + \frac{1}{2} R^2 + \rho R \cos \varphi \right\} \right) \\ &\quad \times \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} R^2 s^2 \right) \times \underbrace{\int_{z=-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ 2z^2 + 2zRs \right\} \right) dz}_{=: I_1} ds d\varphi dR d\rho \end{aligned} \quad (D.7)$$

führt. Für das gekennzeichnete Integral gilt $I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon} \exp(\varepsilon^2 R^2 s^2 / 4)$, und es verbleibt somit,

$$\begin{aligned} \langle nl \rangle_1 &= n_p \sigma_\rho \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{1+s^2} \exp(-\rho^2) \\ &\quad \times \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{\infty} \exp\left(-\left\{R^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2 s^2}{4}\right) + \rho R \cos \varphi\right\}\right) dR d\varphi ds d\rho}_{=: I_2} \end{aligned} \quad (D.8)$$

zu berechnen. Die R -Integration kann nun ausgeführt werden und liefert das Ergebnis:

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2 + \varepsilon^2 s^2}} \exp\left(\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{2 + \varepsilon^2 s^2}\right) \left\{1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{2 + \varepsilon^2 s^2}}\right)\right\}. \quad (D.9)$$

Einsetzen von I_2 in Gleichung (D.8) und Umgruppieren der Terme führt auf den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \langle nl \rangle_1 &= n_p \sigma_\rho \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{(1+s^2)\sqrt{2 + \varepsilon^2 s^2}} \\ &\quad \times \int_{\varphi=0}^{2\pi} \exp\left(-\rho^2\left\{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{2 + \varepsilon^2 s^2}\right\}\right) \left(1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{2 + \varepsilon^2 s^2}}\right)\right) d\varphi ds d\rho. \end{aligned} \quad (D.10)$$

Von den beiden Beiträgen zur φ -Integration verschwindet nun jener, der die Fehlerfunktion enthält, aus Gründen der Symmetrie. Dann kann zunächst die ρ -Integration ausgeführt werden:

$$\int_{\rho=0}^{\infty} \rho \exp\left(-\rho^2\left\{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{2 + \varepsilon^2 s^2}\right\}\right) d\rho = \frac{1}{2\left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{2 + \varepsilon^2 s^2}\right)}. \quad (D.11)$$

Nun gilt es nur noch, den Ausdruck

$$\langle nl \rangle_1 = n_p \sigma_\rho \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{s=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2 + \varepsilon^2 s^2}}{1 + s^2} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{1}{2 + \varepsilon^2 s^2 - \cos^2 \varphi} d\varphi ds}_{=: I_3} \quad (D.12)$$

auszuwerten. Dazu wird zunächst die φ -Integration ausgeführt, die das Ergebnis

$$I_3 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{(2 + \varepsilon^2 s^2)(1 + \varepsilon^2 s^2)}} \quad (D.13)$$

liefert. Somit lautet das gesuchte Resultat:

$$\langle nl \rangle_1 = n_p \sigma_\rho \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + s^2)\sqrt{1 + \varepsilon^2 s^2}} ds = n_p \sigma_\rho \sqrt{\frac{\pi}{8}} I(\varepsilon). \quad (D.14)$$

Für $\varepsilon = 1$, also sphärische Symmetrie, gilt $I(\varepsilon = 1) = 1$, während der Wert des Anisotropieintegrals für alle anderen $\varepsilon > 0$ durch

$$I(\varepsilon) = \frac{\operatorname{artanh}\left[\sqrt{1 - 1/\varepsilon^2}\right]}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (D.15)$$

gegeben ist.

Anhang E

Eigenschaften des Isotops ^{87}Rb

Die folgenden Daten sind, sofern sie sich nicht aus Definitionen ergeben, den Referenzen [187, 188, 189, 57] entnommen.

Allgemeine Eigenschaften

Atomzahl:	37
Natürliches Vorkommen:	27,85 %
Masse:	$1,4431 \times 10^{-25} \text{ kg}$
Elektronenkonfiguration:	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s$
Kernspin I :	$3/2$
g_I -Faktor:	$0,995 \times 10^{-3}$
Atomradius:	$2,98 \text{ \AA}$
Schmelzpunkt:	$38,89 \text{ }^\circ\text{C}$
Siedepunkt:	$686 \text{ }^\circ\text{C}$
Dichte (293 K):	$1,53 \text{ g/cm}^3$
Sättigungsdampfdruck (293 K):	$3 \times 10^{-7} \text{ mbar}$

Für die Laserkühlung relevante Eigenschaften

Grundzustand:	$5s^2 S_{1/2}$
Angeregter Zustand:	$5p^2 P_{3/2}$
Wellenlänge D_2 -Linie λ :	$780,24 \text{ nm}$
Lebensdauer τ_n :	$26,45 \text{ ns}$
Natürliche Linienbreite $\Delta\nu = (2\pi\tau_n)^{-1}$:	$6,02 \text{ MHz}$
Sättigungsintensität (s. u.) $I_S = 4\pi^2\hbar c/(6\tau_n\lambda^3)$:	$1,656 \text{ mW/cm}^2$
Dopplertemperatur $T_D = \hbar\nu_n/(2k_B)$:	$143 \text{ }^\mu\text{K}$
Rückstoßtemperatur $T_R = \hbar^2/(3\lambda^2 m k_B)$:	120 nK
Rückstoßgeschwindigkeit $v_R = \hbar/(\lambda m)$:	6 mm/s

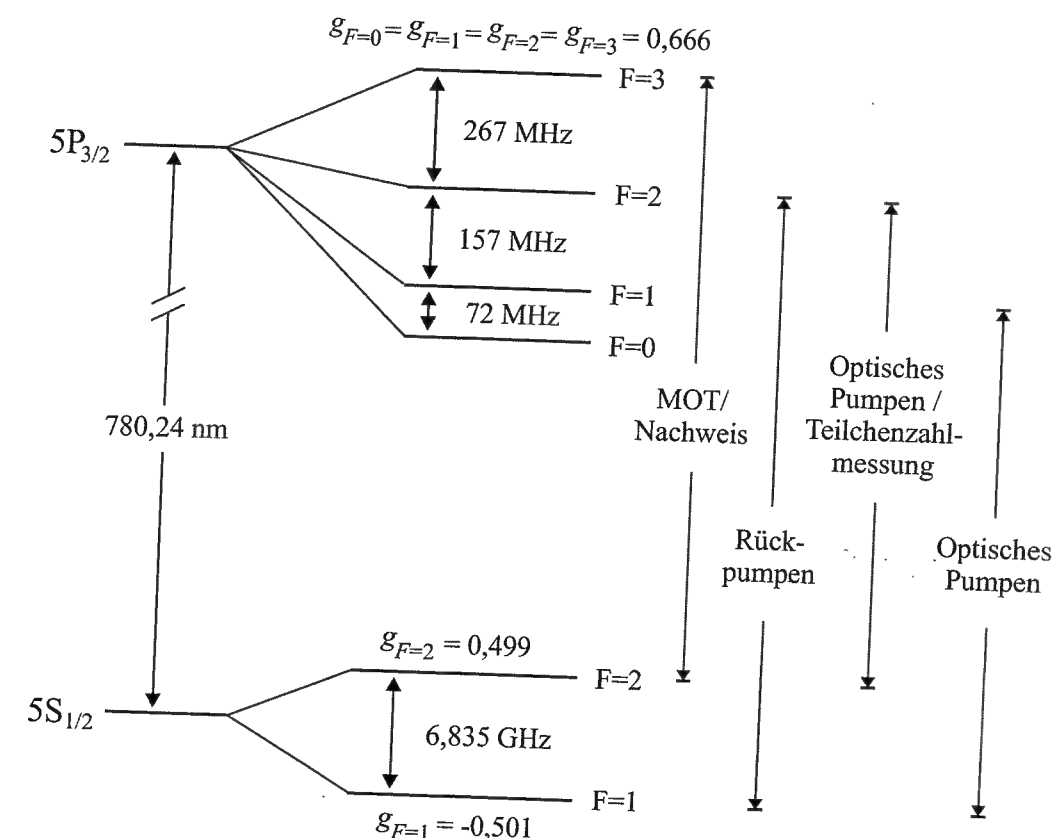


Abbildung E.1: Hyperfeinstruktur der D_2 -Linie von ^{87}Rb und die im Experiment verwendeten Übergänge.

