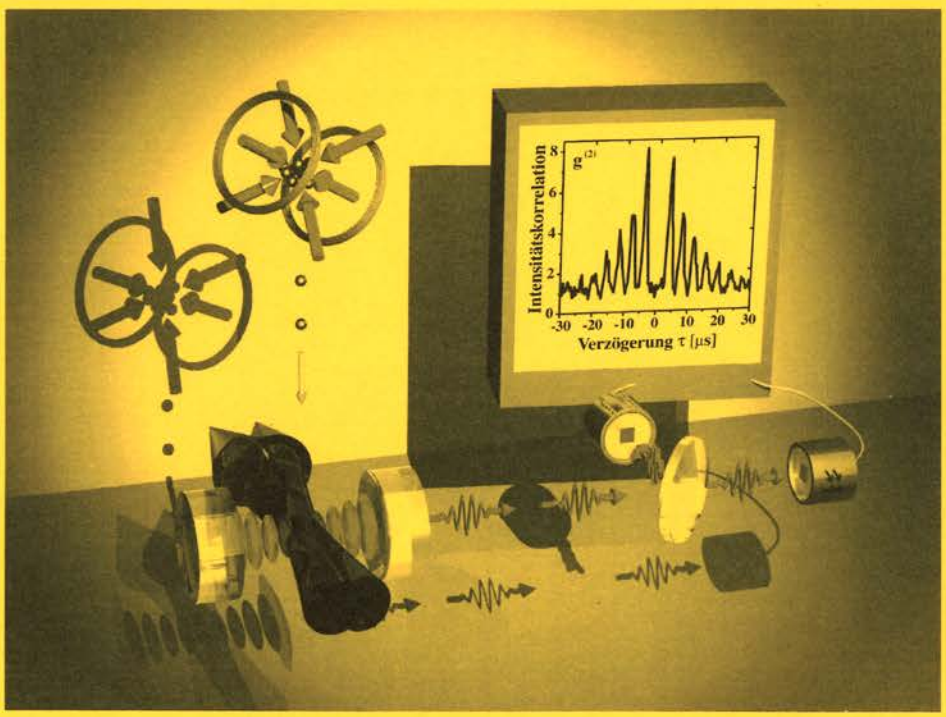
MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR QUANTENOPTIK

# Kontrollierte Erzeugung einzelner Photonen in einem optischen Resonator hoher Finesse




Markus Hennrich

**MPQ-Report 292**

MPQ 292

Januar 2004

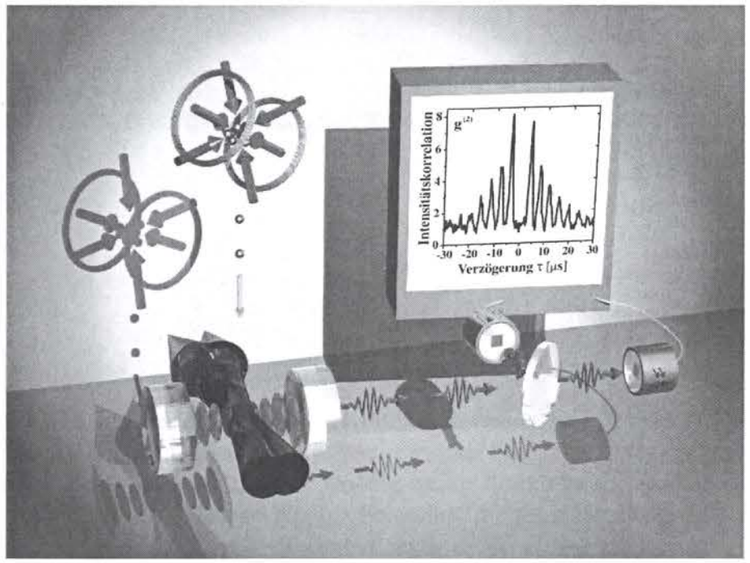
Dieser MPQ-Bericht ist als Manuskript des Autors gedruckt
Alle Rechte vorbehalten

This MPQ-Report has been printed as author's manuscript
All rights reserved

Max-Planck-Institut für Quantenoptik
85740 Garching, Bundesrepublik Deutschland

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR QUANTENOPTIK

# Kontrollierte Erzeugung einzelner Photonen in einem optischen Resonator hoher Finesse




Markus Hennrich

MPQ 292 Januar 2004

## Kurzfassung

Zur kontrollierten Erzeugung einzelner Photonen in einem optischen Resonator hoher Finesse werden einzelne Drei-Niveau Atome eingesetzt. Ein von außen eingestrahlter Laserpuls pumpt einen Zweig eines Ramanübergangs im Atom, während das Vakuumfeld des umgebenden Resonators eine Emission entlang des anderen Zweigs stimuliert. Dabei strahlt das Atom ein einzelnes Photon in den Resonator ab. Dieses wird durch den Auskoppelspiegel des Resonators gerichtet in den freien Raum emittiert. Über einen Hanbury-Brown & Twiss-Aufbau lässt sich die nicht-klassische Photonenstatistik der einzelnen Photonen nachweisen. Zudem wird ein Ramanlaser-ähnliches System untersucht, in dem eine kleine Zahl von Atomen zunächst unabhängig voneinander in den Resonator abstrahlt. Mit steigender Atomzahl zeigen sich erste Anzeichen kollektiver Effekte, da die Atome über die Kopplung an eine gemeinsame Mode des Resonators zunehmend in Wechselwirkung treten.



**Schlagwörter:**
nichtklassisches Licht, Einzelphotonenquelle, Resonator-Quantenelektrodynamik, STIRAP



## Abstract

For the controlled generation of single photons in a high-finesse optical cavity individual three-level atoms are used. An external laser pulse pumps one branch of a Raman transition in the atom, while the vacuum field of the surrounding cavity stimulates the emission on the other branch. Thereby the atom radiates a single photon into the resonator. This photon is emitted through the output coupler of the cavity into a single mode of free space. Using a Hanbury-Brown & Twiss setup the non-classical photon statistics of the individual photons can be proven. Furthermore a system similar to a Raman laser is examined, in which a small number of atoms radiates independently into the resonator. With rising atomic number first signs of collective effects arise, since the atoms interact increasingly via their coupling to the common cavity mode.



**Keywords:**
non-classical light, single-photon source, cavity quantum electrodynamics, STIRAP

# Inhaltsverzeichnis


**1 Einleitung** 1

**2 Theoretische Grundlagen** 4
- 2.1 Gekoppelte Atom-Resonator-Systeme . . . 4
  - 2.1.1 Optische Resonatoren hoher Finesse . . . 4
  - 2.1.2 Das Jaynes-Cummings-Modell . . . 6
  - 2.1.3 Drei-Niveau Atom im Resonator . . . 8
  - 2.1.4 Adiabatische Passage . . . 9
- 2.2 Einzelphotonen aus Atom-Resonator-Systemen . . . 11
  - 2.2.1 Purcell-Effekt im Zwei-Niveau Atom . . . 11
  - 2.2.2 Purcell-Effekt im Drei-Niveau Atom . . . 16
  - 2.2.3 Adiabatische Passage im Drei-Niveau Atom . . . 18
  - 2.2.4 Nicht-adiabatische Abweichungen . . . 21
  - 2.2.5 Effizienz der Photonenerzeugung . . . 24
  - 2.2.6 Simulation der adiabatischen Passage . . . 24
- 2.3 Photonenstatistik und kollektive Effekte . . . 31
  - 2.3.1 Charakterisierung einer Einzelphotonenquelle . . . 31
  - 2.3.2 Stationäre Lichtquellen . . . 32
  - 2.3.3 Unabhängig emittierende Atome . . . 33
  - 2.3.4 Ratenmodell eines N-Atom-Resonator-Systems . . . 38
  - 2.3.5 Effektives Zwei-Niveau-System . . . 45
  - 2.3.6 Dynamik eines einzelnen Atoms im Resonator . . . 48

**3 Experimenteller Aufbau** 51
- 3.1 Prinzip des Experiments . . . 51
- 3.2 Lambda-System in Rubidium 85 . . . 54
- 3.3 Der asymmetrische optische Resonator hoher Finesse . . . 56
- 3.4 Hanbury-Brown & Twiss Aufbau . . . 58
- 3.5 Charakteristika der Atomquelle . . . 59
- 3.6 Fluoreszenzdetektor zum Nachweis der Atome . . . 60
- 3.7 Das Lasersystem . . . 62







**4 Experimentelle Ergebnisse** 65
- 4.1 Vakuum-stimulierte Ramanstreuung . . . 66
  - 4.1.1 Anregungsspektren . . . 66
  - 4.1.2 Adiabatisches Folgen . . . 68
- 4.2 Die gepulste Einzelphotonenquelle . . . 71
  - 4.2.1 Gepulste Photonenstatistik . . . 74
  - 4.2.2 Konditionierte Erzeugung einzelner Photonen . . . 78
- 4.3 Kontinuierliche Photonenerzeugung . . . 80
  - 4.3.1 Anregungsspektren mit Rückpumplaser . . . 80
  - 4.3.2 Übergang von nicht-klassischem zu klassischem Licht . . . 83
  - 4.3.3 Kooperative Emission in den Resonator . . . 87
- 4.4 Bunching gepulst emittierter Photonen . . . 89

**5 Zusammenfassung und Ausblick** 93

**A Mittlere Kopplungsstärke an den optischen Resonator** 96

**B Nicht-hermitesche spektrale Zerlegung der Dichtematrix** 99

**Literaturverzeichnis** 101

# Kapitel 1

# Einleitung

Die Ideen von Feynman und Deutsch, mit quantenmechanischen Systemen leistungsfähigere Computer und Netzwerke verwirklichen zu können [1, 2, 3], begründeten das Forschungsgebiet der Quanteninformationsverarbeitung. Zur Realisierung solcher Quantencomputer werden einzelne Quantensysteme benötigt, in denen die Quanteninformation (z.B. als Qubit analog dem klassischen Bit), sehr lange gespeichert werden kann, sowie ein Satz universeller Quantengatter, die auf einzelne Qubits wirken oder verschiedene Qubits verknüpfen [4]. Als Träger der Quanteninformation können unter anderem einzelne Photonen verwendet werden, wobei die Quanteninformation in einem Superpositionszustand der Photonenzahl einer einzelnen Mode, der Polarisation oder dem Weg der Photonen gespeichert werden kann. Ein großer Vorteil von Photonen ist, dass sie die Quanteninformation über weite Entfernungen transportieren können. Als Nachteil wurde hingegen lange Zeit angesehen, dass zur Realisierung eines Quantengatters zwischen Photonen-Qubits ein starkes nicht-lineares Medium nötig sei. Knill, Laflamme und Milburn [5] (KLM) entdeckten jedoch, dass durch einen Messprozess an zusätzlichen Hilfsphotonen eine konditionierte Version eines Gatters realisiert werden kann. Für einen rein optischen Quantencomputer nach dem KLM-Prinzip werden so neben Strahlteilern und effizienten Mehrphotonendetektoren vor allem Einzelphotonenquellen benötigt, die zuverlässig ununterscheidbare Photonen zu einem vorgegebenen Zeitpunkt erzeugen. Innerhalb der letzten Monate wurden bereits einzelne photonische Quantengatter demonstriert [6, 7]. Bisher sind diese durch die Güte und Effizienz der Einzelphotonenquellen limitiert und daher nicht skalierbar.

Außerdem bilden einzelne Photonen ein ideales Medium, um Quanteninformation zwischen entfernten Punkten eines Netzwerks von stationären Quantencomputern zu übertragen. Zur Realisierung dieser Quantenkommunikation werden Schnittstellen zwischen stationären und fliegenden Qubits benötigt [4]. Einzelphotonenquellen bilden eine derartige Schnittstelle zwischen emittierendem Quantenobjekt und Photon. In Zukunft sollte es möglich sein, den Zustand des Systems auf ein Photon zu übertragen. Ist der Emissionsprozess unitär, so kann dieselbe Anordnung durch Umkehrung des zeitlichen Ablaufs auch als Empfänger verwendet werden. Cirac et al. schlagen einen adiabatischen Ramanprozess, der durch das Vakuumfeld eines optisches Resonators stimuliert wird, zur Übertragung von Quanteninformation zwischen zwei entfernten Atomen vor [8]. Derselbe Mechanismus konnte in der vorliegenden Arbeit zur Erzeugung einzelner Photonen verwendet werden. Dies ist ein erster Schritt hin zur Realisierung derartiger Atom-Photon-Schnittstellen in einem Quantennetzwerk.

Durch diese Anwendungen und Visionen stimuliert arbeiten derzeit viele Arbeitsgruppen an der Realisierung deterministischer Einzelphotonenquellen. Bis vor wenigen Jahren waren nur konditionierte Einzelphotonenquellen verfügbar. Bei Prozessen, die Photonenpaare erzeugen, wie z.B. die „parametric downconversion" in nichtlinearen optischen Kristallen [9, 10, 11], werden wegen der Impulserhaltung zwei Photonen in verschiedenen Moden erzeugt. Wird ein Photon in der einen Mode detektiert, so befindet sich in der anderen Mode sicher das zweite Photon. Da ein solches Photonenpaar spontan entsteht, ist der Zeitpunkt der Photonenerzeugung nicht vorherbestimmt. Viele gleichzeitige Photonen, wie sie für einen photonischen Quantencomputer nach dem KLM-Prinzip benötigt werden, lassen sich daher mit konditionierten Photonenquellen nicht erzeugen, sondern erfordern deterministische Quellen.

Alle deterministischen Einzelphotonenquellen verbindet die gepulste Anregung eines einzelnes Quantensystems, das daraufhin seine Anregungsenergie als einzelnes Photon abstrahlt. Da die verschiedenen Applikationen unterschiedliche Anforderungen an die Einzelphotonenquellen stellen, wird an einer Vielzahl verschiedener Systeme geforscht. Diese unterscheiden sich in der Natur des Quantensystems und des Anregungsmechanismus. Als Quantensysteme werden Quanten-Tröge [12], Quantenpunkte [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19], Farbzentren [20, 21, 22, 23], Moleküle [24, 25, 26, 27] und – entsprechend der vorliegenden Arbeit – auch Atome [28, 29, 30, 31, 32] verwendet.

Um diese Systeme für Quantencomputer und -netzwerke verwenden zu können, müssen hohe Anforderungen erfüllt werden. Man benötigt gerichtete, ununterscheidbare Einzelphotonen hoher Effizienz. Bisher wurden 3 Möglichkeiten vorgeschlagen, solche Photonen zu erzeugen:

1. Die *erhöhte spontane Emission innerhalb eines Resonators,* bei der das Quantensystem vornehmlich in die einzelne Mode des Resonators emittiert [33],

2. die *kohärente Kontrolle eines durch das Vakuumfeld eines Resonators stimulierten Ramanprozesses mittels einer adiabatische Passage* [34, 35, 36, 37],

3. sowie die *Unterdrückung der spontanen Emission in andere Richtungen* durch photonische Kristalle, die gerade bei der Frequenz des emittierten Lichtes eine Bandlücke aufweisen, so dass sich das Licht in diese Richtung nicht ausbreiten kann [38, 39, 40].

Zwei der Vorschläge wurden bisher verwirklicht. Die erste, die erhöhte spontane Emission, wurde mit einzelnen Quantenpunkten demonstriert [15, 19]. Der zweite Vorschlag, die adiabatischen Passage, konnte im Rahmen dieser Doktorarbeit für einzelne Atome innerhalb eines optischen Resonators realisiert werden [29].

Der größte Vorteil der adiabatischen Passage gegenüber den anderen diskutierten Methoden besteht darin, dass grundsätzlich die Eigenschaften des Photons während der Erzeugung kontrolliert werden können. Einerseits erlaubt es der verwendete Ramanprozess, die Mittenfrequenz des emittierten Photons einzustellen. Andererseits kann über den auslösenden Laserpuls nicht nur der genaue Zeitpunkt der Photonenemission, sondern sogar die Geschwindigkeit der adiabatischen Passage und damit die raumzeitliche Form des Photonenwellenpakets bestimmt werden. Dadurch lässt sich sicherstellen, dass verschiedene Emitter identische Photonen emittieren.

Ziel dieser Arbeit war, die Wirkungsweise der adiabatischen Einzelphotonenerzeugung zu demonstrieren. Um das Experiment möglichst einfach zu halten wurde ein schwacher Atomstrahl verwendet, bei dem jedoch die Experimentierdauer auf den Durchflug einzelner Atome



begrenzt ist. Dies ist keine prinzipielle Beschränkung, da in anderen Experimenten bereits einzelne Atome [41, 42, 43, 44] und Ionen [45, 46] in optischen Resonatoren gefangen und über einen längeren Zeitraum festgehalten wurden. Mit solchen Systemen sollte es in Zukunft möglich sein, eine kontinuierliche Sequenz von Einzelphotonenpulsen adiabatisch zu erzeugen.

Das untersuchte System ist jedoch auch in anderer Hinsicht interessant. Strahlt man neben dem Pumplaser, der den Ramanprozess zur adiabatischen Photonenerzeugung treibt, einen weiteren Laser zum Rückpumpen in den Ausgangszustand des Ramanprozesses ein, so ergibt sich ein System, das einem Ramanlaser sehr ähnlich ist. Mit dem Fluss des Atomstrahls lässt sich die Anzahl der beitragenden Atome erhöhen. Dabei beobachtet man mit steigender Atomzahl einen Übergang von einer nicht-klassischen Lichtquelle, bei der die emittierten Photonen Abstand halten, hin zu einer klassischen Lichtquelle, die die Photonen in Bündeln emittiert. Aus dieser Beobachtung ergibt sich, dass die Atome, trotz einer verhältnismäßig starken Kopplung zwischen Atom und Resonator, weitgehend unabhängig voneinander emittieren. Für einen Ramanlaser müssten sie sich jedoch gegenseitig zur Emission stimulierten und so das im Resonator umlaufende Licht verstärken. Gründe für die Unabhängigkeit der Emitter werden im theoretischen Teil der Arbeit diskutiert.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Das erste Kapitel beschreibt die theoretischen Grundlagen des Systems. Zunächst werden einfache gekoppelte Atom-Resonator-Systeme, sowie die adiabatische Passage im drei-Niveau Atom diskutiert, die zum weiteren Verständnis benötigt werden. Danach werden die verschiedenen Möglichkeiten der erhöhten spontanen Emission und der adiabatische Passage untersucht, um mit Atom-Resonator-Systemen gerichtet Einzelphotonen zu erzeugen. Für beide Vorschläge ist eine starke Kopplung zwischen Atom und Resonator erforderlich, um Verluste zu vermeiden. Eine Simulation der Photonenerzeugung für unsere experimentellen Parameter schließt diesen Teil ab. Der dritte Teil des Theoriekapitels beschreibt die Photonenstatistik, sowohl von Einzelphotonenquellen, wie auch des Ramanlaser-ähnlichen Aufbaus. In diesem Zusammenhang wird ein einfaches Ratenmodell eines Lasers diskutiert, in dem die Atomzahl verändert werden kann.

Das zweite Kapitel beschreibt den experimentellen Aufbau, bestehend aus einer magnetooptischen Falle als Quelle kalter $^{85}$Rb (Rubidium-85) Atome, dem asymmetrischen optischem Resonator hoher Finesse, einem Hanbury-Brown & Twiss-Aufbau zur Bestimmung der Photonenstatistik, einem Fluoreszenzdetektor zum Nachweis der Atome und dem Lasersystem.

Das dritte Kapitel zeigt die experimentellen Ergebnisse. Zuerst wird demonstriert, dass das Vakuumfeld des Resonators in der Lage ist, einen adiabatischen Ramantransfer zu stimulieren. Nun wird eine abwechselnde Sequenz von Pumplaser- und Rückpumplaserpulsen eingestrahlt. Der Rückpumplaser befördert die Atome in den Ausgangszustand zurück, so dass sie erneut emittieren können. Damit erzeugen einzelne durch den Resonator fallende Atome adiabatisch eine Sequenz von getriggerten Einzelphotonenpulsen. Bei kontinuierlich eingestrahltem Pump- und Rückpumplaser zeigt sich schließlich, dass viele Atome im Resonator annähernd unabhängig voneinander abstrahlen, und die Photonenstatistik von nicht-klassischem Antibunching (bei geringer Atomzahl) zu Bunching (bei hoher Atomzahl) übergeht.

# Kapitel 2

# Theoretische Grundlagen

## 2.1 Gekoppelte Atom-Resonator-Systeme

Bevor das nächste Kapitel die theoretischen Grundlagen der Erzeugung einzelner Photonen in Atom-Resonator-Systemen diskutiert, werden in diesem Kapitel zunächst die Grundlagen zum Verständnis der dabei verwendeten Mechanismen erarbeitet. Zu Beginn wird im ersten Teilkapitel 2.1.1 das über die klassische Elektrodynamik hervorgerufene Verhalten des optischen Resonators beschrieben, sowie die Quantisierung des elektomagnetischen Feldes in demselben. Die grundlegende Wechselwirkung eines Zwei-Niveau Atoms mit dem quantisierten Feld des Resonators ist Thema des darauf folgenden Teilkapitels 2.1.2. Erweitert wird dies in 2.1.3 zu der im Experiment verwendeten $\Lambda$-förmigen Anordnung von Drei-Niveaus. In diesem System kann über eine adiabatische Passage (STIRAP), siehe 2.1.4, kontrolliert die Besetzung der Grundzustände invertiert werden.

### 2.1.1 Optische Resonatoren hoher Finesse

Die Diskussion ist zunächst auf einen eindimensionalen Fabry-Perot Resonator mit einem Spiegelabstand $l$, Reflektivität $\mathcal{R}$, nahe 1, Transmissivität $\mathcal{T}$, und Verluste $\mathcal{L}$ der Spiegel beschränkt. Licht der Wellenlänge $\lambda$ und Intensität $I_{in}$, welches auf einen der Resonatorspiegel trifft, erzeugt nach Airy eine umlaufende Intensität

$$I_{circ} = \frac{I_{in}\mathcal{T}_{max}}{1 + 4(\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2(kl)}, \tag{2.1}$$

wobei $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl des Lichts, $\mathcal{T}_{max} = \mathcal{T}^2/(1-\mathcal{R})^2$ die maximale Transmissivität und

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}} \tag{2.2}$$

die Finesse des Resonators ist. Die Differenz der Frequenz zwischen zwei benachbarten Maxima der Transmission wird als freier Spektralbereich bezeichnet, mit $\Delta\nu_{FSR} = \pi c/l$. Da der Resonator geringe Verluste aufweisen soll und daher nur eine hohe Reflektivität der Spiegel





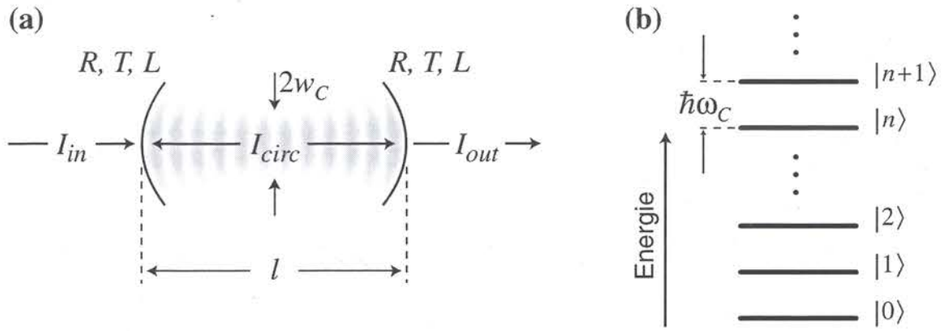



**Abbildung 2.1: (a)** Ein-dimensionaler Fabry-Perot Resonator der Länge $l$ mit einfallender Intensität $I_{in}$, umlaufender Intensität $I_{circ}$ und transmittierter Intensität $I_{out}$. Die Spiegel besitzen die Reflektivität $\mathcal{R}$, Transmissivität $\mathcal{T}$, und Absorptionsverluste $\mathcal{L}$. Die Strahltaille der $\mathrm{TEM}_{00}$-Mode ist $w_C$. **(b)** Energie der Fockzustände (Zustände fester Photonenzahl) einer einzelnen $\mathrm{TEM}_{00}$-Mode der Frequenz $\omega_C$. Wie bei einem harmonischen Oszillator ist der Abstand der Niveaus, $\hbar\omega_C$ äquidistant und der niedrigste Zustand $|0\rangle$ hat eine Nullpunktsenergie von $\hbar\omega_C/2$.

interessiert, kann die Transmissivität des Resonators in der Umgebung einer Resonanz durch eine Lorentzfunktion beschrieben werden

$$\mathcal{T}_{\text{cavity}} \propto \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \Delta_L^2}, \tag{2.3}$$

wobei $\Delta_L = \omega_L - \omega_C$ die Differenz zwischen Laserfrequenz und Resonanzfrequenz des Resonators ist. Die Linienbreite (FWHM) ist $2\kappa = \Delta\nu_{FSR}/\mathcal{F}$. Man beachte, dass die Zerfallsrate des Resonatorfeldes $\kappa$ nur durch die Reflektivität und dem Abstand der Spiegel definiert ist.

Um zu erreichen, dass sich in einem realen Resonator einzelne stabile Moden ausbilden, werden gekrümmte Spiegel verwendet, wie in Abb. 2.1(a) dargestellt. Ist der Krümmungsradius der Spiegel $r$ kleiner als der Abstand der Spiegel, bleiben alle Winkel innerhalb des Resonators klein und das System kann in der paraxialen Näherung behandelt werden. In diesem Fall erhält man Hermite-Gauß'sche oder Laguerre-Gauß'sche Eigenmoden des Resonators. Im Experiment wird nur die Gauß'sche $\mathrm{TEM}_{00}$-Mode verwendet, zur Vereinfachung der weiteren Diskussion sei daher im folgenden nur diese einzelne Mode behandelt. Der kleinste Radius (1/e Abfall der Feldstärke) dieser Mode wird Strahltaille $w_C$ genannt. Sie wird bestimmt durch

$$w_C^2 = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{l(2r-l)}. \tag{2.4}$$

Ist die Resonatorlänge l kürzer als die Rayleighlänge $z_R = \pi w_C^2/\lambda$, so kann die Variation des Modendurchmessers entlang der Resonatorachse vernachlässigt werden und die räumliche Intensitätsverteilung der $\mathrm{TEM}_{00}$-Mode ist gegeben durch

$$I_{sw}(\mathbf{r}) = 4I_{circ}|\psi(\mathbf{r})|^2 \qquad \text{mit} \qquad \psi(\mathbf{r}) = \cos(kz)e^{-(x^2+y^2)/w_C^2}, \tag{2.5}$$

wobei die Modenfunktion $\psi(\mathbf{r})$ die Stehwelle im Resonator wiederspiegelt. Das Modenvolumen wird definiert durch

$$V \equiv \int |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \frac{\pi}{4} w_C^2 l. \tag{2.6}$$

Das elektromagnetische Feld in der Resonatormode ist quantisiert. Dadurch ist sein Zustandsvektor im allgemeinen eine Superposition von Zuständen fester Photonenzahl, den sogenannten Fockzuständen $|n\rangle$. Jedes Photon der Mode trägt eine Energie $\hbar\omega_C$. Für n Photonen innerhalb der Resonatormode beträgt die Gesamtenergie $\hbar\omega_C(n + \frac{1}{2})$, mit der Nullpunktsenergie des Systems $\frac{1}{2}\hbar\omega_C$. Der äquidistante Abstand der Energieniveaus erlaubt es den Resonator analog einem harmonischen Oszillator zu behandeln. Folglich lässt sich den Hamiltonoperator des Resonators mit Hilfe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für die Photonen, $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$, schreiben als

$$\hat{H}_C = \hbar\omega_C \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{2.7}$$

Man beachte, dass dieser Hamiltonoperator keine Verluste enthält. In einem realen Resonator zerfallen alle Photonenzustände, bis ein thermisches Gleichgewicht mit der Umgebung erreicht ist. Im optischen Regime entspricht dies dem Vakuumzustand, $|0\rangle$, ohne Photonen im Resonator.

### 2.1.2 Das Jaynes-Cummings-Modell

Als Einführung behandelt das folgende Kapitel die grundlegenden Wechselwirkung eines quantisierten Lichtfeldes mit einem Zwei-Niveau Atom, das sogenannte Jaynes-Cummings-Modell [47, 48]. Das Energieniveauschema des Atoms setzt sich zusammen aus Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$ mit deren jeweiligen Energien $\hbar\omega_g$ und $\hbar\omega_e$ und Übergangs-Dipol-Matrixelement $\mu_{eg}$. Der Hamiltonoperator des Atoms lautet

$$\hat{H}_A = \hbar\omega_g \hat{\sigma}_{gg} + \hbar\omega_e \hat{\sigma}_{ee}, \qquad \text{mit} \qquad \hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|. \tag{2.8}$$

Die Wechselwirkung mit der Mode des elektomagnetischen Feldes des Resonators wird durch die Atom-Resonator-Kopplungskonstante

$$g(\mathbf{r}) = g\,\psi(\mathbf{r}), \qquad \text{mit} \qquad g = \sqrt{\frac{\mu_{eg}^2 \omega_C}{2\hbar\epsilon_0 V}} \tag{2.9}$$

beschrieben. Um eine möglichst starke Wechselwirkung zu erreichen, ist daher ein kleines Modenvolumen $V$ des Resonators vonnöten. In einem abgeschlossenen System ist aufgrund von Energieerhaltung eine Anregung des Atoms immer begleitet von einer Absorption eines Photons aus der Resonatormode, bzw. eine Abregung des Atoms von einer Emission eines Photons in die Resonatormode. Diese Wechselwirkung wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{int}^{(2)} = -\hbar g \left[\hat{\sigma}_{eg}\hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{ge}\right] \tag{2.10}$$

beschrieben, der zur Absorption und Emission von Photonen die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ enthält. Amplitude und Phase der Wechselwirkung variieren dabei laut Gl. (2.9) je nach Aufenthaltsort $\mathbf{r}$ des Atoms innerhalb des Resonators.



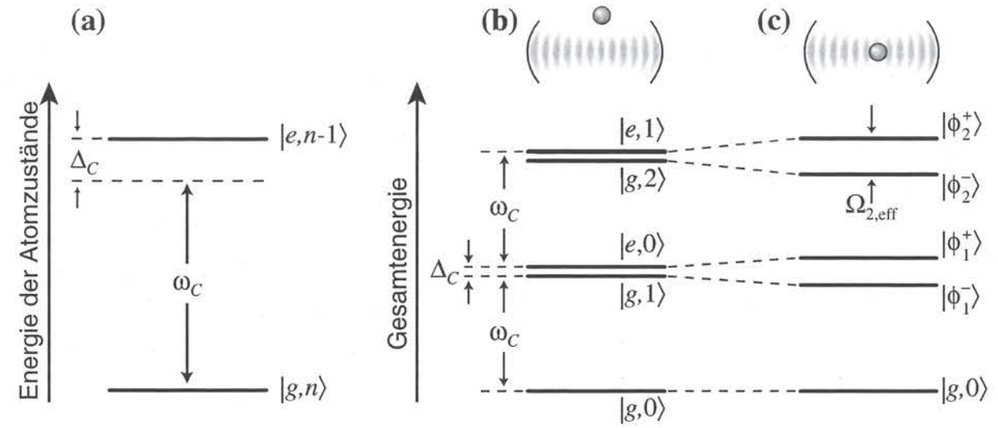



**Abbildung 2.2: (a)** Ein Zwei-Niveau Atom mit Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$ gekoppelt an einen Resonator, der $n$ Photonen enthält. Die Eigenzustände des gekoppelten Systems werden als dressed states bezeichnet. Das Energieniveauschema ist für ein Atom außerhalb **(b)** und innerhalb des Resonators **(c)** dargestellt. Die dressed states sind um $\Delta_C$ bzw. um die effektive Rabifrequenz $\Omega_{\mathrm{n,eff}}$ aufgespalten.

Für eine vorgegebene Anzahl an Anregungsquanten $n$ im System koppelt nur jeweils das Produktzustands-Paar $|g, n\rangle$ und $|e, n-1\rangle$. Ist das quantisierte Lichtfeld in Resonanz mit dem Atomübergang, so ist dieses Zustandspaar ohne Kopplung entartet. Erst die Atom-Resonator-Wechselwirkung spaltet die Produktzustände in Paare nicht entarteter dressed states auf. Ausgenommen davon ist jedoch der Produktzustand, in welchem Atom und Resonator im Grundzustand sind, $|g, 0\rangle$. Dieser koppelt an keinen anderen Zustand, weshalb hier keine Aufspaltung auftritt. Die Eigenfrequenzen des gesamten Hamiltonoperators $\hat{H} = \hat{H}_C + \hat{H}_A + \hat{H}_{int}$ lauten in Drehwellennäherung (rotating wave approximation)

$$\omega_n^\pm = \omega_C \left(n + \frac{1}{2}\right) + \omega_g + \frac{1}{2}\left(\Delta_C \pm \sqrt{4ng^2 + \Delta_C^2}\right), \tag{2.11}$$

wobei $\Delta_C = \omega_e - \omega_g - \omega_C$ die Verstimmung zwischen Atom und Resonator ist. Die Niveauaufspaltung zwischen den zwei korrespondierenden Eigenzuständen $\Omega_{\mathrm{n,eff}} = \sqrt{4ng^2 + \Delta_C^2}$ ist die effektive Rabifrequenz, mit der ein Teil der Besetzung zwischen den Zuständen $|g, n\rangle$ und $|e, n-1\rangle$ oszilliert. Dies bedeutet, dass das Feld des Resonators die Emission vom angeregten Atom in den Resonator stimuliert, und somit das Atom abregt und die Photonenanzahl um eins erhöht. Im Anschluss wird das Atom wieder angeregt, indem es ein Photon aus dem Feld des Resonators absorbiert, usw.. Weil ein angeregtes Atom im leeren Resonator ausreicht, eine Oszillation zwischen $|e, 0\rangle$ and $|g, 1\rangle$ mit der Frequenz $\sqrt{4g^2 + \Delta_C^2}$ zu starten, wird dieses Phänomen Vakuum-Rabioszillation genannt. Bei einer resonanten Wechselwirkung ist die Oszillationsfrequenz $2g$ und wird daher Vakuum-Rabifrequenz genannt.