Die angegebene Sättigungsintensität bezieht sich auf die sog. stärksten Übergänge $|F_g = 2, m_F = \pm 2\rangle \rightarrow |F_e = 3, m_F = \pm 3\rangle$ und entspricht einer Besetzung des angeregten Zustands von $1/4$.

Abbildung E.1 zeigt den für diese Arbeit relevanten Ausschnitt aus dem Termschema von ^{87}Rb . Die Quadrate der Clebsch-Gordan-Koeffizienten für Übergänge zwischen den Zeeman-Niveaus der D_2 -Linie sind Abbildung E.2 zu entnehmen.

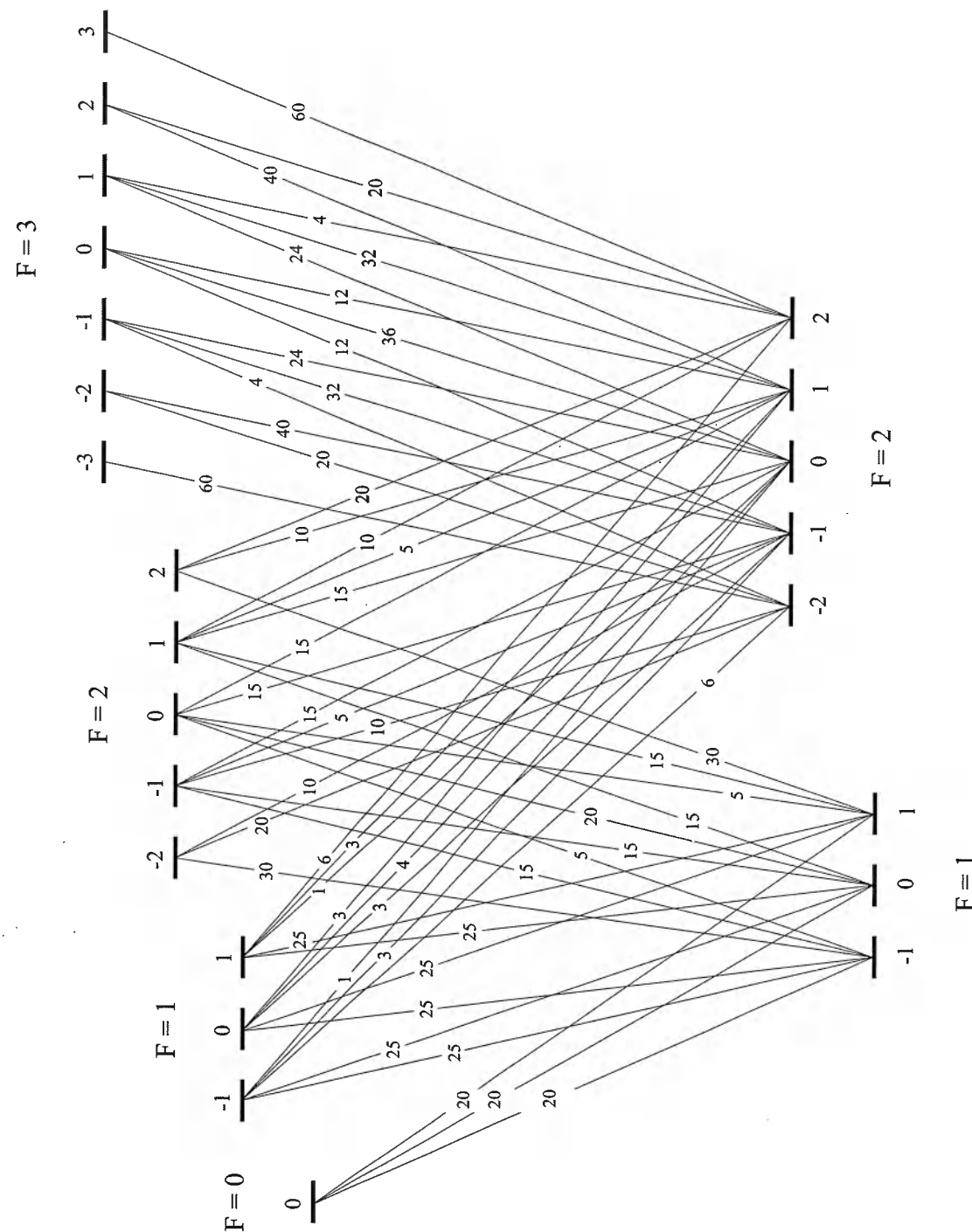


Abbildung E.2: Quadrate der Clebsch-Gordan-Koeffizienten (CGK) der D_2 -Linie von ^{87}Rb .

Literaturverzeichnis

- [1] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, 1924:261, 1924.
- [2] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, 1925:3, 1925.
- [3] W. Pauli. The Connection Between Spin and Statistics. *Phys. Rev.*, 58:716, 1940.
- [4] F. London. The λ -Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy. *Nature*, 141:643, 1938.
- [5] J. L. Lin und J. P. Wolfe. Bose-Einstein Condensation of Paraexcitons in Stressed Cu_2O . *Phys. Rev. Lett.*, 71:1222, 1993.
- [6] H. F. Hess, G. P. Kochanski, J. M. Doyle, N. Masuhara, D. Kleppner, und T. J. Greytak. Magnetic Trapping of Spin-Polarized Atomic Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 59:672, 1987.
- [7] N. Masuhara, J. M. Doyle, J. C. Sandberg, D. Kleppner, T. J. Greytak, H. F. Hess, und G. P. Kochanski. Evaporative Cooling of Spin-Polarized Atomic Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 61:935, 1988.
- [8] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, und T. J. Greytak. Bose-Einstein Condensation of Atomic Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3811, 1998.
- [9] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, und E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, 269:198, 1995.
- [10] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, und R. G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1687, 1995.
- [11] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. A. Joffe, M. R. Andrews, und W. Ketterle. Evaporative Cooling of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 74:5202, 1995.
- [12] D. J. Wineland und H. Dehmelt. Proposed $10^{14}\delta\nu < \nu$ laser fluorescence spectroscopy on Tl^+ mono-ion oscillator III. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 20:637, 1975.