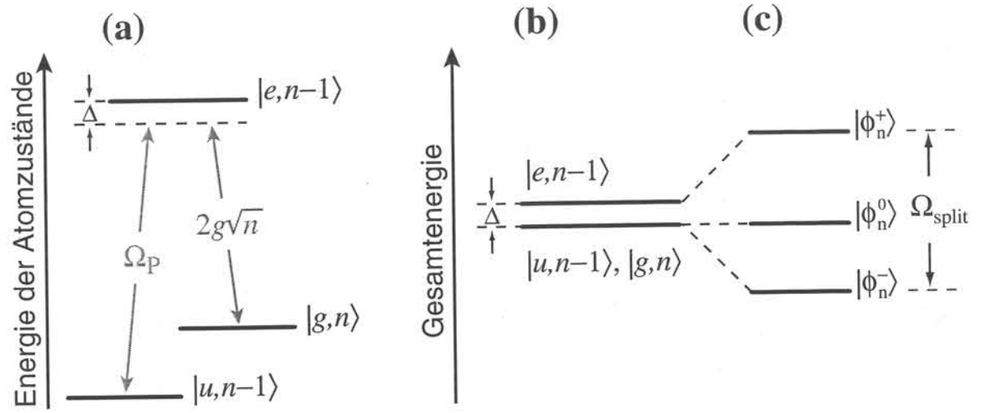



**Abbildung 2.3: (a)** Drei-Niveau Atom, das von einem klassisches Laserfeld der Rabifrequenz $\Omega_P$ getrieben wird und an einen Resonator mit $n$ Photonen koppelt. **(b)** Eigenzustände des kombinierten Atom-Resonator-Systems im Fall verschwindender Kopplungsstärken. **(c)** Aufspalten der Energieniveaus durch die Wechselwirkung mit Laserfeld und Resonator um $\Omega_{\text{split}} = \sqrt{4ng^2 + \Omega_P^2 + \Delta^2}$.

### 2.1.3 Drei-Niveau Atom im Resonator

Das Modell eines Zwei-Niveau Atoms in Wechselwirkung mit einem Resonator wird im diesem Kapitel erweitert. Betrachtet wird jetzt ein Atom mit einer $\Lambda$-förmigen Anordnung von drei Niveaus mit den beiden Übergangsfrequenzen $\omega_{eu} = \omega_e - \omega_u$ und $\omega_{eg} = \omega_e - \omega_g$, wie in Abb. 2.3 dargestellt. Der Übergang von $|u\rangle$ nach $|e\rangle$ wird durch ein klassisches Lichtfeld der Frequenz $\omega_P$ mit der Rabifrequenz $\Omega_P$ getrieben, dem sogenannten Pumpfeld. Des Weiteren koppelt eine quantisierte Lichtmode eines Resonators mit der Frequenz $\omega_C$ an den Übergang von $|g\rangle$ nach $|e\rangle$. Die Verstimmung zu den jeweiligen Übergängen ist im folgenden als $\Delta_P = \omega_{eu} - \omega_P$ bzw. $\Delta_C = \omega_{eg} - \omega_C$ definiert. In einem rotierten Bezugssystem ist das zeitliche Verhalten des Atom-Resonator-Systems durch den Wechselwirkungs-Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{int}^{(3)} = \hbar \left[ -\Delta_P \hat{\sigma}_{uu} - \Delta_C \hat{a}^\dagger \hat{a} - g(\hat{\sigma}_{eg}\hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{ge}) - \frac{1}{2}\Omega_P(\hat{\sigma}_{eu} + \hat{\sigma}_{ue}) \right] \tag{2.12}$$

definiert. Man beachte, dass eine erweiterte Version der Drehwellennäherung verwendet wurde, um diesen Hamiltonoperator zu erhalten. Es wurden nicht nur Beiträge vernachlässigt, welche mit der doppelten optischen Frequenz rotieren, sondern auch alle anderen nicht-resonanten Terme, die relativ zum rotierten Bezugssystem mit Frequenzen in der Größe von $\omega_g - \omega_u$ rotieren. Entsprechend heißt dies, dass der Pumplaser nur den Übergang $|u\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ und der Resonator nur $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ koppelt. Diese Annahme ist gerechtfertigt unter der Voraussetzung, dass

$$\max(\Omega_P, 2g, |\Delta_P|, |\Delta_C|) \ll |\omega_g - \omega_u|. \tag{2.13}$$

Für eine feste Zahl an Anregungsquanten $n$ wirkt dieser Hamiltonoperator nur im Unterraum, der von den drei Basiszuständen $|u, n-1\rangle, |e, n-1\rangle, |g, n\rangle$ aufgespannt wird. In diesem



Unterraum sind die Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems im Fall einer Raman-resonanten Wechselwirkung ($\Delta_P = \Delta_C \equiv \Delta$) gegeben durch

$$\omega_n^0 = -\Delta, \tag{2.14}$$
$$\omega_n^\pm = \frac{1}{2}\left(-\Delta \pm \sqrt{4ng^2 + \Omega_P^2 + \Delta^2}\right).$$

Man beachte, dass die Jaynes-Cummings-Paare des Zwei-Niveau Atoms nun ersetzt werden durch Zustands-Tripletts, mit den Eigenzuständen

$$|\phi_n^0\rangle = \cos\Theta|u, n-1\rangle - \sin\Theta|g, n\rangle, \tag{2.15}$$
$$|\phi_n^+\rangle = \sin\Phi\sin\Theta|u, n-1\rangle - \cos\Phi|e, n-1\rangle + \sin\Phi\cos\Theta|g, n\rangle,$$
$$|\phi_n^-\rangle = \cos\Phi\sin\Theta|u, n-1\rangle + \sin\Phi|e, n-1\rangle + \cos\Phi\cos\Theta|g, n\rangle,$$

wobei die Mischungswinkel $\Theta$ und $\Phi$ unter der Annahme, dass $\Omega_P$ und $g$ real sind, gegeben sind durch

$$\tan\Theta = \frac{\Omega_P}{2g\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad \tan\Phi = \frac{\sqrt{4ng^2 + \Omega_P^2}}{\sqrt{4ng^2 + \Omega_P^2 + \Delta^2} + \Delta}. \tag{2.16}$$

Sobald die Rabifrequenzen ungleich Null werden, spaltet die Wechselwirkung mit den Lichtfeldern die Entartung der drei Eigenzustände auf. Insbesondere muss hervorgehoben werden, dass einer der Zustände, $|\phi_n^0\rangle$, weder einer Energieverschiebung unterliegt, noch dass der angeregte Atomzustand $|e\rangle$ zu diesem beiträgt. In der Literatur wird der Zustand $|\phi_n^0\rangle$ daher als „Dunkelzustand" bezeichnet, da seine Besetzung nicht durch spontane Emission verloren gehen kann. Dieser Dunkelzustand wird in Kapitel 2.2.3 dazu verwendet, einzelne Photonen zu erzeugen. Der zugrunde liegende Mechanismus wird im folgenden Kapitel beschrieben.

### 2.1.4 Adiabatische Passage

Die adiabatische Passage im optischen Bereich wird seit vielen Jahren zu kohärentem Besetzungstransfer in Atomen oder Molekülen verwendet. In Zwei-Niveau Systemen kann sie durch einen Frequenzchirp eines Lichtfeldes über die relevante Resonanzfrequenz [49, 50] das System invertieren. Das Verfahren wurde erfolgreich auf Drei-Niveau Systeme erweitert [51] und wird auch für geschwindigkeitsselektive Anregung und Ramankühlen von Atomen verwendet [52, 53]. Ohne Frequenzchirp, aber mit einem Ramanübergang, der von zwei Laserpulsen mit variabler Amplitude getrieben wird, werden Effekte wie elektromagnetisch induzierte Transparenz (EIT) [54, 55], langsames Licht [56, 57] und stimulierte Ramanstreuung mittels adiabatischer Passage (STIRAP) [58] beobachtet. All diese Effekte wurden mit klassischen Lichtfeldern nachgewiesen.

Gemeinsam ist diesen Verfahren, dass die Zeitentwicklung des Zustandsvektors des Systems

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_\mu c_\mu \exp\left(-i\int_0^t \omega_\mu(t')dt'\right)|\phi^\mu(t)\rangle, \tag{2.17}$$

nur durch das Verhalten der Eigenzustände $|\phi^\mu(t)\rangle$ des Wechselwirkungsoperators und deren zugehörigen Eigenfrequenzen $\omega_\mu(t)$ gegeben ist. Die Eigenzustände, wie auch die Eigenfrequenzen, können sich während der Wechselwirkung ändern, wohingegen die relativen Amplituden $c_\mu$ als unveränderlich angenommen werden. In diesem Zusammenhang ist der oben eingeführte Dunkelzustand von enormer Wichtigkeit für den adiabatischen Besetzungstransfer.

Im Prinzip bleibt jedes Drei-Niveau Quantensystem, welches zu Beginn im Zustand $|\phi_n^0\rangle$ präpariert wurde, für immer in diesem Zustand. Somit kann die relative Besetzung der beitragenden Atomzustände beliebig kontrolliert werden, indem die relative Stärke der Pump- und Stokes-Rabifrequenzen, $\Omega_P$ und $2\sqrt{n}g$, verändert wird. Ein System, welches zu Beginn im Zustand $|\Psi(t_0)\rangle = |u, n-1\rangle$ präpariert wird, stimmt folglich mit dem Dunkelzustand $|\phi_n^0\rangle$ überein, wenn die Bedingung $2\sqrt{n}g \gg \Omega_P$ zu Beginn der Wechselwirkung erfüllt ist

$$|\langle\phi_n^0|\Psi(t_0)\rangle|^2 = \frac{4ng^2}{\Omega_P^2 + 4ng^2} \xrightarrow{2\sqrt{n}g \gg \Omega_P} 1. \tag{2.18}$$

Sobald das System erfolgreich im Dunkelzustand präpariert wurde und wenn der Zustandsvektor $|\Psi(t)\rangle$ dem Dunkelzustand während der Wechselwirkung folgt, ergibt sich das Verhältnis der Besetzung der beitragenden Zustände durch

$$\frac{|\langle u, n-1|\Psi(t)\rangle|^2}{|\langle g, n|\Psi(t)\rangle|^2} = \frac{4ng^2}{\Omega_P^2}. \tag{2.19}$$

Deshalb ist der Endzustand des Systems bestimmt durch die relativen Amplituden der zwei Felder wenn die Wechselwirkung beendet ist. Im Prinzip erlaubt dies, beliebige Zustands-Superpositionen von $|u, n-1\rangle$ und $|g, n\rangle$ zu erzeugen, was sich somit auch auf die Anzahl der Photonen im Resonator auswirkt.

Bis zu diesem Punkt wurde angenommen, dass der Zustandsvektor des Systems $|\Psi(t)\rangle$ nicht nur in der Basis der Eigenzustände ausgedrückt werden kann, sondern auch jeder Veränderung der Eigenzustände in Bezug auf die ungekoppelten Atom- und Resonatorzustände *adiabatisch folgt*. Solch ein Verhalten ist nicht offenkundig und nur erfüllt, wenn sich die Eigenzustände langsam verändern. Die Kriterien für ein „adiabatisches Folgen" werden nun im Detail analysiert, wobei die Diskussion der Beschreibung von Messiah [59, Kap.17] folgt. Der Zustandsvektor wird ausgedrückt als Superposition des Tripletts an Eigenzuständen,

$$|\Psi(t)\rangle = c^0(t)|\tilde{\phi}^0(t)\rangle + c^+(t)|\tilde{\phi}^+(t)\rangle + c^-(t)|\tilde{\phi}^-(t)\rangle, \tag{2.20}$$

wobei die zeitliche Entwicklung der Phasen in die modifizierten Basiszustände $|\tilde{\phi}^0(t)\rangle \equiv \exp(-i\int_{t_0}^t \omega^0(t')dt')|\phi^0(t)\rangle$ und $|\tilde{\phi}^\pm(t)\rangle \equiv \exp(-i\int_{t_0}^t \omega^\pm(t')dt')|\phi^\pm(t)\rangle$ einbezogen wird. Für ein System, welches zu Beginn im Dunkelzustand $|\tilde{\phi}^0\rangle$ präpariert wurde, ist die Wahrscheinlichkeit, es zum Zeitpunkt $t_1$ in einem der anderen Eigenzustände anzutreffen

$$P_\pm(t_1) = |\langle\tilde{\phi}^\pm(t_1)|\Psi(t_1)\rangle|^2 = |c^\pm(t_1)|^2. \tag{2.21}$$

Eine adiabatische Entwicklung der Wechselwirkung erfordert $P_\pm \approx 0$ für alle Zeiten. Unter Verwendung der Schrödingergleichung $\langle\tilde{\phi}^\pm|\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = \langle\tilde{\phi}^\pm| - \frac{i}{\hbar}\hat{H}|\Psi\rangle$ erhält man

$$\langle\tilde{\phi}^\pm| \sum_{j=0,\pm} \left[(\dot{c}^j - i\omega^j c^j)|\tilde{\phi}^j\rangle + c^j \exp\left(-i\int_{t_0}^t \omega^j dt'\right)\frac{d}{dt}|\phi^j\rangle\right] = -i\omega^\pm c^\pm. \tag{2.22}$$

Solange die nicht-adiabatischen Verluste nur eine kleine Störung verursachen, sind die Näherungen $c^0 \approx 1$ und $c^\mp\langle\phi^\pm|\frac{d}{dt}|\phi^\mp\rangle \approx 0$ gerechtfertigt und die Übergangswahrscheinlichkeit in



die nicht-dunklen Eigenzustände ergibt

$$P_\pm(t_1) = \left|\int_{t_0}^{t_1}\left[\exp\left(i\int_{t_0}^{t}(\omega^\pm - \omega^0)dt'\right)\langle\phi^\pm|\frac{d}{dt}|\phi^0\rangle\right]dt\right|^2. \tag{2.23}$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist das Produkt aus $\langle\phi^\pm|\frac{d}{dt}|\phi^0\rangle$ und einer Funktion, welche mit der Frequenz $\omega^\pm - \omega^0$ oszilliert. In einem genügend kurzen Zeitintervall $[t_0 \ldots t_1]$ kann man diese beiden Ausdrücke als zeitunabhängig betrachten. Folglich ergibt Gl. (2.23)

$$P_\pm(t_1) = \left|\frac{\langle\phi^\pm|\frac{d}{dt}|\phi^0\rangle}{\omega^\pm - \omega^0}\right|^2 2\left(1 - \cos[(\omega^\pm - \omega^0)(t_1 - t_0)]\right). \tag{2.24}$$

Lässt man nun zu, dass $\langle\phi^\pm|\frac{d}{dt}|\phi^0\rangle$ und die Differenzfrequenz $\omega^\pm - \omega^0$ stufenlos in der Zeit variieren, so ist die Wahrscheinlichkeit $P_\pm$, Besetzung aus dem Dunkelzustand zu verlieren, begrenzt durch den Maximalwert von (2.24)

$$P_\pm \leq \max\left|\frac{\langle\phi^\pm|\frac{d}{dt}|\phi^0\rangle}{\omega^\pm - \omega^0}\right|^2 \times 4. \tag{2.25}$$

Aus Gl. (2.25) leitet sich sofort ab, dass als Bedingung für adiabatisches Folgen

$$|\omega^\pm - \omega^0| \gg |\langle\phi^\pm|\frac{d}{dt}|\phi^0\rangle| \quad \text{bzw.} \quad |\omega^\pm - \omega^0| \gg \dot{\Theta} \tag{2.26}$$

während der gesamten Wechselwirkungszeit erfüllt werden muss. Normalerweise genügt es, diese Bedingung zum kritischsten Zeitpunkt, d.h. im Maximum von (2.25) zu erfüllen. Ein solches adiabatisches Folgen im $n = 1$-Unterraum wird in Kapitel 2.2.3 dazu verwendet, ein einzelnes Photon im Resonator adiabatisch zu erzeugen.

## 2.2 Einzelphotonen aus Atom-Resonator-Systemen

Ein Atom in einem angeregten Zustand kann in den Grundzustand übergehen und dabei seine Energie in Form eines einzelnen Photons abgeben. Koppelt man diesen Übergang stark an einen optischen Resonator hoher Finesse, so erfolgt die Emission bevorzugt in den Resonator. Die Transmission der Resonatorspiegel führt zu einem Zerfall des Lichtfeldes und folglich zu einem gerichtet emittierten Einzelphoton. Die Methoden dieses einzelne Atom anzuregen, bzw. seine Anregung an den Resonator abzugeben können sich jedoch im Detail unterscheiden. Deshalb sei im nun in den folgenden Teilkapitel diskutiert, welche Methoden möglich sind und welche Vor- und Nachteile sie jeweils bieten.

### 2.2.1 Purcell-Effekt im Zwei-Niveau Atom

Bereits 1946 sagte Purcell [60] vorher, dass ein Atom, welches an einen Resonator koppelt, schneller spontan zerfallen kann als ein Atom im freien Raum. Experimentell gelang Goy et

al. 1983 [61] der Nachweis dieses sogenannten Purcell-Effekts für Übergänge in Natrium-Rydbergatomen in einem supraleitenden Mikrowellenresonator, bzw. etwas später Heinzen et al. 1987 [62] für angeregte Ytterbiumatome in einem optischen Resonator. In aktuellen Experimenten wird der Purcell-Effekt zur Erzeugung einzelner Photonen aus Quantenpunkt-Resonator-Systemen verwendet [63, 15, 19].