- [13] T. W. Hänsch und A. L. Schawlow. Cooling of Gases by Laser Radiation. *Opt. Commun.*, 13:68, 1975.
- [14] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, und D. E. Pritchard. Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2631, 1987.
- [15] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, und E. A. Cornell. Stable, Tightly Confining Magnetic Trap for Evaporative Cooling of Neutral Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 74:3352, 1995.
- [16] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, und W. Ketterle. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3969, 1995.
- [17] W. Hänsel, P. Hommelhoff, T. W. Hänsch, und J. Reichel. Bose-Einstein condensation on a microelectronic chip. *Nature*, 413:498, 2001.
- [18] H. Ott, J. Fortagh, G. Schlotterbeck, A. Grossmann, und C. Zimmermann. Bose-Einstein Condensation in a Surface Microtrap. *Phys. Rev. Lett.*, 87:230401, 2001.
- [19] M. D. Barrett, J. A. Sauer, und M. S. Chapman. All-Optical Formation of an Atomic Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 87:010404, 2001.
- [20] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, und C. E. Wieman. Stable ^{85}Rb Bose-Einstein Condensates with Widely Tunable Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1795, 2000.
- [21] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R. J. Brecha, A. Simoni, und M. Inguscio. Bose-Einstein Condensation of Potassium Atoms by Sympathetic Cooling. *Science*, 294:1320, 2001.
- [22] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. I. Westbrook, und A. Aspect. A Bose-Einstein Condensate of Metastable Atoms. *Science*, 292:461, 2001.
- [23] F. Pereira Dos Santos, J. Léonard, J. Wang, C. J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C. S. Unnikrishnan, M. Leduc, und C. Cohen-Tannoudji. Bose-Einstein Condensation of Metastable Helium. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3459, 2001.
- [24] M. Inguscio, S. Stringari, und C. E. Wieman, Herausgeber. *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases. Proc. of the international school of physics Enrico Fermi, Course CXL*. IOS Press, Amsterdam, 1999.
- [25] C. M. Savage und M. P. Das, Herausgeber. *Bose-Einstein Condensation: From Atomic Physics to Quantum Fluids. Proc. of the 13th Physics Summer School Held in Canberra, Australia*. World Scientific, Singapore, 2001.
- [26] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, und S. Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71:463, 1999.

- [27] A. J. Leggett. Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. *Rev. Mod. Phys.*, 73:307, 2001.
- [28] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, und W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 392:151, 1998.
- [29] Ph. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen, und B. J. Verhaar. Observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 81:69, 1998.
- [30] J. L. Roberts, N. R. Claussen, J. P. Burke, Jr., C. H. Greene, E. A. Cornell, und C. E. Wieman. Resonant Magnetic Field Control of Elastic Scattering in Cold ^{85}Rb . *Phys. Rev. Lett.*, 81:5109, 1998.
- [31] V. Vuletić, A. J. Kerman, C. Chin, und S. Chu. Observation of Low-Field Feshbach Resonances in Collisions of Cesium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 82:1406, 1999.
- [32] U. Ernst. Bose-Einstein-Kondensation von Rubidiumatomen, Dissertation, Universität Konstanz, 1998.
- [33] J. Schuster, A. Marte, S. Amthage, B. Sang, G. Rempe, und H. C. W. Beijerinck. Avalanches in a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 87:170404, 2001.
- [34] W. Greiner, L. Neise, und H. Stöcker. *Thermodynamik und statistische Mechanik*. Harri Deutsch, Thun, 2. Auflage, 1993.
- [35] K. Huang. *Statistical Mechanics*. Wiley & Sons, New York, 2. Auflage, 1987.
- [36] R. K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2. Auflage, 1996.
- [37] S. R. De Groot, G. J. Hooyman, und C. A. ten Seldam. On Bose-Einstein condensation. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 203:266, 1950.
- [38] V. Bagnato, D. E. Pritchard, und D. Kleppner. Bose-Einstein condensation in an external potential. *Phys. Rev. A*, 35:4354, 1987.
- [39] S. Grossmann und M. Holthaus. λ -Transition to the Bose-Einstein condensate. *Z. Naturforsch.*, 50a:921, 1995.
- [40] S. Grossmann und M. Holthaus. On Bose-Einstein condensation in harmonic traps. *Phys. Lett. A*, 208:188, 1995.
- [41] A. F. G. Wyatt. Evidence for a Bose-Einstein condensate in liquid ^4He from quantum evaporation. *Nature*, 391:56, 1998.
- [42] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, und C. E. Wieman. Production of Two Overlapping Bose-Einstein Condensates by Sympathetic Cooling. *Phys. Rev. Lett.*, 78:586, 1997.

- [43] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Redwood City, revidierte Auflage, 1994.
- [44] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik, Band 5: Quantenmechanik, Teil 2*. Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1993.
- [45] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajev. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Thun, 24. Auflage, 1989.
- [46] B. J. Verhaar. Persönliche Mitteilung, 2000.
- [47] R. S. Freeland. Photoassociation Spectroscopy of Ultracold and Bose-Condensed Atomic Gasses, Dissertation, University of Texas, Austin, 2001.
- [48] B. DeMarco, J. L. Bohn, J. B. Burke, Jr., M. Holland, und D. S. Jin. Measurement of p-Wave Threshold Law Using Evaporatively Cooled Fermionic Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 82:4208, 1999.
- [49] D. J. Heinzen. *Ultracold atomic interactions*. In: *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases. Proc. of the international school of physics Enrico Fermi, Course CXL, Hsg.: M. Inguscio, S. Stringari und C. E. Wieman, S. 351*. IOS Press, Amsterdam, 1999.
- [50] H. Haken und H. C. Wolf. *Molekülphysik und Quantenchemie*. Springer, Berlin, 2. Auflage, 1994.
- [51] B. Shizgal. Kinetic-theory calculation of NMR relaxation-time of dilute He-3 gas. *J. Chem. Phys.*, 58:3424, 1973.
- [52] F. H. Mies, C. J. Williams, P. S. Julienne, und M. Krauss. Estimating Bounds on Collisional Relaxation Rates of Spin-Polarized ^{87}Rb Atoms at Ultracold Temperatures. *J. Res. Nat. Inst. Stand. Technol.*, 101:521, 1996.
- [53] J. P. Burke, Jr. Theoretical Investigation of Cold Alkali Atom Collisions, Dissertation, University of Colorado, Boulder, 1999.
- [54] E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, und B. J. Verhaar. Interisotope Determination of Ultracold Rubidium Interactions from Three High-Precision Experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 88:093201, 2002.
- [55] G. Hadinger, G. Hadinger, S. Magnier, und M. Aubert-Frécon. A Particular Case of Asymptotic Formulas for Exchange Energy between Two Long-Range Interacting Atoms with Open Valence Shells of Any Type: Application to the Ground State of Alkali Dimers. *J. Mol. Spectr.*, 175:441, 1996.
- [56] M. Marinescu, H. R. Sadeghpour, und A. Dalgarno. Dispersion coefficients for alkali-metal dimers. *Phys. Rev. A*, 49:982, 1994.
- [57] E. Arimondo, M. Inguscio, und P. Violino. Experimental determinations of the hyperfine structure in the alkali atoms. *Rev. Mod. Phys.*, 49:31, 1977.

- [58] C. Amiot. Laser induced fluorescence of Rb_2 : The $(1)^1\Sigma_g^+(X)$, $(2)^1\Sigma_g^+$, $(1)^1\Pi_u(B)$, $(1)^1\Pi_g$, and $(2)^1\Pi_u(C)$ electronic states. *J. Chem. Phys.*, 93:8591, 1990.
- [59] J. Y. Seto, R. J. Le Roy, J. Vergès, und C. Amiot. Direct potential fit analysis of the $X^1\Sigma_g^+$ state of Rb_2 : Nothing else will do! *J. Chem. Phys.*, 113:3067, 2000.
- [60] J. D. Miller, R. A. Cline, und D. J. Heinzen. Photoassociation Spectrum of Ultracold Rb Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 71:2204, 1993.
- [61] C. C. Tsai, R. S. Freeland, J. M. Vogels, H. M. J. M. Boesten, B. J. Verhaar, und D. J. Heinzen. Two-Color Photoassociation Spectroscopy of Ground State Rb_2 . *Phys. Rev. Lett.*, 79:1245, 1997.
- [62] P. S. Julienne, F. H. Mies, E. Tiesinga, und C. J. Williams. Collisional Stability of Double Bose Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 78:1880, 1997.
- [63] J. P. Burke, Jr., J. L. Bohn, B. D. Esry, und C. H. Greene. Impact of the ^{87}Rb singlet scattering length on suppressing inelastic collisions. *Phys. Rev. A*, 55:R2511, 1997.
- [64] E. Tiesinga, B. J. Verhaar, und H. T. C. Stoof. Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions. *Phys. Rev. A*, 47:4114, 1993.
- [65] E. Tiesinga, A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, und H. T. C. Stoof. Conditions for Bose-Einstein condensation in magnetically trapped atomic cesium. *Phys. Rev. A*, 46:R1167, 1992.
- [66] A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, und A. Axelsson. Resonances in ultracold collisions of ^6Li , ^7Li , and ^{23}Na . *Phys. Rev. A*, 51:4852, 1995.
- [67] M. Marinescu und L. You. Controlling Atom-Atom Interaction at Ultralow Temperatures by dc Electric Fields. *Phys. Rev. Lett.*, 81:4596, 1998.
- [68] A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, und T. M. Nagtegaal. Collisions of dressed ground-state atoms. *Phys. Rev. A*, 53:4343, 1996.
- [69] P. O. Fedichev, Yu. Kagan, G. V. Shlyapnikov, und J. T. M. Walraven. Influence of Nearly Resonant Light on the Scattering Length in Low-Temperature Atomic Gases. *Phys. Rev. Lett.*, 77:2913, 1996.
- [70] F. van Abeelen. Interaction Processes in Cold Gases of Alkali Atoms, Dissertation, Technische Universität Eindhoven, 1999.
- [71] G. H. Rawitscher, B. D. Esry, E. Tiesinga, J. B. Burke, Jr., und I. Koltracht. Comparison of numerical methods for the calculation of cold atom collisions. *J. Chem. Phys.*, 111:10418, 1999.
- [72] J. Söding, D. Guéry-Odelin, P. Desbiolles, F. Chevy, H. Inamori, und J. Dalibard. Three-body decay of a rubidium Bose-Einstein condensate. *Appl. Phys. B*, 69:257, 1999.

- [73] M. Yasuda und F. Shimizu. Observation of Two-Atom Correlation of an Ultracold Neon Atomic Beam. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3090, 1996.
- [74] Yu. Kagan, B. V. Svistunov, und G. V. Shlyapnikov. Effect of Bose condensation on inelastic processes in gases. *JETP Lett.*, 42:209, 1985.
- [75] W. Ketterle und H.-J. Miesner. Coherence properties of Bose-Einstein condensates and atom lasers. *Phys. Rev. A*, 56:3291, 1997.
- [76] A. J. Moerdijk und B. J. Verhaar. Collisional two- and three-body decay rates of dilute quantum gases at ultralow temperatures. *Phys. Rev. A*, 53:R19, 1996.
- [77] A. J. Moerdijk, H. M. J. M. Boesten, und B. J. Verhaar. Decay of trapped ultracold alkali atoms by recombination. *Phys. Rev. A*, 53:916, 1996.
- [78] P. O. Fedichev, M. W. Reynolds, und G. V. Shlyapnikov. Three-Body Recombination of Ultracold Atoms to a Weakly Bound s Level. *Phys. Rev. Lett.*, 77:2921, 1996.
- [79] E. Nielsen und J. H. Macek. Low-Energy Recombination of Identical Bosons by Three-Body Collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 83:1566, 1999.
- [80] B. D. Esry, C. H. Greene, und J. P. Burke, Jr. Recombination of Three Atoms in the Ultracold Limit. *Phys. Rev. Lett.*, 83:1751, 1999.
- [81] P. F. Bedaque, E. Braaten, und H.-W. Hammer. Three-body Recombination in Bose Gases with Large Scattering Length. *Phys. Rev. Lett.*, 85:908, 2000.
- [82] B. D. Esry, C. H. Greene, Y. Zhou, und C. D. Lin. Role of the scattering length in three-boson dynamics and Bose-Einstein condensation. *J. Phys. B*, 29:L51, 1996.
- [83] B. D. Esry, C. D. Lin, und C. H. Greene. Adiabatic hyperspherical study of the helium trimer. *Phys. Rev. A*, 54:394, 1996.
- [84] Z. Zhen und J. Macek. Loosely bound states of three particles. *Phys. Rev. A*, 38:1193, 1988.
- [85] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, und C. E. Wieman. Coherence, Correlations, and Collisions: What One Learns about Bose-Einstein Condensates from Their Decay. *Phys. Rev. Lett.*, 79:337, 1997.
- [86] E. P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Cimento*, 20:454, 1961.
- [87] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP-USSR*, 13:451, 1961.
- [88] A. L. Fetter. *Theory of a dilute low-temperature trapped Bose condensate. In: Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases. Proc. of the international school of physics Enrico Fermi, Course CXL. Hsg.: M. Inguscio, S. Stringari und C. E. Wieman, S. 201. IOS Press, Amsterdam, 1999.*

- [89] J. M. Gerton, D. Strekalov, I. Prodan, und R. G. Hulet. Direct observation of growth and collapse of a Bose-Einstein condensate with attractive interactions. *Nature*, 408:692, 2000.
- [90] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. L. Cornish, J. L. Roberts, E. A. Cornell, und C. E. Wieman. Dynamics of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates. *Nature*, 412:295, 2001.
- [91] Y. Castin. *Bose-Einstein condensates in atomic gases: simple theoretical results. In: Coherent atomic matter waves, Lecture notes of the Les Houches summer school. Hsg.: R. Kaiser, C. Westbrook und F. David, EDP Sciences und Springer, 2001.*
- [92] K. Huang. Bose Condensate in External Potential: A Thomas-Fermi Approach. *arXiv-eprint*, (www.arXiv.org):cond-mat/9609033, 1996.
- [93] G. Baym und C. J. Pethick. Ground-State Properties of Magnetically Trapped Bose-Condensed Rubidium Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 76:6, 1996.
- [94] V. F. Sears, E. C. Svensson, P. Martel, und A. D. B. Woods. Neutron-Scattering Determination of the Momentum Distribution and the Condensate Fraction in Liquid ^4He . *Phys. Rev. Lett.*, 49:279, 1982.
- [95] E. Manousakis, V. R. Pandharipande, und Q. N. Usmani. Condensate fraction and momentum distribution in the ground state of liquid ^4He . *Phys. Rev. B*, 31:7022, 1985.
- [96] A. Griffin. Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous Bose gas at finite temperatures. *Phys. Rev. B*, 53:9341, 1996.
- [97] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, und S. Stringari. Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas. *Phys. Rev. A*, 54:R4633, 1996.
- [98] E. Timmermans, P. Tommasini, und K. Huang. Variational Thomas-Fermi theory of a nonuniform Bose condensate at zero temperature. *Phys. Rev. A*, 55:3645, 1997.
- [99] Y. Castin und R. Dum. Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps. *Phys. Rev. Lett.*, 77:5315, 1996.
- [100] Yu. Kagan, E. L. Surkov, und G. V. Shlyapnikov. Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential. *Phys. Rev. A*, 54:R1753, 1996.
- [101] M. Holland und J. Cooper. Expansion of a Bose-Einstein condensate in a harmonic potential. *Phys. Rev. A*, 53:R1954, 1996.
- [102] F. Dalfovo, C. Minniti, S. Stringari, und L. Pitaevskii. Nonlinear dynamics of a Bose condensed gas. *Phys. Lett. A*, 227:259, 1997.
- [103] U. Ernst, A. Marte, F. Schreck, J. Schuster, und G. Rempe. Bose-Einstein condensation in a pure Ioffe-Pritchard field configuration. *Europhys. Lett.*, 41:1, 1998.