Der Zerfall eines angeregten Atoms mit der Zerfallsrate $\gamma$ durch spontane Emission eines Photons in den freien Raum kann mit dem nicht-hermiteschen Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{ad} = -i\hbar\gamma\hat{\sigma}_{ee} \tag{2.27}$$

beschrieben werden. Das Atom koppelt nun zusätzlich zum spontanen Zerfall über die Wechselwirkung $\hat{H}_{int}^{(2)}$ aus Gl. (2.10) an den optischen Resonator. Das Lichtfeld des optischen Resonators zerfällt wiederum durch die Ankopplung an ein externes Bad, d.h. über die Transmission des Spiegels koppelt die Mode im Resonator an ein Kontinuum von Lichtmoden mit unterschiedlicher Frequenz.[1] Dies lässt sich über folgenden Wechselwirkungs-Hamiltonian in Drehwellennäherung beschreiben

$$\hat{H}_{rd} = i\hbar\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\int_{-\Delta_b}^{\Delta_b} d\Delta\left[\hat{a}^\dagger\hat{b}_\Delta - \hat{a}\hat{b}_\Delta^\dagger\right] + \int_{-\Delta_b}^{\Delta_b} d\Delta\left[\hbar\Delta\,\hat{b}_\Delta^\dagger\hat{b}_\Delta\right], \tag{2.28}$$

wobei die Operatoren $\hat{b}_\Delta^\dagger$ und $\hat{b}_\Delta$ ein Photon mit Verstimmung $\Delta = \omega_{bath} - \omega_C$ relativ zur Resonatorfrequenz im externen Bad erzeugen, bzw. vernichten. Dabei ist angenommen, dass sich innerhalb eines Frequenzbandes von $-\Delta_b$ bis $\Delta_b$ die Transmission der Spiegel nicht ändert. Deshalb kann im Hamiltonoperator eine konstante Kopplungskonstante $\sqrt{\kappa/\pi}$ angesetzt werden. Der gesamte Hamiltonoperator in Drehwellennäherung, im Fall dass Atom und Resonator auf Resonanz sind, ergibt sich damit zu

$$\hat{H}' = \hat{H}_{int}^{(2)} + \hat{H}_{rd} + \hat{H}_{ad}. \tag{2.29}$$

Für eine Analyse des Verhaltens eines angeregten Atoms genügt es, vor der Emission aus dem Resonator Superpositionen der beiden Zustände des $(n = 1)$-Dubletts $|e, 0\rangle$ und $|g, 1\rangle$ zu betrachten, wobei das externe Kontinuum sich im Vakuumzustand $|vac\rangle$ befindet, sowie nach der Emission den Zustand $|g, 0\rangle$ mit dem Zustand $|\phi_1\rangle$ im externen Feld. Der gesamte verwendete Zustandsvektor ist somit

$$|\Psi\rangle = [c_e|e, 0\rangle + c_g|g, 1\rangle] \otimes |vac\rangle + |g, 0\rangle \otimes |\phi_1\rangle \tag{2.30}$$

mit

$$|\phi_1\rangle = \int_{-\Delta_b}^{\Delta_b} d\Delta\, c_\Delta\, \hat{b}_\Delta^\dagger|vac> . \tag{2.31}$$

Der Zustand $|\phi_1\rangle$ entspricht einem Photon in einer Superposition von Zuständen unterschiedlicher Frequenz. Die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich ein Photon in diesen Zustand emittiert

[1] Absorptionsverluste seien hier nicht berücksichtigt.



wurde, ist gegeben durch

$$P_{emit} = \langle\phi_1|\int_{-\Delta_b}^{\Delta_b} d\Delta\,\hat{b}_\Delta^\dagger\hat{b}_\Delta|\phi_1\rangle = \int_{-\Delta_b}^{\Delta_b}|c_\Delta|^2 d\Delta \leq 1. \tag{2.32}$$

Die Koeffizienten $c_e$, $c_g$ und $c_\Delta$ sind zeitabhängig, wobei für ein zu Beginn angeregtes Atom die Anfangsbedingungen $c_e(0) = 1$, $c_g(0) = 0$ und $c_\Delta(0) = 0$ gelten. Einsetzen von (2.30) und (2.29) in die zeitabhängige Schrödingergleichung ergibt das Differentialgleichungssystem

$$\dot{c_e} = igc_g - \gamma c_e \tag{2.33}$$

$$\dot{c_g} = igc_e + \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\int_{-\Delta_b}^{\Delta_b} d\Delta c_\Delta \tag{2.34}$$

$$\dot{c}_\Delta = -\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}c_g - i\Delta c_\Delta. \tag{2.35}$$

Gl. (2.35) lässt sich formal integrieren, es ergibt sich für die Koeffizienten $c_\Delta(t)$ des externen Bades

$$c_\Delta(t) = -\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\int_0^t e^{-i\Delta(t-\tau)}c_g(\tau)d\tau. \tag{2.36}$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.36) in Gl. (2.34) lässt sich nun das externe Bad eliminieren. Verwendet man zusätzlich die Markovnäherung

$$\int_{-\Delta_b}^{\Delta_b} d\Delta e^{-i\Delta(t-\tau)} \approx 2\pi\delta(t-\tau), \tag{2.37}$$

so erhält man das vereinfachte Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix}\dot{c_e}\\ \dot{c_g}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\gamma & ig\\ ig & -\kappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_e\\ c_g\end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Formal ergibt sich dasselbe System auch aus dem nicht-hermiteschen Hamiltonoperator für den Zerfall des quantisierten Lichtfeldes

$$\hat{H}'_{rd} = -i\hbar\kappa\hat{a}^\dagger\hat{a}, \tag{2.39}$$

analog zum spontanen Zerfall des angeregten Zustands. Zusätzlich erhält man jedoch über obigen Formalismus noch die Frequenzamplitude $c_\Delta$. Deren Betragsquadrat $|c_\Delta|^2$ beschreibt das Frequenzspektrum des emittierten Photons. Außerdem ist die Fouriertransformierte von $c_\Delta$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\Phi(t)$, dass zum Zeitpunkt $t$ ein Photon aus dem Resonator emittiert wird. Unter Verwendung von (2.36) und (2.37) ergibt sich

$$\Phi(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\Delta_b}^{\Delta_b} d\Delta\, c_\Delta(T)\, e^{-i\Delta(t-T)} \approx -\sqrt{2\kappa}c_g(t), \tag{2.40}$$

d.h. die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\Phi(t)$ ist proportional zur Amplitude $c_g(t)$, mit der sich ein Photon zum Zeitpunkt $t$ im Resonator aufhält. Die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass zum Zeitpunkt t ein Photon emittiert wird

$$|\Phi(t)|^2 = 2\kappa|c_g(t)|^2 \tag{2.41}$$

ist die Einhüllende des emittierten Photonenwellenpakets.

Abb. 2.4(a) zeigt die zeitliche Entwicklung des Atom-Resonator Systems für $\kappa \gg g$. Die starke Dämpfung des Ein-Photonen-Zustandes des Resonators verhindert jegliche Vakuum-Rabi-Oszillationen, da das Photon aus dem Resonator emittiert wird, bevor es durch das Atom reabsorbiert werden kann. Deshalb ist die transiente Besetzung des Zustands $|g,1\rangle$ vernachlässigbar, wenn das Atom zum Zeitpunkt Null im angeregten Zustand $|e\rangle$ startet. In diesem Fall kann die adiabatische Näherung $\dot{c}_g \approx 0$ angewandt werden, woraus sich aus dem Differentialgleichungssystem (2.38)

$$\dot{c}_e = -\tilde{\gamma}_{bc}c_e, \quad \text{d.h.} \quad c_e(t) = \exp\left(-\tilde{\gamma}_{bc}t\right) \quad \text{mit} \quad \tilde{\gamma}_{bc} = \gamma + \frac{g^2}{\kappa} \tag{2.42}$$

ergibt. Folglich zerfällt das angeregte Atom exponentiell. Die Zerfallsrate $\tilde{\gamma}_{bc}$ ist dabei um $g^2/\kappa$ durch die Anwesenheit des Resonators erhöht. Dies ist der oben angesprochene Purcell-Effekt. Das dabei emittierte Photon wird mit der Wahrscheinlichkeitsamplitude $\Phi(t)$ zum Zeitpunkt $t$ emittiert, siehe Abb. 2.4(a) mittlere Zeile. Sie ergibt sich in adiabatischen Näherung mit Hilfe von Gl. (2.40) zu

$$\Phi(t) \approx -ig\sqrt{\frac{2}{\kappa}}\,c_e(t). \tag{2.43}$$

Der exponentielle Zerfall führt in guter Näherung zu einer Lorentzkurve der Breite $\tilde{\gamma}_{bc}$ (FWHM) im Frequenzspektrum des emittierten Photons, vgl. Abb. 2.4 (a) untere Zeile. Aus der Emissionswahrscheinlichkeit $P_{emit}$ aus dem Resonator, aus Gl. (2.32), ergibt sich das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten einer gerichteten Emission aus dem Resonator zu einer Emission in den freien Raum zu $g^2/(\kappa\gamma)$. Dies entspricht dem doppelten Ein-Atom-Kooperativitätsparameter, welcher ursprünglich im Zusammenhang mit optischer Bistabilität eingeführt wurde [64]. Man beachte, wenn $g_0^2/\kappa \gg \gamma$ erfüllt ist, strahlt das Atom hauptsächlich in den Resonator ab. Zusammen mit $\kappa \gg g$ definiert diese Bedingung das sogenannte „bad-cavity"-Regime.

Im Regime starker Kopplung („strong-coupling"-Regime), $g \gg (\kappa, \gamma)$, erfährt das Atom-Resonator-System hingegen Vakuum-Rabi-Oszillationen zwischen den Zuständen $|e,0\rangle$ und $|g,1\rangle$, welche mit den Raten $\gamma$ bzw. $\kappa$ zerfallen. Abb. 2.4(b) zeigt eine Situation, in der die Atom-Resonator Wechselwirkung $g$ den Übergang $|e,0\rangle \leftrightarrow |g,1\rangle$ sättigt. Im Mittel sind die Wahrscheinlichkeiten, das System in den beiden Zuständen zu finden, jeweils gleich und daher das mittlere Verhältnis der Wahrscheinlichkeit einer Photonenemission aus dem Resonator zur Wahrscheinlichkeit einer spontanen Photonenemission in den freien Raum gegeben durch $\kappa/\gamma$.

In diesem Regime lässt sich das System besser in einer „dressed-state"-Basis analog der Behandlung in Kapitel 2.1.2 beschreiben. Dazu muss das Differentialgleichungssystem (2.38) diagonalisiert werden. Es ergeben sich die Eigenwerte

$$\omega^{\pm} = -i\tilde{\gamma}_{sc} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4g^2 - (\gamma-\kappa)^2} \approx -i\tilde{\gamma}_{sc} \pm g \quad \text{mit} \quad \tilde{\gamma}_{sc} = \frac{\gamma+\kappa}{2}. \tag{2.44}$$



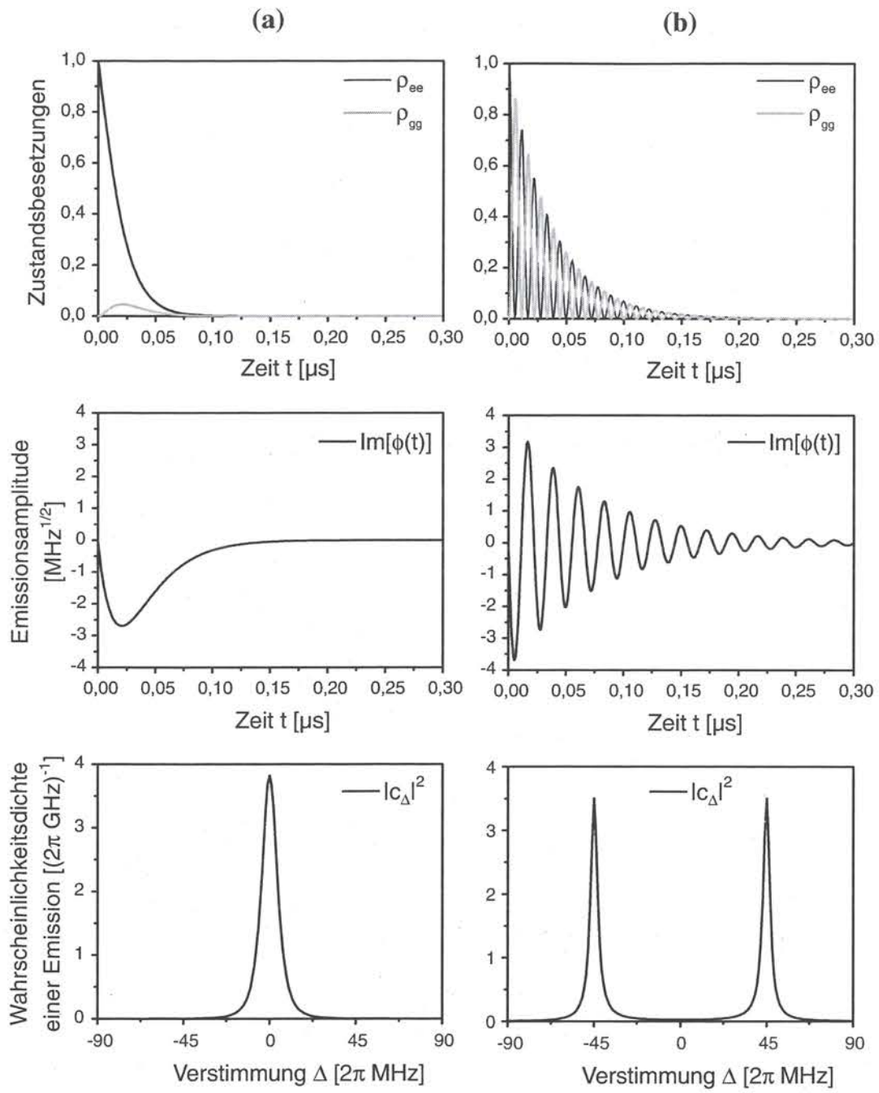



**Abbildung 2.4:** Zwei-Niveau Atom gekoppelt an einen optischen Resonator. Die obere Zeile des Diagramms zeigt die Zeitentwicklung der Besetzungen $\rho_{ee}(t)$ und $\rho_{gg}(t)$ der Produktzustände $|e,0\rangle$ und $|g,1\rangle$. Ein Photon wird mit der Wahrscheinlichkeitsamplitude $\Phi(t)$ zum Zeitpunkt $t$ emittiert (mittlere Zeile). Die untere Zeile zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichte $|c_\Delta|^2$ das Photon mit der Verstimmung $\Delta$ relativ zum Übergang des Zwei-Niveau Atoms zu emittieren. Alle Kurven resultieren aus einer analytischen Lösung der Differentialgleichung (2.38). Die beiden Spalten repräsentieren die beiden unterschiedlichen Regime: **(a)** $(g;\gamma;\kappa) = 2\pi\ (4{,}5;3;12{,}5)$ MHz (bad-cavity Regime). **(b)** $(g;\gamma;\kappa) = 2\pi\ (45;3;1{,}25)$ MHz (strong-coupling Regime).

Infolge der Anfangsbedingung von $c_e = 1$ sind beide Eigenzustände zu Beginn gleich besetzt. Diese Superposition zerfällt nun im folgenden mit der Zerfallsrate $\tilde{\gamma}_{sc}$ – dem Imaginärteil der Eigenwerte – in den Zustand $|g,0\rangle$ unter Aussendung eines Photons. Dabei emittiert der eine Anteil mit der Frequenz $+g$, der andere mit $-g$, entsprechend dem Realteil der Eigenwerte. Dies spiegelt sich direkt im Emissionsspektrum aus dem Resonator wider, Abb. 2.4(b) untere Zeile. In guter Näherung ergeben sich zwei Lorentzkurven der Breite $\tilde{\gamma}_{sc}$ bei $\pm g$. Im „strong-coupling"-Regime ist also infolge der relativ geringen Störung durch den Zerfall von angeregtem Atom und Resonator das im vorigen Kapitel behandelte „dressed-state"-Bild eine gute Näherung für die Eigenenergien des gekoppelten Systems.

Um einzelne Photonen mit einem Zwei-Niveau Atom zu erzeugen, muss das Atom gezielt zu Beginn in den angeregten Zustand gebracht werden. Prinzipiell ist das z.B. über einen Laserpuls geeigneter Länge möglich, einem sogenannten $\pi$-Puls, der die Besetzung von Grundzustand und angeregtem Zustand invertiert, oder über eine adiabatische Passage mit einem Frequenzchirp, wie in Kapitel 2.1.4 kurz angesprochen. Erfolgt die Emission des Photons jedoch vor Ausschalten des Laserpulses, so kann das Atom erneut angeregt und ein weiteres Photon erzeugt werden. Demgegenüber haben Erzeugungsmechanismen in Drei-Niveau Atomen den Vorteil, dass das Atom nicht erneut angeregt werden kann. Die Anzahl an Photonen pro Atom ist auf eins limitiert. In den folgenden Unterkapiteln wird dies genauer erläutert.

### 2.2.2 Purcell-Effekt im Drei-Niveau Atom

In einem Drei-Niveau System gibt es zwei sich prinzipiell unterscheidende Methoden, ein Einzelphoton zu erzeugen. Die erste Methode beruht auf dem im vorigen Kapitel vorgestellten Purcell-Effekt. Die grundlegende Idee dieser Methode besteht darin, das System durch ein schwaches Pumplaserfeld aus dem Anfangszustand $|u,0\rangle$ in das Zwei-Niveau System, zusammengesetzt aus $|e,0\rangle$ und $|g,1\rangle$, zu befördern, ohne dieses Zwei-Niveau System zu stark zu stören. Nach erfolgter Photonenemission aus dem Resonator landet das Atom im Zustand $|g,0\rangle$. Die Physik des Zwei-Niveau Systems bleibt erhalten einschließlich der oben besprochenen erhöhten spontanen Emission, jedoch mit dem Vorteil, dass der Pumplaser das Atom aus dem Zustand $|g,0\rangle$ nicht erneut anregen kann. Diese Methode wurde in Detail von Law et al. analysiert [36, 33]. Dort wird ein System im „bad-cavity"-Regime betrachtet, also mit

$$\kappa \gg g^2/\kappa \gg \gamma, \tag{2.45}$$

in dem Verluste der Anregung in ungewollte Moden des Strahlungsfeldes klein sind. In diesem Regime setzt die Zerfallsrate des Resonatorfeldes $\kappa$ die schnellste Zeitskala. Außerdem überwiegt die spontane Emissionsrate in den Resonator $g^2/\kappa$ die übliche inkohärente Zerfallsrate $\gamma$, mit der Besetzung aus dem angeregten Zustand verloren geht. Es wird angenommen, dass jeglicher Zerfall zu einem Verlust aus dem Drei-Niveau-System führt. Daher wird die Zeitentwicklung des Zustandvektors durch den nicht-hermiteschen Hamiltonoperator

$$\hat{H}' = \hat{H}^{(3)}_{int} - i\hbar\kappa\hat{a}^\dagger\hat{a} - i\hbar\gamma\hat{\sigma}_{ee}, \tag{2.46}$$

bestimmt, wobei $\hat{H}^{(3)}_{int}$ in Gl. (2.12) für das Drei-Niveau System definiert ist. Um die Analyse zu vereinfachen, betrachten wir ausschließlich resonante Kopplungen, d.h. $\Delta_C = \Delta_P = 0$ und beschränken den Zustandsraum auf das $(n = 1)$-Triplett. Folglich kann der Zustandsvektor als

$$|\Psi(t)\rangle = c_u(t)|u,0\rangle + c_e(t)|e,0\rangle + c_g(t)|g,1\rangle, \tag{2.47}$$



geschrieben werden, wobei $c_u$, $c_e$ und $c_g$ komplexe Amplituden sind. Die Zeitentwicklung der Amplituden sind durch die Schrödingergleichung $i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = \hat{H}'|\Psi\rangle$ gegeben, welche

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_u \\ \dot{c}_e \\ \dot{c}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\Omega_P(t)/2 & 0 \\ i\Omega_P(t)/2 & -\gamma & ig \\ 0 & ig & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_u \\ c_e \\ c_g \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

mit der Anfangsbedingung $c_u(0) = 1$, $c_e(0) = c_g(0) = 0$ und $\Omega_P(0) = 0$ ergibt. Eine adiabatische Lösung von (2.48) kann abgeleitet werden, wenn der anregende Pump-Laserpuls verhältnismäßig schwach ist, d.h. $\Omega_P(t) \ll g^2/\kappa$ genügt. Unter diesen Bedingungen ist der Zerfall über den Resonator so schnell, dass $c_e$ und $c_g$ annähernd zeitunabhängig sind. Deshalb kann man die in guter Näherung $\dot{c}_e = 0$ und $\dot{c}_g = 0$ ansetzen, mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} c_u(t) &\approx \exp\left(-\frac{\alpha}{4}\int_0^t \Omega_P^2(t')dt'\right) \\ c_e(t) &\approx i\frac{\alpha}{2}\Omega_P(t)c_u(t) \\ c_g(t) &\approx i\frac{g}{\kappa}c_e(t), \end{aligned} \tag{2.49}$$

mit $\alpha = 1/(\gamma + g^2/\kappa)$. Eine detailliertere Rechnung mit Hamiltonoperator (2.28) anstelle von (2.39) wie im Fall des Zwei-Niveau Atoms des vorigen Kapitels ergibt für die Wahrscheinlichkeitsamplitude einer Photonenemission

$$\Phi(t) \approx -\sqrt{2\kappa}c_g(t) \approx \frac{\Omega_P g\alpha}{\sqrt{2\kappa}}\exp\left(-\frac{\alpha}{4}\int_0^t \Omega_P^2(t')dt'\right) \tag{2.50}$$

Über $\Omega_P$ lässt sich daher die Einhüllende des Photonenwellenpakets einstellen. Sie kann jedoch nicht beliebig schnell verändert werden, da sie über die Gesamt-Zerfallsrate $\alpha$ verspätet auf Veränderungen von $\Omega_P$ reagiert. Die Wahrscheinlichkeit einer Photonenemission ergibt sich zu

$$\begin{aligned} P_{emit}(\tau) &= \int_0^\tau |\Phi(t)|^2 dt \\ &= \frac{g^2\alpha}{\kappa}\left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\int_0^\tau \Omega_P^2(t)dt\right)\right] \xrightarrow{\Omega_P\tau\to\infty} \frac{g^2\alpha}{\kappa}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Man beachte, dass die Exponentialfunktion in (2.51) für ein genügend große Pulsfläche $\int_0^\tau \Omega_P^2(t)dt$ des anregenden Pumplasers verschwindet, so dass die Wahrscheinlichkeit für eine Photonenemission nicht von Pulsform und Amplitude abhängen. Da die anderen Parameter $g$, $\alpha$ und $\kappa$ im Prinzip vom Experimentator kontrolliert werden, können beliebig hohe Wahrscheinlichkeiten der Photonenemission erreicht werden. In [33] wurde ein realistisches Schema unter Verwendung eines Cäsiumatoms vorgeschlagen mit $(g;\kappa;\gamma)/2\pi = (45;45;2{,}25)\,\mathrm{MHz}$. Bei einer Anregung dieses Systems mit einem $\sin^2$-Pumplaser-Puls der Länge $3\gamma^{-1}$ und der maximalen Rabifrequenz $\Omega_P^0 = 2\pi \times 45\,\mathrm{MHz}$ wird eine Wahrscheinlichkeit der Photonenemission von 96,7% numerisch errechnet.

### 2.2.3 Adiabatische Passage im Drei-Niveau Atom

Die zweite Methode in einem Drei-Niveau System einzelne Photonen zu erzeugen beruht auf der in Kapitel 2.1.4 vorgestellten adiabatischen Passage. Die Idee wurde in [34, 35, 36] vorgeschlagen, um beliebige Lichtzustände im Resonator zu erzeugen. Für unser System wurde in [37] diese Methode der Einzelphotonenerzeugung mit experimentellen Parametern durchgerechnet. Die folgende Diskussion, insbesondere die Methode das emittierte Wellenpaket für einen adiabatischen Transfer zu berechnen, beruht im wesentlichen auf [65, 66].

Die grundlegende Idee beruht darauf, ein Atom in dem dort vorgestellten Dunkelzustand adiabatisch vom Anfangszustand $|u,0\rangle$ ohne Photon im Resonator in den Zustand $|g,1\rangle$ zu überführen, d.h. genau ein Photon zu erzeugen. Der Zerfall des Resonators über die Rate $\kappa$ in das von außen ankoppelnde Bad führt zu einem gerichtet emittierten Photon, wobei das Atom im Endzustand $|g,0\rangle$ landet.

Im Gegensatz zur Methode, über den Purcell-Effekt einzelne Photonen zu erzeugen, muss für die adiabatische Passage die Bedingung einer starken Kopplung erfüllt sein, d.h.

$$g \gg (\kappa, \gamma), \tag{2.52}$$

da die kohärente Überlagerung der beiden Zustände $|u,0\rangle$ und $|g,1\rangle$ nicht durch Zerfallsprozesse von Resonator und Atom zerstört werden darf. Im folgenden sei nun genauer untersucht, unter welchen Bedingungen das System dem Dunkelzustand adiabatisch folgen kann. Die Dynamik des untersuchten Systems wird durch denselben Hamiltonoperator $\hat{H}'$ (Gl. (2.46)) bestimmt wie im vorigen Kapitel, jedoch im Parameterregime starker Kopplung. Dadurch bleibt der Dunkelzustand $|\phi_1^0\rangle \equiv |D\rangle$ trotz Verlusten weiterhin in guter Näherung ein Eigenvektor des Systems. Als dazu orthogonale Vektoren werden der angeregte Zustand $|e,0\rangle$ und der leuchtende Zustand $|B\rangle$ verwendet. Die verwendete Basis setzt sich somit aus den 3 Vektoren

$$\begin{aligned} |D\rangle &= \cos\Theta|u,0\rangle - \sin\Theta|g,1\rangle, \\ |B\rangle &= \sin\Theta|u,0\rangle + \cos\Theta|g,1\rangle \end{aligned} \tag{2.53}$$

und $|e,0\rangle$ zusammen. Der allgemeine Zustandsvektor $|\Psi(t)\rangle$ im $(n=1)$-Unterraum ergibt sich damit zu

$$|\Psi(t)\rangle = c_d(t)|D\rangle + c_b(t)|B\rangle + c_e(t)|e,0\rangle. \tag{2.54}$$

Die Dynamik der Wahrscheinlichkeitsamplituden $c_d$, $c_b$ und $c_e$ wird durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_d \\ \dot{c}_b \\ \dot{c}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\Delta - \kappa\sin^2\Theta & -\dot{\Theta} + \kappa/2\sin 2\Theta & 0 \\ \dot{\Theta} + \kappa/2\sin 2\Theta & -i\Delta - \kappa\cos^2\Theta & i\Omega_0 \\ 0 & i\Omega_0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_d \\ c_b \\ c_e \end{pmatrix}. \tag{2.55}$$

bestimmt, welches sich nach Einsetzen in die Schrödingergleichung ergibt. Die Terme proportional zu $\dot{\Theta}$ beschreiben die Kopplung von Dunkelzustand und leuchtendem Zustand durch die nicht-adiabatische Veränderung des Mischungswinkels, entsprechend der Diskussion in Kapitel 2.1.4. Zusätzlich bewirkt der Zerfall des Resonators eine „Kopplung“ dieser beiden Zustände mit der „Kopplungsstärke“ $\kappa/2\sin 2\Theta$. Diese ist maximal für den Mischungswinkel $\Theta = \pi/4$.



Wie im folgenden erklärt wird, kann diese Kopplung vernachlässigt werden, wenn der leuchtende Zustand sehr schnell zerfällt. Aus der Differentialgleichung (2.55) wird deutlich, woher der leuchtende Zustand seinen Namen hat. Er steht mit der Kopplungsstärke

$$\Omega_0 = \sqrt{g^2 + \Omega_P^2/4} \tag{2.56}$$

in Wechselwirkung zum angeregten Zustand $|e,0\rangle$. Von dort kann das Atom unter Aussendung eines spontan emittierten Photons zerfallen. Wenn der Prozess verhältnismäßig langsam abläuft, also für $\gamma T \gg 1$ – wobei $T$ die Dauer des adiabatischen Transfers ist – so kann der angeregte Zustand $|e,0\rangle$ adiabatisch eliminiert werden. Es gilt $\dot{c}_e = 0$, wodurch sich die Beziehung

$$c_e = \frac{i\Omega_0}{\gamma} c_b \tag{2.57}$$

ergibt. Die Differentialgleichung des leuchtenden Zustands $|B\rangle$ vereinfacht sich damit für $\Delta = 0$ zu

$$\dot{c}_b = -\left[\frac{\Omega_0^2}{\gamma} + \kappa\cos^2\Theta\right] c_b + \left[\dot{\Theta} + \frac{\kappa}{2}\sin(2\Theta)\right] c_d. \tag{2.58}$$

Die Kopplung zwischen dem angeregten Zustand und dem leuchtenden Zustand führt für diesen zu einer effektiven Zerfallsrate $\Omega_0^2/\gamma$. Zusätzlich zerfällt der Anteil von $|g,1\rangle$ am leuchtenden Zustand ($|\langle g,1|B\rangle|^2 = \cos^2\Theta$) unter Aussendung eines Photons aus dem Resonator mit der Zerfallsrate $\kappa$. Erfolgt dieser Zerfall schneller als die Besetzung aus dem Dunkelzustand, d.h.

$$\frac{\Omega_0^2}{\gamma} + \kappa\cos^2\Theta \gg \dot{\Theta} + \frac{\kappa}{2}\sin(2\Theta), \tag{2.59}$$

so kann der leuchtende Zustand in guter Näherung vernachlässigt werden ($c_b \approx 0$) und das System folgt adiabatisch dem Dunkelzustand. Die linke Seite von Gl. (2.59) kann mit $\Omega_0^2 \geq g^2$ und $\cos^2\Theta \geq 0$ nach unten abgeschätzt werden zu

$$\frac{\Omega_0^2}{\gamma} + \kappa\cos^2\Theta \geq \frac{g^2}{\gamma}. \tag{2.60}$$

Ebenso wird die rechte Seite mit $\sin(2\Theta) \leq 1$ nach oben abgeschätzt zu

$$\dot{\Theta} + \frac{\kappa}{2}\sin(2\Theta) \leq \dot{\Theta} + \frac{\kappa}{2}. \tag{2.61}$$

Damit ist die Adiabasie sicher erfüllt unter der Bedingung

$$\frac{g^2}{\gamma} \gg \dot{\Theta} + \frac{\kappa}{2} \tag{2.62}$$

Einerseits erfordert diese Adiabasiebedingung, dass der Mischungswinkel $\Theta$ nur langsam verändert wird ($g^2/\gamma \gg \dot{\Theta}$), wie bereits für den adiabatischen Besetzungstransfer mit klassischen Feldern hergeleitet wurde, siehe (2.26). Zudem folgt jedoch, dass der adiabatische Transfer nur im Regime starker Kopplung funktioniert ($\frac{2g^2}{\kappa\gamma} \gg 1$), da sonst der Dunkelzustand durch die Verluste des Resonators und die spontane Emission des Atoms zu stark gestört wird.

Ist jedoch diese Adiabasiebedingung erfüllt, so ergibt sich die zeitliche Entwicklung des Dunkelzustandes im adiabatischen Limes ($c_b = 0$) zu

$$\dot{c_d} = -\kappa \sin^2\Theta \, c_d \tag{2.63}$$

$$\text{d.h.} \qquad c_d = \exp\left(-\kappa \int_0^t \sin^2\Theta d\tau\right), \tag{2.64}$$

d.h. der Anteil des Einphotonenzustandes $P_{g,1} = |\langle g,1|D\rangle|^2 = \sin^2\Theta$ am Dunkelzustand zerfällt mit der Rate $\kappa$, unter Aussendung eines Photons. Durch eine ausführlichere Rechnung wie in Kapitel 2.2.1 mit Hamiltonoperator (2.28) anstelle von (2.39) lässt sich auch hier das Wellenpaket des emittierten Photons in adiabatischer Näherung bestimmen. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude einer Photonenemission zum Zeitpunkt $t$ ergibt sich daraus entsprechend zu

$$\Phi(t) = -\sqrt{2\kappa}c_g(t) = -\sqrt{2\kappa}\left[c_d \sin\Theta - c_b\cos\Theta\right] \approx -\sqrt{2\kappa}c_d\sin\Theta \tag{2.65}$$

$$= -\sqrt{2\kappa}\sin\Theta\exp\left(-\kappa\int_0^t \sin^2\Theta d\tau\right). \tag{2.66}$$

Wie beim Purcell-Effekt eines Drei-Niveau Systems kann auch hier über die Rabifrequenz $\Omega_P$ der Mischungswinkel $\Theta$ und damit die Einhüllende des Photonenwellenpakets verändert werden. Grundsätzlich sind dabei zwei verschiedene Bereiche zu unterscheiden, in denen die Adiabasiebedingung Gl. (2.62) erfüllt bleibt, wobei $T$ die Dauer des adiabatischen Transfers ist[2]:

- $\kappa T > 1$: Der adiabatische Transfer wird sehr langsam durchgeführt. Im Verhältnis dazu zerfällt der Resonator sofort. Da niemals signifikant Besetzung in den Zustand $|g,1\rangle$ transferiert wird, ist $\sin\Theta \approx \Theta$. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsamplitude einer Photonenemission

$$\Phi(t) = \sqrt{2\kappa}\Theta\exp\left(-\kappa\int_0^t \Theta^2 d\tau\right). \tag{2.67}$$

  Durch entsprechende Wahl des Mischungswinkels $\Theta$ kann ein beliebig langes Photonenwellenpaket erzeugt werden.

- $\kappa T < 1$: Der adiabatische Transfer erfolgt sehr schnell, so dass direkt der Zustand $|g,1\rangle$ besetzt wird, bevor der Resonator zerfallen kann. Daher ist $\sin\Theta \approx 1$. Das im Anschluss emittierte Photon ist nur durch den Zerfall des Resonators bestimmt mit

$$\Phi(t) = \sqrt{2\kappa}\exp\left(-\kappa t\right). \tag{2.68}$$

  Die Dauer des Photonenwellenpakets ist somit nach unten begrenzt durch die Lebensdauer des Resonators.

[2]Bei konstanter Winkeländerung $\dot{\Theta}$ und vollständigem Transfer ist $\dot{\Theta} = \frac{\pi}{2T}$. Dann lässt sich die Adiabasiebedingung auch in $\frac{g^2}{\gamma} \gg \frac{\pi}{2T} + \frac{\kappa}{2}$ umschreiben. Diese Bedingung lässt noch die Freiheit $\kappa T > 1$ oder $< 1$.