- [104] U. Ernst, J. Schuster, F. Schreck, A. Marte, A. Kuhn, und G. Rempe. Free expansion of a Bose-Einstein condensate from an Ioffe-Pritchard magnetic trap. *Appl. Phys. B*, 67:719, 1998.
- [105] H. Katori, T. Ido, Y. Isoya, und M. Kuwata-Gonokami. Magneto-Optical Trapping and Cooling of Strontium Atoms down to the Photon Recoil Temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 82:1116, 1999.
- [106] T. Ido, Y. Isoya, und H. Katori. Optical-dipole trapping of Sr atoms at a high phase-space density. *Phys. Rev. A*, 61:061403, 2000.
- [107] V. S. Letokhov und V. P. Chebotayev. *Nonlinear Laser Spectroscopy*. Springer, Berlin, 1977.
- [108] J. P. Gordon und A. Ashkin. Motion of atoms in a radiation trap. *Phys. Rev. A*, 21:1606, 1980.
- [109] W. D. Phillips. *Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms*. In: *Laser Manipulation of Atoms and Ions. Proc. of the international school of physics Enrico Fermi, Course CXVIII, Hsg.: E. Arimondo, W. D. Phillips und F. Strumia, S. 289*. North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [110] M. Drewsen, Ph. Laurent, A. Nadir, G. Santarelli, A. Clairon, Y. Castin, D. Grison, und C. Salomon. Investigation of sub-Doppler cooling effects in a cesium magneto-optical trap. *Appl. Phys. B*, 59:283, 1994.
- [111] C. J. Cooper, G. Hillenbrand, J. Rink, C. G. Townsend, K. Zetie, und C. J. Foot. The Temperature of Atoms in a Magneto-optical Trap. *Europhys. Lett.*, 28:397, 1994.
- [112] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, und C. Wieman. Very Cold Trapped Atoms in a Vapor Cell. *Phys. Rev. Lett.*, 65:1571, 1990.
- [113] C. J. Myatt, N. R. Newbury, R. W. Ghrist, S. Loutzenhiser, und C. E. Wieman. Multiply loaded magneto-optical trap. *Opt. Lett.*, 21:290, 1996.
- [114] A. M. Steane, M. Chowdhury, und C. J. Foot. Radiation force in the magneto-optical trap. *J. opt. Soc. Am. B*, 9:2142, 1992.
- [115] K. Lindquist, M. Stephens, und C. Wieman. Experimental and theoretical study of the vapor-cell Zeeman optical trap. *Phys. Rev. A*, 46:4082, 1992.
- [116] J. E. Bjorkholm. Collision-limited lifetimes of atom traps. *Phys. Rev. A*, 38:1599, 1988.
- [117] M. Marinescu und A. Dalgarno. Dispersion forces and long-range electronic transition dipole moments of alkali-metal dimer excited states. *Phys. Rev. A*, 52:311, 1995.
- [118] S. Bali, K. M. O'Hara, M. E. Gehm, S. R. Granade, und J. E. Thomas. Quantum-diffractive background gas collisions in atom-trap heating and loss. *Phys. Rev. A*, 60:R29, 1999.

- [119] H. C. W. Beijerinck. Heating rates in collisionally opaque alkali-metal atom traps: Role of secondary collisions. *Phys. Rev. A*, 62:063614, 2000.
- [120] J. Weiner, V. S. Bagnato, S. Zilio, und P. S. Julienne. Experiments and theory in cold and ultracold collisions. *Rev. Mod. Phys.*, 71:1, 1999.
- [121] D. W. Sesko, T. G. Walker, und C. E. Wieman. Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap. *J. Opt. Soc. Am. B*, 8:946, 1991.
- [122] C. G. Townsend, N. H. Edwards, C. J. Cooper, K. P. Zetie, C. J. Foot, A. M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin, und J. Dalibard. Phase-space density in the magneto-optical trap. *Phys. Rev. A*, 52:1423, 1995.
- [123] W. Ketterle, K. B. Davis, M. A. Joffe, A. Martin, und D. E. Pritchard. High Densities of Cold Atoms in a *dark* Spontaneous-Force Trap. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2253, 1993.
- [124] M. H. Anderson, W. Petrich, J. R. Ensher, und E. A. Cornell. Reduction of light-assisted collisional loss rate from a low-pressure vapor-cell trap. *Phys. Rev. A*, 50:R3597, 1994.
- [125] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, und E. A. Cornell. Behavior of Atoms in a Compressed Magneto-Optical Trap. *J. Opt. Soc. Am. B*, 11:1332, 1994.
- [126] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould, und H. J. Metcalf. Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit. *Phys. Rev. Lett.*, 61:169, 1988.
- [127] J. Dalibard und C. Cohen-Tannoudji. Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6:2023, 1989.
- [128] P. J. Ungar, D. S. Weiss, E. Riis, und S. Chu. Optical molasses and multilevel atoms: theory. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6:2058, 1989.
- [129] W. H. Wing. On neutral particle trapping in quasistatic electromagnetic fields. *Prog. Quant. Electr.*, 8:181, 1984.
- [130] A. L. Migdall, J. V. Prodan, W. D. Phillips, T. H. Bergeman, und H. J. Metcalf. First Observation of Magnetically Trapped Neutral Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 54:2596, 1985.
- [131] Y. V. Gott, M. S. Ioffe, und V. G. Tel'kovskii. Some new results on confinement in magnetic traps. *Nucl. Fusion, Suppl.* 3:1045, 1962.
- [132] D. E. Pritchard. Cooling Neutral Atoms in a Magnetic Trap for Precision Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 51:1336, 1983.
- [133] T. Bergeman, G. Erez, und H. Metcalf. Magnetostatic trapping fields for neutral atoms. *Phys. Rev. A*, 35:1535, 1987.
- [134] A. Marte. Verdampfungskühlung magnetisch gespeicherter Atome, Diplomarbeit, Universität Konstanz, 1997.

- [135] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, und W. Ketterle. Bose-Einstein Condensation in a Tightly Confining dc Magnetic Trap. *Phys. Rev. Lett.*, 77:416, 1996.
- [136] L. V. Hau, B. D. Busch, C. Liu, Z. Dutton, M. M. Burns, und J. A. Golovchenko. Near-resonant spatial images of confined Bose-Einstein condensates in a 4-Dee magnetic bottle. *Phys. Rev. A*, 58:R54, 1998.
- [137] T. Esslinger, I. Bloch, und T. W. Hänsch. Bose-Einstein condensation in a quadrupole-Ioffe-configuration trap. *Phys. Rev. A*, 58:R2664, 1998.
- [138] P. W. H. Pinkse, A. Mosk, M. Weidemüller, M. W. Reynolds, T. W. Hijmans, und J. T. M. Walraven. Adiabatically Changing the Phase-Space Density of a Trapped Bose Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 78:990, 1997.
- [139] A. Marte. Dissertation, in Vorbereitung.
- [140] B. Sang. Magnetische Speicherung eines ultrakalten atomaren Gases für die Bose-Einstein-Kondensation, Diplomarbeit, Universität Konstanz, 2001.
- [141] E. A. Cornell, J. R. Ensher, und C. E. Wieman. *Experiments in dilute atomic Bose-Einstein condensation. In: Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases. Proc. of the international school of physics Enrico Fermi, Course CXL. Hsg.: M. Inguscio, S. Stringari und C. E. Wieman, S. 15.* IOS Press, Amsterdam, 1999.
- [142] H. C. W. Beijerinck. Rigorous calculation of heating in alkali-metal traps by background gas collisions. *Phys. Rev. A*, 61:033606, 2000.
- [143] H. F. Hess. Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen. *Phys. Rev. B*, 34:3476, 1986.
- [144] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, und E. A. Cornell. *Evaporative cooling of rubidium atoms in a magnetic trap. In: Atomic Physics 14., Hsg.: C. Wieman und D. Wineland.* AIP, New York, 1994.
- [145] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. A. Joffe, und W. Ketterle. *Evaporative cooling of sodium atoms. In: Atomic Physics 14., Hsg.: C. Wieman und D. Wineland.* AIP, New York, 1994.
- [146] O. J. Luiten, M. W. Reynolds, und J. T. M. Walraven. Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas. *Phys. Rev. A*, 53:381, 1996.
- [147] S. Amtage. Verlustmechanismen in einem Bose-Einstein-Kondensat, Diplomarbeit, Universität Konstanz, 2000. (Die dieser Referenz zugrundeliegenden Rohdaten wurden für die vorliegende Arbeit zum Teil neu ausgewertet, um das erforderliche Maß an Genauigkeit zu gewährleisten.).
- [148] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, und G. Grynberg. *Atom-Photon Interactions.* Wiley & Sons, New York, 1992.

- [149] J. R. Rubbmark, M. M. Kash, M. G. Littman, und D. Kleppner. Dynamical effects at avoided level crossings: A study of the Landau-Zener effect using Rydberg atoms. *Phys. Rev. A*, 23:3107, 1981.
- [150] N. V. Vitanov und K.-A. Suominen. Time-dependent control of ultracold atoms in magnetic traps. *Phys. Rev. A*, 56:R4377, 1997.
- [151] B. Desruelle, V. Boyer, S. G. Murdoch, G. Delannoÿ, P. Bouyer, A. Aspect, und M. Lécivain. Interrupted evaporative cooling of ^{87}Rb atoms trapped in a high magnetic field. *Phys. Rev. A*, 60:R1759, 1999.
- [152] O. H. Pakarinen und K.-A. Suominen. Atomic dynamics in evaporative cooling of trapped alkali-metal atoms in strong magnetic fields. *Phys. Rev. A*, 62:025402, 2000.
- [153] K. Dieckmann. Bose-Einstein Condensation with High Atom Number in a Deep Magnetic Trap, Dissertation, Universität Amsterdam, 2001.
- [154] W. Ketterle und N. J. van Druten. *Evaporative cooling of trapped atoms. In: Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics, Vol. 37, Hsg.: B. Bederson und H. Walther, S. 181.* Academic Press, San Diego, 1996.
- [155] F. Schreck. Experimentelle Realisierung eines Bose-Einstein-Kondensats, Diplomarbeit, Universität Konstanz, 1998.
- [156] H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, D. S. Durfee, S. Inouye, und W. Ketterle. Bosonic Stimulation in the Formation of a Bose-Einstein Condensate. *Science*, 279:1005, 1998.
- [157] K. E. Gibble, S. Kasapi, und S. Chu. Improved magneto-optic trapping in a vapor cell. *Opt. Lett.*, 17:526, 1992.
- [158] L. Allen und J. H. Eberly. *Optical Resonance and Two-Level Atoms.* Wiley & Sons, New York, 1975.
- [159] W. Ketterle, D. S. Durfee, und D. M. Stamper-Kurn. *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. In: Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases. Proc. of the international school of physics Enrico Fermi, Course CXL, Hsg.: M. Inguscio, S. Stringari und C. E. Wieman, S. 67.* IOS Press, Amsterdam, 1999.
- [160] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, und W. Ketterle. Propagation of Sound in a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 79:553, 1997, Erratum: *Phys. Rev. Lett.*, 80:2967, 1998.
- [161] M. R. Andrews, K. B. Davis, D. S. Durfee, D. M. Kurn, M.-O. Mewes, und W. Ketterle. Direct, Nondestructive Observation of a Bose Condensate. *Science*, 273:84, 1996.
- [162] D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, S. Inouye, M. R. Andrews, und W. Ketterle. Collisionless and Hydrodynamic Excitations of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 81:500, 1998.

- [163] S. Wolf. Entwicklung und Charakterisierung eines frequenzstabilisierten Diodenlasers, Diplomarbeit, Universität Konstanz, 1994.
- [164] J. P. Bouyer. Spectral stabilisation of an InGaAsP semiconductor laser by injection-locking. *Ann. Phys. Fr.*, 18:89, 1993.
- [165] W. Demtröder. *Laserspektroskopie*. Springer, Berlin, 1991.
- [166] G. C. Bjorklund, M. D. Levenson, W. Lenth, und C. Ortiz. Frequency Modulation (FM) Spectroscopy. Theory of Lineshapes and Signal-to-Noise Analysis. *Appl. Phys. B*, 32:145, 1983.
- [167] S. Kunze. Langsame Atome in stehenden Lichtwellen, Dissertation, Universität Konstanz, 1996.
- [168] M. E. Gehm, K. M. O'Hara, T. A. Savard, und J. E. Thomas. Dynamics of noise-induced heating in atom traps. *Phys. Rev. A*, 58:3914, 1998.
- [169] S. Wößner. Eine Atomquelle höchsten Flusses für die Bose-Einstein-Kondensation, Diplomarbeit, Universität Konstanz, 2000. (Als Folge zweier Eichfehler wurden die in dieser Referenz präsentierten Ergebnisse zum Teil durch Skalierung korrigiert.).
- [170] C. D. Wallace, T. P. Dinneen, K.-Y. N. Tan, T. T. Grove, und P. L. Gould. Isotopic Difference in Trap Loss Collisions of Laser Cooled Rubidium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 69:897, 1992.
- [171] P. Feng, D. Hoffmann, und T. Walker. Comparison of trap-loss collision spectra for ^{85}Rb and ^{87}Rb . *Phys. Rev. A*, 47:R3495, 1993.
- [172] D. Hoffmann, P. Feng, und T. Walker. Measurements of Rb trap-loss collision spectra. *J. Opt. Soc. Am. B*, 11:712, 1994.
- [173] P. D. Lett, K. Molmer, S. D. Gensemer, K.-Y. N. Tan, A. Kumarakrishnan, C. D. Wallace, und P. L. Gould. Hyperfine structure modifications of collisional losses from light-force atom traps. *J. Phys. B*, 28:65, 1995.
- [174] J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman, und E. A. Cornell. Bose-Einstein Condensation in a Dilute Gas: Measurement of Energy and Ground-State Occupation. *Phys. Rev. Lett.*, 77:4984, 1996.
- [175] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, und W. Ketterle. Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2027, 1998.
- [176] C. J. Myatt. Bose-Einstein Condensation Experiments in a Dilute Vapor of Rubidium, Dissertation, University of Colorado, Boulder, 1997.
- [177] V. A. Yurovsky, A. Ben-Reuven, P. S. Julienne, und C. J. Williams. Atom loss from Bose-Einstein condensates due to Feshbach resonance. *Phys. Rev. A*, 60:R765, 1999.