Das Frequenzspektrum des emittierten Photons $|c_\Delta|^2$ lässt sich durch eine Fouriertransformation von $\phi(t)$ berechnen. Da für den adiabatischen Prozess keine Verluste durch spontane Emission auftreten, wird ein genau definiertes Wellenpaket im Zeit- wie auch im Frequenzraum erzeugt. Verschiedene durch denselben adiabatischen Prozess erzeugte Photonen haben somit identische Eigenschaften. Die Photonen werden häufig als fourierlimitiert bezeichnet, da ein Ensemble solcher Photonen nicht inhomogen verbreitert ist. Im Prinzip kann das Wellenpaket beliebig gewählt, wodurch umgekehrt das Spektrum beliebig schmal wird. Nach oben ist die Linienbreite jedoch begrenzt durch die Linienbreite des Resonators.

Zudem können im adiabatischen Fall sehr effizient Photonen erzeugt werden. Da keine Verluste durch spontane Emission auftreten, ist die Emissionswahrscheinlichkeit nahe 100%. Für perfekte Adiabasie gilt

$$P_{emit} = \int_0^\infty dt|\phi(t)|^2 = 1 - \exp(-2\kappa f(T)) \xrightarrow{\Theta(T)\to\pi/2} 1$$

$$\text{mit} \quad f(t) = \int_0^t \sin^2\Theta d\tau, \tag{2.69}$$

d.h. der Mischungswinkel muss nur auf $\Theta = \pi/2$ gedreht werden, um mit Sicherheit ein einzelnes Photon zu erzeugen.

### 2.2.4 Nicht-adiabatische Abweichungen

Das im folgenden beschriebene Experiment befindet sich leider nicht weit genug im Regime starker Kopplung, als dass die adiabatische Näherung überall gültig bliebe. Die Parameter des Experiments sind $g = 2\pi\ 2{,}5\,\text{MHz}$, $\kappa = 2\pi\ 1{,}25\,\text{MHz}$ und $\gamma = 2\pi\ 3\,\text{MHz}$, wodurch man $\frac{g^2}{\kappa\gamma} = 1{,}67$ erhält. Man befindet sich somit knapp im Bereich starker Kopplung. Die Kopplungsstärke $g$ variiert jedoch stark in Abhängigkeit der Position des Atoms, vgl. Gl. (2.9) und (2.5). Die maximale Kopplungsstärke $g$ erfährt das Atom nur im Bauch der Resonatormode. Nahe einem Knoten oder weit weg der zentralen Achse des Resonators ist die Kopplungsstärke weit geringer. Da die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Atom im Bauch der Mode aufhält, relativ klein ist, befindet sich ein Großteil der Atome nicht im Regime starker Kopplung. Daher behandelt dieses Kapitel einige Abweichungen von der adiabatischen Näherung für schwächere Kopplung.

Der Dunkelzustand $|D\rangle$ ist durch den Zerfall des Resonators nicht mehr Eigenzustand des Gesamtsystems. Daher folgt das System nicht mehr adiabatisch dem Dunkelzustand, sondern eher den tatsächlichen Eigenzuständen, wie sich durch eine Simulation in Kapitel 2.2.6 zeigen wird. Die analytischen Eigenfrequenzen dieser Zustände, d.h. die Eigenwerte des nichthermiteschen Hamiltonoperators

$$\hat{H}' = \hat{H}^{(3)}_{int} - i\hbar\kappa\hat{a}^\dagger\hat{a} - i\hbar\gamma\hat{\sigma}_{ee}, \tag{2.70}$$

sind komplex. Die zeitliche Entwicklung eines Zustands wird durch den Eigenwert $\omega_n$ festgelegt nach

$$e^{-iE_n\frac{t}{\hbar}} = e^{-iRe(\omega_n)t}e^{Im(\omega_n)}. \tag{2.71}$$

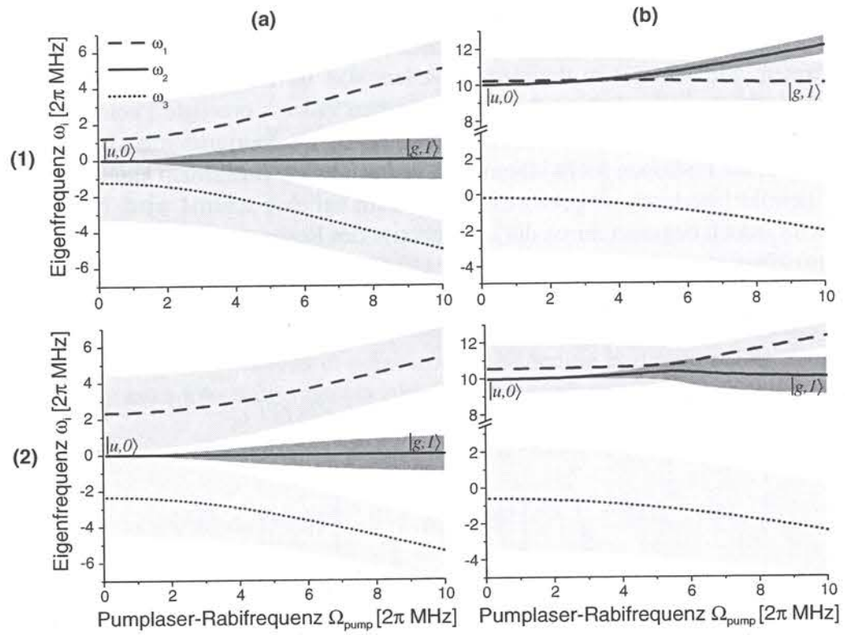



**Abbildung 2.5:** Stationäre Eigenwerte des gekoppelten Λ-Systems $\{|u,0\rangle, |e,0\rangle, |g,1\rangle\}$ mit Verlusten von angeregtem Atom und quantisiertem Lichtfeld im Resonator in Abhängigkeit der Rabifrequenz des Pumpfeldes $\Omega_P$. Die durchgezogenen, gestrichelten und gepunkteten Linien sind jeweils die Realteile der 3 unterschiedlichen Eigenwerte $\omega_i$. Die Imaginärteile spiegeln die Lebensdauer der Zustände und somit deren Linienbreite wider. Sie sind als Breite der schattierten Streifen dargestellt. Gezeigt sind Diagramme für zwei unterschiedliche Verstimmungen $\Delta = 0$ (a), bzw. $\Delta = 2\pi$ 10 MHz (b), sowie zwei unterschiedliche Kopplungsstärken an den Resonator $g = 2\pi$ 1,5 MHz (1) und $g = 2\pi$ 2,5 MHz (2). Die übrigen Parametern sind $\kappa = 2\pi$ 1,25 MHz und $\gamma = 2\pi$ 3 MHz.

Realteil und Imaginärteil der Eigenwerte können somit als Eigenfrequenz bzw. Zerfallsrate des zugehörigen Zustands interpretiert werden.

Zur Veranschaulichung der zu erwartenden Effekte im Experiment sind in Abb. 2.5 die Eigenfrequenzen für zwei unterschiedliche Verstimmungen $\Delta$, sowie zwei unterschiedliche Kopplungsstärken $g$ grafisch dargestellt. Der Imaginärteil der Eigenwerte ist hier jeweils als Linienbreite des Zustands eingezeichnet. Einer der Eigenzustände $|\phi_2\rangle$ mit der Eigenfrequenz $\omega_2$ ähnelt sehr stark dem Dunkelzustand. Dieser Zustand wird im folgenden mit dem Dunkelzustand verglichen.

Der adiabatische Transfer über den Dunkelzustand $|D\rangle$ mit

$$|D\rangle = \cos(\Theta(\Omega_P))|u,0\rangle - \sin(\Theta(\Omega_P))|g,1\rangle \tag{2.72}$$

startet für $\Omega_P = 0$ im Zustand $|u,0\rangle$. Erhöht man die Rabifrequenz $\Omega_P$, so geht der Dunkelzustand für $\Omega_P \gg 2g$ stetig in den Zustand $|g,1\rangle$ über. Auch die in Abb. 2.5 dargestellten Eigenniveaus können für $\Omega_P = 0$ dem Zustand $|u,0\rangle$ und für $\Omega_P \gg 2g$ dem Zustand $|g,1\rangle$ zugeordnet



werden. Sie sind dort entsprechend beschriftet. Offensichtlich gehen die beiden Zustände bei einer Erhöhung der Rabifrequenz $\Omega_P$ nicht immer stetig ineinander über. Daher kann für eine schwache Kopplungsstärke $g$ bei gleichzeitiger Verstimmung, siehe Abb. 2.5 (1,b), durch Erhöhung der Pump-Rabifrequenz kein adiabatischer Transfer von $|u,0\rangle$ nach $|g,1\rangle$ erfolgen.

Eine wichtige Eigenschaft des Dunkelzustandes ist weiterhin, dass seine Eigenfrequenz unabhängig von $\Omega_P$ oder $g$ konstant bei $\omega^0 = \Delta$ bleibt. Im Gegensatz dazu verschiebt sich die Eigenfrequenz der tatsächlichen Eigenzustände für Ramanverstimmung $\Delta \neq 0$, siehe Abb. 2.5(b). Der Grund für diese Energieverschiebung ist die Beimischung des angeregten Zustands $|e,0\rangle$ zu den Eigenzuständen, wodurch die Eigenenergien von angeregtem Zustand und quasi-dunklem Zustand voneinander abgestoßen werden.

Diese Energieverschiebung wirkt sich direkt auf das Emissionsspektrum des erzeugten Photons aus. Bei der Emission eines Photons aus dem Resonator geht der jeweils besetzte Eigenzustand in den Zustand $|g,0\rangle$ über. Die Eigenfrequenz von $|g,0\rangle$ ist jedoch unabhängig von $\Omega_P$. Die Energieerhaltung bewirkt somit, dass die Photonen durch die Energieverschiebung der Eigenzustände für unterschiedliche $\Omega_P(t)$ unterschiedliche Frequenz erhalten.

Beim adiabatischen Transfer im Dunkelzustand, siehe Kap. 2.2.3, wird jedoch nicht plötzlich ein Photon erzeugt, stattdessen entsteht ein Photonenwellenpaket, beschrieben durch die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\Phi(t)$. Dieses Bild muss für schwächere Kopplung in zweierlei Hinsicht modifiziert werden. Einerseits erfährt das Photonenwellenpaket beim adiabatischen Transfer durch die sich verschiebenden Eigenfrequenzen eine sich zeitlich ändernde Frequenzverschiebung. Dies wird als Frequenzchirp der Photonen bezeichnet. Andererseits kann durch den Anteil des angeregten Zustands das Atom fortlaufend spontan zerfallen. Ein Teil der Atome fällt dabei in den Ausgangszustand $|u,0\rangle$ zurück und kann daraufhin trotzdem ein einzelnes Photon in den Resonator abstrahlen. Dieses Photon hat jedoch keine definierte Phasenbeziehung relativ zu einem adiabatisch erzeugten Photon und zerstört damit die Kohärenz des Wellenpaketes. Daher ist das Wellenpaket des Photons nicht eindeutig durch den Erzeugungsprozess definiert. Im Frequenzraum führt dies zu einer inhomogenen Verbreiterung der Photonen.

Durch die Beimischung des angeregten Zustands treten zudem Verluste durch spontane Emission auf. Der Zustand ist nicht mehr perfekt dunkel. Angemerkt sei, dass auch für $\Delta = 0$ der angeregte Zustand teilweise besetzt wird, was nicht zu einer Energieverschiebung, aber trotzdem zu Verlusten durch spontane Emission führt.

Die Linienbreite des Eigenzustands ausgehend vom Anfangszustand $|u,0\rangle$ des Systems unterscheidet sich teilweise stark von der Linienbreite des Dunkelzustandes. Diese ist gegeben durch die Zerfallsrate $2\kappa \sin^2(\Theta(\Omega_P))$ der Photonenemission aus dem optischen Resonator. Im Vergleich dazu zerfällt der Eigenzustand $|\phi_2\rangle$ für kleine Pump-Rabifrequenz $\Omega_P$ deutlich langsamer. Wie sich in einer Simulation in Kapitel 2.2.6 zeigen wird, bleibt das das Atom länger im stabilen Ausgangszustand $|u,0\rangle$. Der spontane Zerfall von angeregtem Zustand und Resonator ist für kleine Kopplungsstärken $g$ dominierend gegenüber einem Aufbau einer kohärenten Überlagerung der beiden Grundzustände für den Ramantransfer – der Ramanprozess wird behindert. Insgesamt wird der Einphotonenzustand $|g,1\rangle$ beim adiabatischen Transfer dadurch sehr viel später besetzt, d.h. das Photon später erzeugt. Vernachlässigbar ist diese Verzögerung nur für starke Kopplung $g$ an den Resonator. In den Simulationen in Kapitel 2.2.6 zeigt sich dieser Effekt auch im dynamischen Prozess der Photonenerzeugung.

Zusammenfassend entspricht insbesondere für $\Delta = 0$ bei hoher Kopplungsstärke $g$ der Dunkelzustand in guter Näherung dem Eigenzustand $|\phi_2\rangle$. Daher erfolgt der adiabatisch Transfer

im Bauch des Resonators in guter Näherung über den Dunkelzustand. Je weiter das Atom vom Bauch entfernt ist, umso größer wird die Beimischung des angeregten Zustandes beim Transfer und damit auch die Verluste durch spontane Emission, der Frequenzchirp und die inhomogene Verbreiterung der Photonen.

### 2.2.5 Effizienz der Photonenerzeugung

Für kleine Pumplaser-Rabifrequenz $\Omega_P$ lässt sich die Beimischung des angeregten Zustands, und damit die Verluste, über eine Störungstheorie 1. Ordnung bestimmen. In diesem Bereich ergibt sich für das Verhältnis der Besetzungswahrscheinlichkeit des Zielzustandes $P_{|g,1\rangle}$ zur der des angeregten Zustands $P_{|e,0\rangle}$

$$\frac{P_{|g,1\rangle}}{P_{|e,0\rangle}} = \frac{g^2}{\kappa^2}. \tag{2.73}$$

Dieselbe Beziehung ergibt sich im „bad-cavity"-Regime in Gl. (2.49). Zur Herleitung ist dort einzig die Beziehung $\dot{c}_g = 0$ nötig, d.h. die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustandes $|g,1\rangle$ muss sich langsam ändern, ohne auf die Bedingungen für das „bad-cavity"-Regime zurückzugreifen. Daher kann die Beziehung auch auf Bereiche außerhalb des „bad-cavity"-Regimes übertragen werden. Das Verhältnis dieser beiden Besetzungswahrscheinlichkeiten bestimmt die Effizienz der Erzeugung einzelner Photonen. Der Zustand $|g,1\rangle$ zerfällt mit der Rate $2\kappa$ unter Aussendung eines Einzelphotons aus dem Resonator. Der Zustand $|e,0\rangle$ hingegen emittiert mit der Rate $2\gamma = 2(\gamma_{eg} + \gamma_{eu})$ spontan Photonen, jedoch führt nur der Anteil $2\gamma_{eg}$ aus dem $\Lambda$-System heraus. Mit der Rate $2\gamma_{eu}$ wird wieder der Ausgangszustand $|u,0\rangle$ besetzt, welcher weiterhin zu einer Photonenemission aus dem Resonator führen kann. Für das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten von Einzelphotonenemission zu einem Verlustprozess ergibt sich somit

$$\frac{P_{emit}}{P_{loss}} = \frac{2\kappa P_{|g,1\rangle}}{2\gamma_{eg} P_{|e,0\rangle}} = \frac{g^2}{\kappa\gamma_{eg}} \tag{2.74}$$

und daraus unter der Annahme, dass entweder ein Photon emittiert wird oder ein Verlust stattfindet ($P_{emit} + P_{loss} = 1$),

$$\begin{aligned} P_{emit} &= (1 + \frac{\kappa\gamma_{eg}}{g^2})^{-1} \\ P_{loss} &= (1 + \frac{g^2}{\kappa\gamma_{eg}})^{-1} \end{aligned} \tag{2.75}$$

entsprechend der Gl. (2.51) für das „bad-cavity"-Regime. Befindet man sich weit im „strong-coupling"- oder „bad-cavity"-Regime, ergibt sich daraus eine Emissionswahrscheinlichkeit $P_{emit}$ nahe 1 bei sehr geringen Verlusten. Inwieweit diese Formeln tatsächlich auch außerhalb des „bad-cavity"-Regimes die erwartete Effizienz der Erzeugung einzelner Photonen beschreiben, wird im folgenden Kapitel anhand von numerischen Simulationen des $\Lambda$-Systems genauer untersucht.

### 2.2.6 Simulation der adiabatischen Passage

Über die stationären Eigenzustände in Kapitel 2.2.4 lassen sich qualitativ die Effekte einer schwächeren Kopplungsstärke $g$ an den optischen Resonator verstehen. Um jedoch im dynamisch veränderten System die Effekte der unterschiedlichen Kopplungsstärken quantitativ zu



erfassen, wurde der adiabatische Transfer in einer Dichtematrix-Beschreibung numerisch simuliert.