- [178] J. Stenger, S. Inouye, M. R. Andrews, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, und W. Ketterle. Strongly Enhanced Inelastic Collisions in a Bose-Einstein Condensate near Feshbach Resonances. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2422, 1999.
- [179] R. Wynar, R. S. Freeland, D. J. Han, C. Ryu, und D. J. Heinzen. Molecules in a Bose-Einstein Condensate. *Science*, 287:1016, 2000.
- [180] D. Guéry-Odelin und G. V. Shlyapnikov. Excitation-assisted inelastic processes in trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 61:013605, 2000.
- [181] J. L. Roberts, N. R. Claussen, S. L. Cornish, und C. E. Wieman. Magnetic Field Dependence of Ultracold Inelastic Collisions near a Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 85:728, 2000.
- [182] N. R. Claussen, E. A. Donley, S. T. Thompson, und C. E. Wieman. Microscopic Dynamics in a Strongly Interacting Bose-Einstein Condensate. *arXiv-eprint*, (www.arXiv.org):cond-mat/0201400 v2, 2002.
- [183] A. Goerlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, und W. Ketterle. Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 87:130402, 2001.
- [184] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch, und T. Esslinger. Exploring Phase Coherence in a 2D Lattice of Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 87:160405, 2001.
- [185] S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, und M. Lewenstein. Observation of Phase Fluctuations in Elongated Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 87:160406, 2001.
- [186] H. C. W. Beijerinck, P. M. A. van der Kam, W. J. G. Thijssen, und N. F. Verster. Semiclassical description of the small angle differential cross section for elastic atom-atom scattering. *Chem. Phys.*, 45:225, 1980.
- [187] D. R. Lide. *Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press, 72. Auflage, 1991.
- [188] M. D. Lechner, Herausgeber. *Taschenbuch für Chemiker und Physiker, Band 1, Physikalisch-Chemische Daten*. Springer, Berlin, 4. Auflage, 1992.
- [189] A. A. Radzig und B. M. Smirnov. *Reference Data on Atoms, Molecules, and Ions*. Springer, Berlin, 1985.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Mittlere Besetzung von Zuständen in klassischen und Quantengasen.	14
2.2	Dichteverteilungen des Bose-Gases im harmonischen Potential.	18
3.1	Zur elastischen Streuung identischer Atome.	24
3.2	Totaler Wirkungsquerschnitt für elastische Stöße.	25
3.3	Differentieller Wirkungsquerschnitt für niederenergetische Stöße.	26
3.4	Veranschaulichung der Streulänge.	27
3.5	Molekülpotentiale und die für Spinrelaxation verantwortliche Kopplung. . .	32
3.6	Aufhebung der Entartung im Magnetfeld.	33
4.1	Auswirkung der Wechselwirkung auf die Dichteverteilungen.	52
5.1	Im Experiment vollzogene Odyssee durch den Phasenraum.	59
5.2	Funktionsprinzip der MOT.	62
5.3	Zustandekommen von Verlusten durch lichtunterstützte Stöße.	69
5.4	Prinzipieller Aufbau der beiden Doppel-MOT-Systeme.	74
5.5	Spinpolarisation durch optisches Pumpen.	81
5.6	Zustandekommen des Ioffe-Potentials.	85
5.7	Messung der Oszillationsfrequenzen.	90
5.8	Radiale Oszillationsfrequenz in Abhängigkeit des Offset-Feldes.	91
5.9	Prinzip der Verdampfungskühlung.	92

5.10	Prinzip der Rf-induzierten Verdampfung.	97
5.11	Erforderliche Orthogonalkomponente der Rf-Amplitude.	99
5.12	Auswirkungen unzureichender bzw. zu hoher Rf-Amplitude.	100
5.13	Optimierter Verlauf der Radiofrequenz.	101
6.1	Fluoreszenzbild der Atomwolke.	104
6.2	Temperaturbestimmung aus der Expansion der Atomwolke.	106
6.3	Teilchenzahlmessung durch optisches Pumpen.	107
6.4	Schematischer Aufbau des Detektionssystems.	109
6.5	Effekt optischen Pumpens auf das Absorptionssignal der Atomwolke.	112
6.6	Schnitte durch Phasenkontrastbilder der kondensierten Atomwolke.	116
6.7	Phasenkontrastaufnahmen während der Verdampfungskühlung.	117
7.1	Das Vakuumsystem der neuen Apparatur.	120
7.2	Fotografie der Apparatur.	122
7.3	Schematischer Aufbau des Lasersystems.	124
7.4	Signale der Doppler-freien FM-Spektroskopie der D_2 -Linie von ^{87}Rb	126
7.5	Fotografie des Lasersystems.	127
7.6	Schematische Darstellung der Ioffe-Pritchard-Falle.	128
7.7	Beschaltung der Magnetfalle.	129
7.8	Reproduzierbarkeit der Temperatur von Atomwolken.	130
7.9	Bestimmung der technischen Heizrate.	132
8.1	Abhängigkeit der Ratenkonstanten einer MOT von der Intensität.	138
8.2	Experimentelle Optimierung von Intensität und Verstimmung.	140
8.3	Vergleich der optimalen Werte mit den Vorhersagen.	141
8.4	Ratenkonstanten und Teilchenzahl im Vergleich mit der Theorie.	142

8.5 Laderate und Teilchenzahl als Funktion des Strahldurchmessers. 143

8.6 Blick auf eine Wolke von $2,5 \times 10^{10}$ Rubidiumatomen. 144

8.7 Ergebnisse des Polarisationsgradientenkühlen. 145

8.8 Zeitlicher Ablauf der Beschleunigungssequenz. 146

8.9 Ladekurve der UHV-MOT. 147

9.1 Absorptionsbilder der Wolke am Phasenübergang. 149

9.2 Besetzung des Grundzustandes als Funktion der Temperatur. 150

9.3 Zerfall der Wolke vor und nach der Verdampfung. 151

9.4 Auswirkung der Rf-Abschirmung auf den Zerfall. 154

9.5 Temperaturentwicklung unterschiedlich abgeschirmter Atomwolken. 156

10.1 Berechnung der mittleren Säulendichte. 162

10.2 Wirkungsquerschnitt für Stöße von Zerfallsprodukten mit kalten Atomen. . 164

10.3 Ausbreitung einer Stoßlawine in einem homogenen Kondensat. 167

10.4 Zur Entstehung von Stoßlawinen. 169

10.5 Prognostizierte Verluste durch Stoßlawinen. 174

10.6 Verlauf der Opazität mit der Teilchenzahl. 176

10.7 Zerfall des Kondensats im Vergleich mit den Vorhersagen. 177

10.8 Zerfall der nichtkondensierten Wolke im Vergleich mit den Vorhersagen. . . 180

10.9 Adiabatische Potentiale und Dichteverteilungen der Oortschen Wolken. . . . 181

B.1 Abweichungen polynomialer Näherungen von Bose-Einstein-Funktionen. . . 191

C.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt für Klein-Winkel-Streuung. 195