Als Basis-Zustände des gekoppelten Atom-Resonator-Systems werden dazu die Zustände des Produkt-Hilbertraums $\{|u,n\rangle, |e,n\rangle, |g,n\rangle\}$ für $n = 0 \ldots \infty$ verwendet. Für die Erzeugung einzelner Photonen genügt es dabei sich auf die Zustände $|u,0\rangle$, $|e,0\rangle$, $|g,1\rangle$ und $|g,0\rangle$ zu beschränken, da höher angeregte Zustände nicht besetzt werden können. Die zeitliche Entwicklung der Dichtematrix wird dabei über die Mastergleichung [67, Kap.15.4]

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \hat{\mathcal{L}}[\hat{\rho}] \tag{2.76}$$

beschrieben. Der hermitesche Anteil der zeitlichen Entwicklung erfolgt über den Hamiltonoperator des Drei-Niveau Systems ohne Verluste $\hat{H} = \hat{H}^{(3)}_{int}$ aus (2.12), wobei die Kopplungsstärken $g$ und $\Omega_P$ für den adiabatischen Transfer zeitlich verändert werden. Der Liouville-Operator $\hat{\mathcal{L}}$ beschreibt die nicht-hermitesche Zeitentwicklung durch Verluste. Er lautet in Lindblad-Form

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}[\hat{\rho}] = &\gamma_{eu}(2\hat{\sigma}_{ue}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{eu} - \hat{\sigma}_{ee}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{ee}) \\ &+ \gamma_{eg}(2\hat{\sigma}_{ge}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{eg} - \hat{\sigma}_{ee}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{ee}) \\ &+ \kappa(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}). \end{aligned} \tag{2.77}$$

Die ersten beiden Zeilen von Gl. (2.77) beschreiben die spontane Emission des angeregten Zustandes $|e,n\rangle$. Beim im Experiment verwendeten Rubidium fallen $5/9$ der Atome in den Ausgangszustand $|u,n\rangle$ zurück ($\gamma_{eu} = 5/9\gamma$ mit $\gamma = 2\pi\ 3\,\mathrm{MHz}$), während $4/9$ der Atome in den Zustand $|g,n\rangle$ zerfallen ($\gamma_{eg} = 4/9\gamma$). Den Zerfall des Resonators bis zum Vakuumzustand beschreibt die dritte Zeile von Gl. (2.77). Im Experiment ist $\kappa = 2\pi\ 1{,}25\,\mathrm{MHz}$.

Zur Bestimmung der zeitabhängigen Dichtematrix $\hat{\rho}(t)$ wurde in der Simulation die Mastergleichung (2.76) mit der Anfangsbedingung $\hat{\rho}(0) = |u,0\rangle\langle u,0|$ unter Verwendung des „dopri8"-Algorithmus[3] numerisch integriert. Mit Hilfe der zeitabhängigen Dichtematrix lassen sich beliebige zeitabhängige Erwartungswerte $\langle O(t)\rangle = Sp(\hat{O}\hat{\rho}(t))$, sowie Besetzungswahrscheinlichkeiten $P_\phi(t)$ beliebiger Zustände $|\phi\rangle$ [$P_\phi(t) = Sp(\hat{P}_\phi\hat{\rho}(t))$ mit dem Projektor $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$] berechnen. Entsprechend lässt sich etwa die Photonenemissionsrate $R_{emit}$ aus dem optischen Resonator durch $R_{emit}(t) = 2\kappa P_{g,1}(t)$, bzw. die Emissionswahrscheinlichkeit durch $P_{emit} = \int dt R_{emit}(t)$ bestimmen.

Ergebnisse dieser Simulation sind in Abb. 2.6 dargestellt, wobei die Parameter entsprechend einem Atom bei maximaler Kopplung $g$ gewählt wurden. Die Rabifrequenz des Pumplasers $\Omega_P$ lässt sich im Experiment frei einstellen. Für diese Simulation wurde ein gaußscher Verlauf mit einer Breite von 5 µs ($1/e$-Abfall) verwendet bei unterschiedlichen Zerfallsraten $\kappa$ des optischen Resonators. Für die experimentelle Zerfallsrate von $\kappa = 2\pi\ 1{,}25\,\mathrm{MHz}$ wird das Photon bereits emittiert bevor $\Omega_P$ ebenso groß wie die Kopplungsstärke $2g$ ist. Diese frühe Photonenemission tritt auf, wenn die Lebensdauer des Resonators $(2\kappa)^{-1}$ kurz im Vergleich zur Dauer des Pumplaserpulses ist. Nach erfolgter Photonenemission befindet sich das System im Zustand $|g,0\rangle$, der von jeglicher weiterer Wechselwirkung entkoppelt ist. Deshalb ist es nicht wirklich

[3] Der „dopri8"-Algorithmus ist ein Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren 8. Ordnung mit variabler Schrittweitenanpassung nach Dormand und Prince [68].

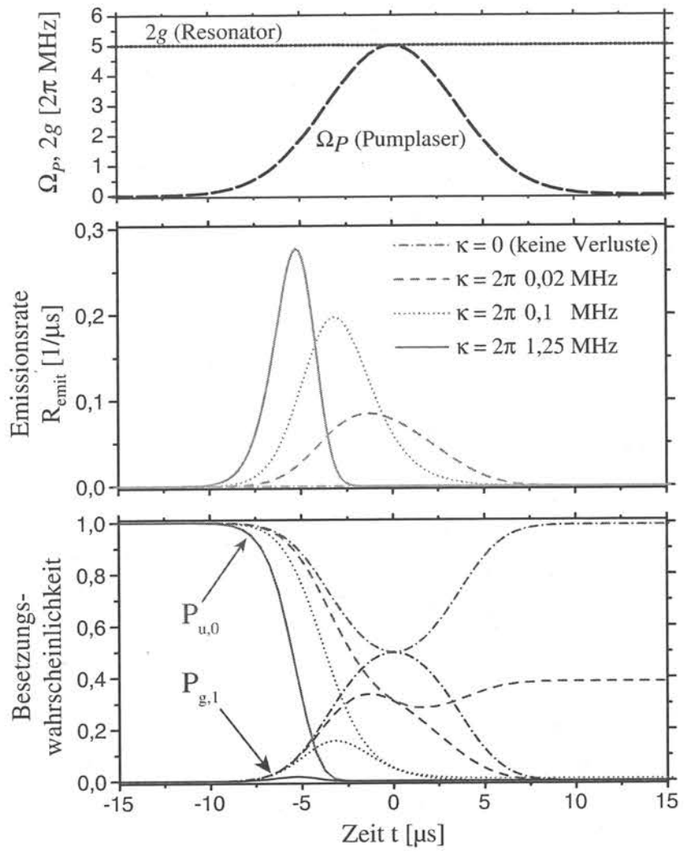



**Abbildung 2.6:** Numerische Simulation der Photonenemission für unterschiedliche Zerfallsraten des Resonators. Oben: Als Rabifrequenz des Pumplasers $\Omega_P(t)$ wurde eine Gaußfunktion mit 5 μs Breite ($1/e$-Abfall) bei konstanter Kopplung an die Resonatormode $2g$ gewählt. Mitte: Photonenemissionsrate aus dem Resonator als Funktion der Zeit bei Ramanverstimmung $\Delta = 0$ für unterschiedliche Zerfallsraten $\kappa$ des Resonators. Für die experimentellen Parameter von $2\kappa = 2\pi\ 2{,}5\,\mathrm{MHz}$ ergibt das Integral der Photonenemissionsrate $R_{emit}$ die Wahrscheinlichkeit einer Einzelphotonenemission von $P_{emit} = 78{,}4\%$. Unten: Besetzungswahrscheinlichkeiten von $|u,0\rangle$ und $|g,1\rangle$. Ohne Zerfall des Resonators wird der adiabatisch besetzte Zustand $|g,1\rangle$ beim Abschalten des Pumplasers ebenso wieder adiabatisch entvölkert.

nötig, die Endbedingung $\Omega_P \gg 2g$ zu erreichen. Der Pumplaser kann sogar nicht-adiabatisch ausgeschaltet werden, nachdem die Photonenemission stattgefunden hat.

Ohne Zerfall des Resonators ($\kappa = 0$) wird weder ein Photon emittiert, noch verbleibt es in der Mode des Resonators, da die Anfangsbedingung $2g \gg \Omega_P$ gegen Ende der Wechselwirkung wieder erfüllt ist. Der Anfangszustand wird kohärent mit dem Abfallen des Pumplaserpulses rückbevölkert [69]. Dies geschieht, wenn die Zerfallszeit des Resonators $(2\kappa)^{-1}$ länger als die



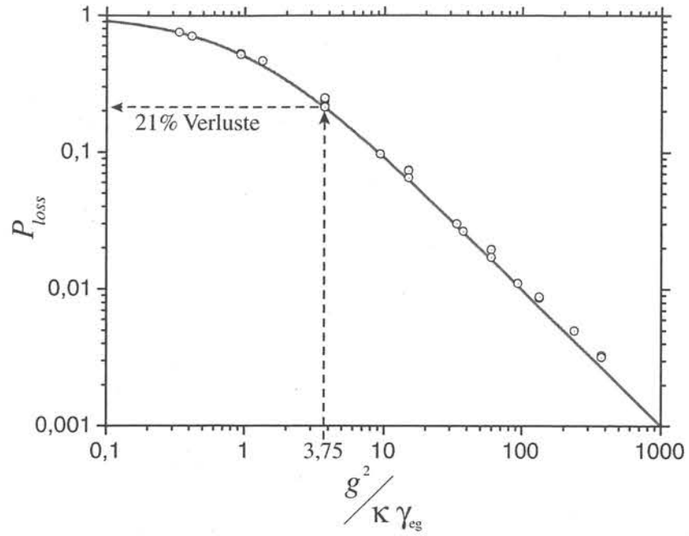



**Abbildung 2.7:** Vergleich der berechneten Verlustwahrscheinlichkeit aus der Simulation, $P_{loss} = 1 - P_{emit}$, mit der Näherungsformel, Gl. (2.75), für eine große Variation der Parameter $g = 2\pi\ 1{,}5 - 25\,\mathrm{MHz}, 2\kappa = 2\pi\ 2{,}5 - 100\,\mathrm{MHz}, 2\gamma_{eg} = 2\pi\ 0{,}6 - 60\,\mathrm{MHz}, \Delta = -2\pi\ 10 - 0\,\mathrm{MHz}$. Die Näherungsformel stimmt gut mit der Simulation überein. Das Ergebnis verdeutlicht, wie wichtig es ist, im „strong-coupling"-Regime zu sein, um Verluste durch spontane Emission zu vermeiden. Im Bauch der Resonatormode werden unter experimentellen Bedingungen ($\frac{g^2}{\kappa\gamma_{eg}} = 3{,}75$) minimale Verluste von etwa 21% erwartet.

Dauer des Pumplaserpulses ist. Mit zunehmender Zerfallsrate des Resonators $2\kappa$ erhöht sich nicht nur die Emissionswahrscheinlichkeit. Außerdem wird das erzeugte Photonenwellenpaket kürzer und verschiebt sich zu früheren Zeiten. Dadurch kann im Prinzip die Repetitionsrate der Photonenerzeugung gesteigert werden. Eine zu hohe Zerfallsrate führt jedoch, entsprechend der Diskussion in Kapitel 2.2.3, zur Besetzung des angeregten Zustands $|e,0\rangle$ und somit zur Erniedrigung der Emissionswahrscheinlichkeit durch spontane Emission in transversale Moden.

Im „strong-coupling"-Regime lassen sich diese Verluste vermeiden. Abb. 2.7 vergleicht die Verlustwahrscheinlichkeit aus der Simulation $P_{loss} = 1 - P_{emit}$ mit der Näherungsformel, Gl. (2.75). In der Simulation wird eine linear ansteigende Pumplaser Rabifrequenz $\Omega_P$ bis $\Omega_P^{max} = 4g$ verwendet und die Zerfallsrate $\kappa$ so groß gewählt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit nahe 1 der Endzustand $|g,0\rangle$ erreicht wird. Die übrigen Parameter variieren, so dass sowohl „strong-coupling"- und „bad-cavity"-Regime, aber auch deutlich schwächere Kopplungsstärken $2g$ abgedeckt werden. Die Näherungsformel beschreibt trotz der Variation der genannten Parameter recht gut die Verluste, wie auch die Emissionswahrscheinlichkeit. Die relative Abweichung beschränkt sich auf etwa 20%. Für eine hohe Emissionswahrscheinlichkeit ist daher $\frac{g^2}{\kappa\gamma_{eg}} \gg 1$ nötig.

Für eine schwächere Kopplungsstärke $g$ ergibt sich nicht nur eine geringere Emissionswahrscheinlichkeit, sondern auch eine veränderte Form des emittierten Wellenpakets, wie aus den

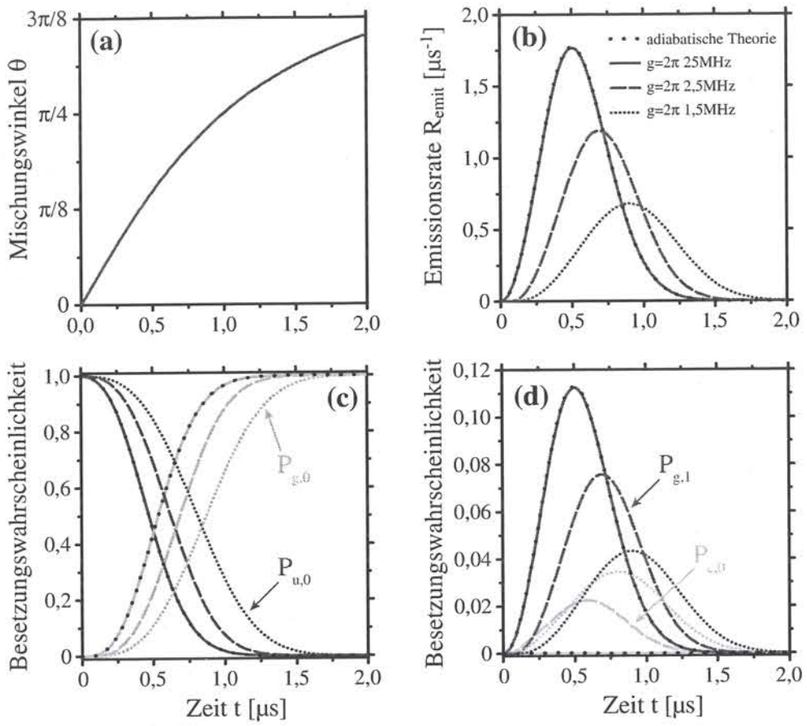



**Abbildung 2.8:** Nicht-adiabatische Photonenemission für schwache Kopplung. **(a)** In allen dargestellten Simulationen wird die Amplitude der linear ansteigenden Pump-Rabifrequenz $\Omega_P$ für unterschiedliche Kopplungsstärken $g$ jeweils so gewählt wird, dass die zeitliche Veränderung des Mischungswinkels gleich ist. Der Mischungswinkel definiert bei adiabatischer Passage im Dunkelzustand die Form des Ein-Photonen-Wellenpakets. **(b)** Vergleich der Photonenemissionsrate für unterschiedliche Kopplungsstärken $g$ mit der adiabatischen Theorie. Für starke Kopplung stimmen die Pulsform der adiabatischen Theorie und der Simulation sehr gut überein. Für schwache Kopplungsstärken wird das Photon hingegen sehr viel später emittiert. **(c)** Zeitabhängige Besetzungswahrscheinlichkeiten in den Zuständen $|u,0\rangle$ und $|g,0\rangle$. Das System bleibt für schwache Kopplung länger im Zustand $|u,0\rangle$ als bei adiabatischer Passage und folgt daher nicht dem Dunkelzustand. **(d)** Zeitabhängige Besetzungswahrscheinlichkeiten in den Zuständen $|e,0\rangle$ und $|g,1\rangle$. Für schwache Kopplung wird anstelle des Zustands $|g,1\rangle$ verstärkt der Zustand $|e,0\rangle$ besetzt. Durch spontane Emission transversal zum Resonator entstehen daher größere Verluste.

in Abb. 2.8(b) dargestellten Simulationen hervorgeht. Dort ist die Pump-Rabifrequenz $\Omega_P(t)$ so gewählt, dass für die unterschiedlichen Kopplungsstärken $g$ das Verhältnis $\frac{\Omega_P(t)}{2g}$ und dadurch der zeitliche Verlauf des Mischungswinkels $\theta(t)$ identisch ist, siehe Abb. 2.8(a). Dieser Mischungswinkel definiert nach der in Kap. 2.2.3 dargestellten Theorie das Wellenpaket des emittierten Photons, vorausgesetzt das System folgt dem Dunkelzustand adiabatisch. Im „strong-coupling"-Regime ($g = 2\pi\ 25\,\mathrm{MHz}$) entspricht die Form des Wellenpaket sehr exakt der Theorie der adiabatischen Passage über den Dunkelzustand. Für geringere Kopplung