E.1 Hyperfeinstruktur der D₂-Linie von ⁸⁷Rb. 201

E.2 Clebsch-Gordan-Koeffizienten der D₂-Linie von ⁸⁷Rb. 202

Tabellenverzeichnis

3.1 Ratenkonstanten für dipolare Relaxation. 39

5.1 Ratenkonstanten für Verluste durch Stöße mit verschiedenen Hintergrundgasen. 67

5.2 Parameter der Doppel-MOT-Systeme im Vergleich. 76

5.3 Werte relevanter Größen zu Beginn und gegen Ende der Verdampfung. . . . 102

8.1 Relative magnetische Momente des $5s^2S_{1/2}F_g = 2 \rightarrow 5p^2P_{3/2}F_e = 3$ -Übergangs von ⁸⁷Rb. 136

10.1 Stoßwahrscheinlichkeiten der Zerfallsprodukte zu Beginn der Speicherzeit. . 165

10.2 In die Modellierung von Lawinen eingehende Parameter. 171

Danksagung

Ohne Unterstützung und Mitarbeit von unterschiedlichster Seite hätte die vorliegende Arbeit nicht gelingen können. Zu guter Letzt gilt es daher, all jenen Dank auszusprechen, die meinen Weg in den letzten Jahren mitbestimmt und begleitet haben.

An erster Stelle ist hier mein Doktorvater Prof. Gerhard Rempé zu nennen, der mir die Möglichkeit gab, auf einem aufregenden Forschungsgebiet zu arbeiten, mir vor allem aber großes Vertrauen entgegenbrachte und mich stets großzügig unterstützt hat. Ihm ist es zuzuschreiben, daß ich der Arbeitsgruppe seit meinen ersten wissenschaftlichen Gehversuchen als Hiwi, über die Diplomarbeit und die Konstanzer Stadtgrenzen hinaus treu geblieben bin und dies nie bereut habe. Mit der Promotion endet für mich eine langjährige Zusammenarbeit in kreativer und freundschaftlicher Atmosphäre.

Für die fruchtbare und angenehme Zusammenarbeit an der Thematik von Stoßlawinen danke ich Prof. Herman Beijerinck von der Technischen Universität Eindhoven.

Auf meinen nur teilweise geplanten Reisen zu den Höhen insbesondere aber durch die Niederungen des experimentellen Alltags habe ich Freunde gewonnen: Im Kontext von Laborüberschwemmungen, unerklärlichen Effekten, Umzügen, platzenden Vakuumscheiben und Kurzschlüssen aller Art, in dem sich die Bose- immer wieder auch als Böse-Einstein-Kondensation offenbarte, trennte sich die Spreu vom Weizen. In diesem Zusammenhang sind in erster Linie Andreas Marte, mein langjähriger Mitstreiter, und Urban Ernst, mein „Mentor“, zu nennen. Dank gebührt ihnen nicht allein für die Zusammenarbeit in gelockert-heiterer Atmosphäre und für die vielen leidenschaftlichen Diskussionen über Gott und die Welt, sondern auch für das geduldige Ertragen meiner Eigenarten (das, wo hierr gemeint ist, wird sich den Adressaten erschließen tun).

Undenkbar wären Aufbau und Durchführung der Experimente ohne die gewichtigen Beiträge der Diplomanden gewesen, die sich allesamt mit ihrer Entscheidung, der AG Rempé beizutreten, auf weit mehr als „nur“ eine Diplomarbeit eingelassen haben. Mein aufrichtiger Dank gilt in der Reihenfolge ihres Auftretens:

- Florian Schreck, dessen destillierte Quellcodes ich heute noch nicht verstehe, jedoch sehr bewundere, und mit dem ich das aufregende Erlebnis geteilt habe, unser erstes Kondensat, ein zartes Pflänzchen, auf einem „kruscheligen“ Bild zu identifizieren.
- Sebastian Amtage, dem „Ramp-Shaper“ und Schöpfer des Laserracks „Odysseus“, der im übrigen die undankbare Aufgabe hatte, sich mit dem Ableben von Kondensaten befassen zu müssen, dabei jedoch nie seinen Humor verlor. Ganz besonderer Dank gilt ihm für seine Bereitschaft, den Umzug der Arbeitsgruppe mitzumachen.
- Stefan Wößner, der ebenfalls die Mühen des Umzugs auf sich nahm und sich große Verdienste beim Aufbau der neuen Apparatur, insbesondere der „Monstermot“ er-

worben hat. Unvergessen bleibt sein Kampf mit dem Vakuum, den er natürlich als Sieger verließ.

- Bernhard Sang, dem ewig treuen AG Rempe-Sympathisanten, der sich zum Starkstrom- und Magnetfallenspezialisten entwickelte, auf alternativen Gebieten jedoch das gleich Maß an Perfektion erreicht hat (oder hätte). Vielleicht schaffen wir es eines Tages doch noch, ihn zur Rückkehr zu bewegen...

Mein Dank gilt außerdem den Hiwis und Praktikanten, die sich in unsere Katakomben verirrt haben und, mit Lötkolben ausgerüstet, einen beachtlichen Beitrag zur elektronischen Infrastruktur der Experimente geleistet haben.

Für die bewußte Pflege des ausgesprochen angenehmen Gruppenklimas sind neben den bisher genannten Akteuren die „Pistoleros“ von der Mutter aller Apparaturen und deren Ableger, die „Alchimisten“ und die „Kavitäten“ zu loben, deren Arbeit eines Tages dazu führen wird, daß das Internet schneller wird. Bei ihnen allen möchte ich mich zudem für den Technologie- und Materialtransfer bedanken. Thomas Fischer gebührt ein Extra-Dankeschön für die beachtliche Leistung, unserem Ti:Sa-Lasersystem die spektralen Eigenschaften einer Glühbirne abgewöhnt zu haben.

Sowohl in Konstanz als auch in München haben die Experimente von der ausgezeichneten Arbeit des „technical staff“ profitiert. Stellvertretend für das Konstanzer Umfeld sei insbesondere Herrn Schulter und Herrn Jauch von den wissenschaftlichen Werkstätten gedankt. Gleiches gilt für Stefan Hahn und Stefan Eggert, die technischen Allrounder vom LS Mlynek. Am MPQ kam unschätzbare Hilfe von den Profis Josef Bayerl, Franz Denk, Helmut Stehbeck und Herrn Sachsenmaier, deren technische Lösungen wir alle bewundern. Ihnen ist zudem für ihre Bereitschaft zu danken, sich einer neuen Arbeitsgruppe anzuschließen, deren Integration in den Organismus „MPQ“ sie mit ihrem bayerischen Charme maßgeblich vorangetrieben haben.

Für ihr Wirken auf dem komplexen Gebiete der Verwaltung und Organisation sowie für das Einbringen nichtphysikalischer Denk- und Arbeitsweisen sei den Damen Ute Hentzen, Waltraut Heinzen, Carina Hahn und Odette Gori herzlich gedankt.

Meinen Eltern, Gudrun und Hannes Schuster, werde ich für unser „Zuhause“, ihr Vertrauen und ihre bedingungslose Unterstützung finanzieller wie moralischer Art ein Leben lang dankbar sein. Nicht zuletzt danke ich meiner Freundin Birgit Berchtold ganz besonders herzlich für ihre Geduld und ihre Aufopferung, mit der sie meinen – für Außenstehende häufig schwer nachvollziehbaren – Berufsweg in den letzten Jahren begleitet hat. Sie war mir zudem bei der Erstellung dieser Arbeit in L^AT_EXnischen Fragen eine unschätzbare Hilfe.