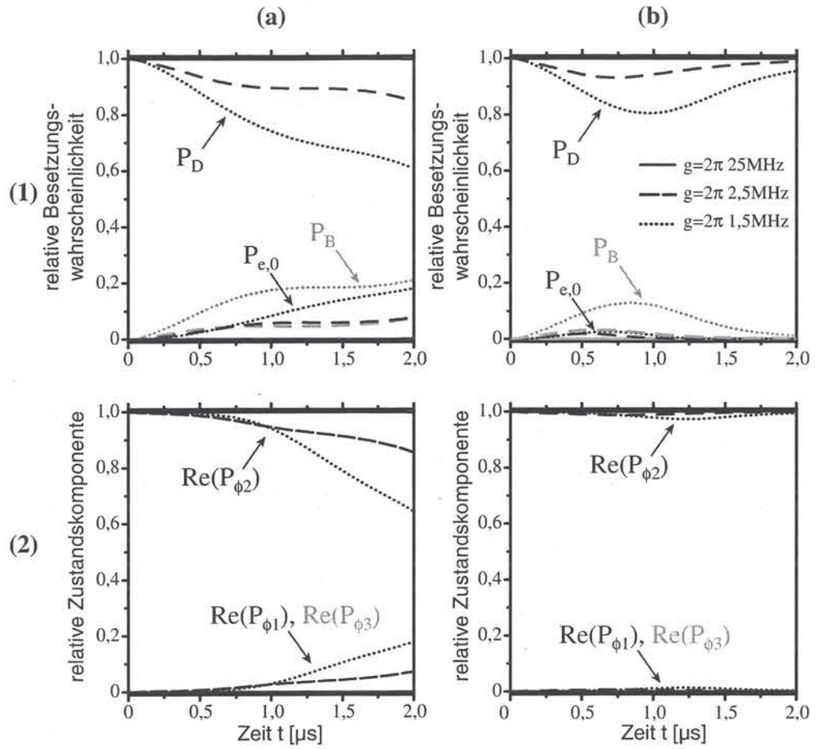



**Abbildung 2.9:** Adiabatisches Folgen für starke und schwache Kopplung. Dargestellt sind Simulationen der transienten relativen Besetzungswahrscheinlichkeiten **(1)** innerhalb des Systems $\{|D\rangle, |B\rangle, |e,0\rangle\}$, sowie **(2)** der relativen Komponenten der Zerlegung der Dichtematrix in der Eigenbasis des nicht-hermitesches Hamiltonoperators $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ für unterschiedliche Kopplungsstärken $g$ zwischen Atom und Resonator. Für starke Kopplung ($g = 2\pi\ 25\,\mathrm{MHz}$) folgt das System adiabatisch dem Dunkelzustand ($P_D = 1$), für schwächere Kopplung eher dem Eigenzustand des nicht-hermiteschen Hamiltonoperators ($Re(P_{\phi 2}) \approx 1$). Für **(a)** wurde ein Verzweigungsverhältnis der spontanen Emission von $\gamma_{eu}/\gamma_{eg} = 5/4$, für **(b)** $\gamma_{eu} = 0$ mit $\gamma_{eu} + \gamma_{eg} = \gamma = 2\pi\ 3\,\mathrm{MHz}$ verwendet. Die übrigen Parameter sind $\kappa = 2\pi\ 1.25\,\mathrm{MHz}$ und $\Delta = 0$.

zwischen Atom und Resonator $g$ weicht das System zunehmend von dieser Theorie ab. Das System bleibt für kleine Pump-Rabifrequenz $\Omega_P$ länger im Zustand $|u,0\rangle$, mit dem Ergebnis, dass das Photon erst verspätet emittiert wird. Die Wellenpakete unterschiedlicher, schwach gekoppelter Atome sind folglich nicht identisch und daher für weiterführende Experimente, in denen ununterscheidbaren Photonen benötigt werden, nur eingeschränkt geeignet. Zur Erzeugung genau definierter Photonen genügt es daher nicht, das Verhältnis $\frac{\Omega_P(t)}{2g}$ zu kontrollieren, wie in [66] vorgeschlagen wurde, zusätzlich muss das Atom gut genug lokalisiert sein, dass es nahe am Bauch eines Resonators, also weit im „strong-coupling"-Regime bleibt.

Erklären lässt sich die verspätete Photonenemission bei schwacher Kopplung im Bild der Eigenzustände des nicht-hermiteschen Hamiltonoperators, siehe auch Kap. 2.2.4. Die Simulation

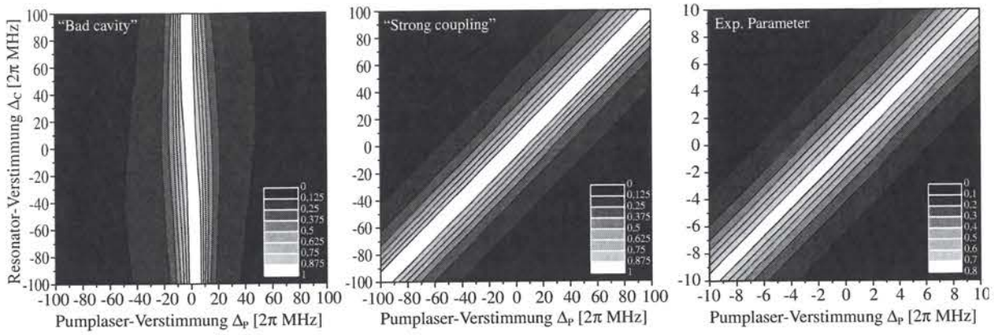



**Abbildung 2.10:** Simulation der Wahrscheinlichkeit einer Photonenemission für die unterschiedlichen Parameterregime „bad-cavity“ und „strong-coupling“, sowie für die experimentellen Parameter in Abhängigkeit von Pumplaser- $\Delta_P$ und Resonator-Verstimmung $\Delta_C$. Folglich erwartet man im Experiment keine erhöhte spontane Emission mit maximaler Emissionswahrscheinlichkeit für $\Delta_P = 0$, wie im „bad-cavity“-Regime, sondern einen Raman-Prozess für $\Delta_P = \Delta_C$, wie im „strong-coupling“-Regime. Die verwendeten Parameter sind $(g;\kappa;\gamma;\Omega_P^{max}) = 2\pi(25;125;0{,}03;1)$ MHz im „bad-cavity“-, $2\pi$ $(25;1{,}25;3;100)$ MHz im „strong-coupling“-Regime und $2\pi$ $(2{,}5;1{,}25;3;10)$ MHz für die Simulation der experimentellen Bedingungen. Für die Simulation wurde, bei konstanter Kopplung an den Resonator $g$, eine innerhalb von $\Delta t = 20\,\mu$s linear ansteigende Rabifrequenz des Pumplaser $\Omega_P$ verwendet.[4]

in Abb. 2.9(b) zeigt, dass ein schwach gekoppeltes System eher adiabatisch dem Eigenzustand $|\phi_2\rangle$ als dem Dunkelzustand $|D\rangle$ folgt[5]. Ein großer Unterschied zwischen Eigenzustand $|\phi_2\rangle$ und Dunkelzustand ist jedoch, dass der Eigenzustand für ansteigende Pump-Rabifrequenz länger mit dem Ausgangszustand $|u,0\rangle$ übereinstimmt. Dadurch wird der Zustand $|g,1\rangle$ erst später besetzt und somit Photonen später emittiert. Das adiabatische Folgen entlang des Eigenzustandes ist jedoch nicht mehr erfüllt, wenn das System durch spontane Emission des angeregten Zustands $|e,0\rangle$ in den Zustand $|u,0\rangle$ zurückfallen kann, siehe Abb. 2.9(a). Diese spontanen Prozesse bewirken eine Umverteilung innerhalb des Systems von Eigenzuständen $|\phi_i\rangle$ und zerstören dadurch die adiabatische Entwicklung. Trotzdem bleibt für kleine Pump-Rabifrequenz $\Omega_P$ die adiabatische Entwicklung entlang des Eigenzustandes $|\phi_2\rangle$ eine gute Näherung für die Dynamik des Systems, da hier die Besetzung des angeregten Zustands $|e,0\rangle$ und damit die Umbesetzung vernachlässigbar ist.

Dass der Prozess der Photonenerzeugung bei den hier verwendeten experimentellen Parametern eher dem adiabatischen Ramanprozess im „strong-coupling“-Regime aus Kapitel 2.2.3 als dem Purcell-Effekt im „bad-cavity“-Regime aus Kapitel 2.2.2 gehorcht, zeigt der Vergleich der simulierten Emissionswahrscheinlichkeiten in Abb. 2.10. Photonen werden hier hauptsächlich für $\Delta_P = \Delta_C$ erzeugt. Dies ist ein klares Indiz für einen Ramanprozess.

[4] Zur effizienten Photonenerzeugung bei den gewählten Parametern des „bad-cavity“-Regimes sind lange Pumplaserpulse erforderlich, da die Rabifrequenz des Pumplaser durch die Bedingung $\Omega_P \ll g^2/\kappa$ limitiert ist.

[5] Nähere Angaben zur Zerlegung der Dichtematrix bezüglich der Eigenzustände des nicht-hermiteschen Hamiltonoperators siehe Anhang B.



## 2.3 Photonenstatistik und kollektive Effekte

### 2.3.1 Charakterisierung einer Einzelphotonenquelle

Herkömmliche klassische Lichtquellen, wie thermische Strahler oder Laser emittieren mit großer Wahrscheinlichkeit gleichzeitig mehr als ein Photon. Sie können daher nicht als Einzelphotonenquelle verwendet werden. Eine perfekte Einzelphotonenquelle hingegen liefert mit 100% Wahrscheinlichkeit ein einzelnes Photon, d.h. $P(n=1)=1$ und $P(0)=P(>1)=0$. Um Einzelphotonenquellen von klassischen Lichtquellen unterscheiden zu können, muss die Statistik der emittierten Photonen gemessen werden.

Ein experimentell gut zugängliches Maß für die Photonenstatistik ist die Intensitätskorrelationsfunktion

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\int dt \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle}{\left(\int dt \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle\right)^2}, \tag{2.78}$$

die mit Hilfe des in Kapitel 3.4 beschriebenen Hanbury-Brown & Twiss-Aufbaus direkt gemessen werden kann.[6] Wichtig ist insbesondere der Wert der Korrelationsfunktion bei $\tau = 0$

$$g^{(2)}(0) = \frac{\overline{n^2} - \bar{n}}{\bar{n}^2}, \tag{2.79}$$

der direkt vom ersten $[\bar{n} \equiv \int dt \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle]$ und zweiten $[\overline{n^2} \equiv \int dt \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle]$ Moment der Photonenverteilung abhängt. Wenn der Zähler der Intensitätskorrelationsfunktion $\langle\psi|\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\hat{a}(t)|\psi\rangle$ gleich Null ist und somit auch $\hat{a}(t)\hat{a}(t)|\psi\rangle = 0$, enthält der Zustand $|\psi\rangle$ zum Zeitpunkt $t$ nicht mehr als 1 Photon $\rightarrow P(>1) = 0$. Die Bedingung $g^{(2)}(0) = 0$ schließt jedoch nicht aus, dass zum Zeitpunkt $t_1$ ein erstes Photon und kurze Zeit später zum Zeitpunkt $t_2$ ein zweites Photon existieren. Da die Quelle ein Ein-Photonen-Wellenpaket innerhalb des Zeitintervalls $t \in [0,T]$ emittieren soll, darf in diesem Zeitintervall kein weiteres Photon vorhanden sein. Also muss für zwei beliebige Zeitpunkte $t_1$ und $t_2$ innerhalb dieses Intervalls

$$\hat{a}(t_1)\hat{a}(t_2)|\psi\rangle = 0 \quad \forall \quad t_1, t_2 \in [0,T] \tag{2.80}$$

gelten. Typischerweise wird für Einzelphotonenquellen die Bedingung $g^{(2)}(\tau) = 0 \; \forall \; \tau \in [0,T]$ verwendet, wodurch Gl. (2.80) automatisch erfüllt ist. Zudem definiert die Bedingung $g^{(2)}(0) = 0$ nicht die relativen Besetzungswahrscheinlichkeiten von Vakuum- und Ein-Photonen-Zustand. Die Effizienz $\eta$ der Einzelphotonenquelle lässt sich daher über die mittlere Anzahl an Photonen im Intervall definieren und messen

$$\eta \equiv \int_0^T dt \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle. \tag{2.81}$$

Wenn ein Photon eine bestimmte raumzeitliche Mode mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$ besetzten soll, gilt statt Gl. (2.81)

$$\eta = \langle \hat{b}^\dagger \hat{b}\rangle. \tag{2.82}$$

Experimentell lässt sich nur schwer nachweisen, dass das Photon genau diese Mode besetzt. Über die Hong-Ou-Mandel-Interferenz [70] kann man jedoch die Ununterscheidbarkeit zweier Photonen nachweisen, d.h. die Moden zweier verschiedener Photonen vergleichen.

[6] Für stationäre Lichtfelder kann auf die Integration über die Zeit $t$ verzichtet werden.

### 2.3.2 Stationäre Lichtquellen

Für nicht zeitabhängige Lichtquellen werden zur Charakterisierung der Photonenstatistik neben der Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ oft auch der Fano-Faktor $F$, bzw. der Mandel-Parameter $Q$, verwendet. Der Fano-Faktor ist definiert als das Verhältnis zwischen dem Quadrat der Breite zum Mittelwert der Photonenstatistik

$$F \equiv \frac{\Delta n^2}{\bar{n}} = \bar{n}(g^{(2)}(0) - 1) + 1, \tag{2.83}$$

der Mandel-Parameter entsprechend über

$$Q \equiv F - 1. \tag{2.84}$$

Beide lassen sich somit über die mittlere Photonenzahl $\bar{n}$ und die Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ experimentell bestimmen.

Typische stationäre Lichtquellen lassen sich direkt durch die Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ unterscheiden:

- $g^{(2)}(0) = 0$ bedeutet, dass zur selben Zeit nicht mehr als ein Photon vorhanden ist. Dies wird bei der Resonanzfluoreszenz einzelner Ionen oder Atome, etc. beobachtet.

- $g^{(2)}(0) = 1$: Der kohärente Zustand von Laserlicht wird in guter Näherung durch eine Poissonverteilung mit mittlerer Photonenzahl $\bar{n} = \lambda$ beschrieben mit

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}. \tag{2.85}$$

  Für diesen gilt $\Delta n^2 = \bar{n}$ und damit $g^{(2)}(0) = 1$ ($F = 1, Q = 0$). Aus $g^{(2)}(0) = 1$ folgt direkt, dass nach der Detektion eines ersten Photons mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein zweites detektiert wird, d.h. die Photonen sind vollkommen unkorreliert.

- $g^{(2)}(0) = 2$: Ein thermischer Strahler besitzt eine boltzmannverteilte Photonenstatistik

$$P(n) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{nh\nu}{kT}} = CP(n-1) \tag{2.86}$$

  mit $\Delta n^2 = \bar{n} + \bar{n}^2$. Die Verteilung an Photonen ist daher breiter als bei Laser und Einzelphotonenquelle ($F = 1 + \bar{n}$). Es ergibt sich die Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(0) = 2$. Das bedeutet, dass man unmittelbar nach der Detektion eines ersten Photons mit höherer Wahrscheinlichkeit ein zweites detektiert. Die Photonen werden in Bündeln abgestrahlt, d.h. sie zeigen sogenanntes „bunching". Thermisches Licht wird oft auch als chaotisches Licht bezeichnet.

Die verschiedenen Lichtquellen lassen sich mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung in klassische und quantenmechanische Strahler einteilen. Danach muss eine klassische Größe $a(t)$ eines stationären Zufallsprozesses die Ungleichung [71, Kap. 2.3, S. 53]

$$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0) \tag{2.87}$$



erfüllen. Ist der Prozess zudem für lange Verzögerungszeiten $\tau$ unkorreliert, so gilt

$$\lim_{\tau \to \infty} g^{(2)}(\tau) = 1. \tag{2.88}$$

Licht mit $g^{(2)}(0) < 1$ ($F < 1$, $Q < 0$) kann daher nicht klassisch erklärt werden. Für eine quantenmechanische Observable ist dies jedoch erlaubt. Die Werte $g^{(2)}(0) = 1$, bzw. $F = 1$ und $Q = 0$, definieren somit eine Grenze zwischen klassischem und quantenmechanischem Licht, d.h. Laser und thermische Strahler sind klassische, einzelne Ionen oder Atome hingegen nicht-klassische Lichtquellen. Die Schwarz'sche Ungleichung definiert jedoch eine viel allgemeinere Grenze. Wächst für ein beliebiges $\tau \neq 0$ der Wert von $g^{(2)}(\tau)$ über den Wert bei Null, so wird bereits nicht-klassisches Licht beobachtet.

Auch im Fall nicht-stationärer Lichtquellen lässt sich eine Schwarz'sche Ungleichung herleiten. Da ein solches System sich nicht im stationären Zustand befindet, ändert sich die Intensitätskorrelationsfunktion fortwährend. Für die unnormierte Intensitätskorrelationsfunktion $G^{(2)}(t, t+\tau) = \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle$ gilt nur analog zu (2.87) die Ungleichung

$$|G^{(2)}(t, t+\tau)|^2 \leq G^{(2)}(t,t) G^{(2)}(t+\tau, t+\tau). \tag{2.89}$$

Mittelt man jedoch die Intensitätskorrelationsfunktion über die Zeit $t$, so ergibt sich

$$|G^{(2)}(\tau)|^2 \equiv |\langle G^{(2)}(t, t+\tau) \rangle_t|^2 \leq \langle G^{(2)}(t,t) \rangle_t \langle G^{(2)}(t+\tau, t+\tau) \rangle_t \tag{2.90}$$

und damit wiederum die Schwarz'sche Ungleichung

$$g^{(2)}(\tau) \equiv \frac{\langle G^{(2)}(t, t+\tau) \rangle_t}{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle_t^2} \leq \frac{\langle G^{(2)}(t,t) \rangle_t}{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle_t^2} = g^{(2)}(0) \tag{2.91}$$

entsprechend (2.87). In den folgenden Experimenten werden nur über die Zeit gemittelte Intensitätskorrelationsfunktionen bestimmt, für deren Interpretation somit die Schwarz'sche Ungleichung relevant ist.

Ein Beispiel für eine klassische, nicht-stationäre Lichtquelle ist ein gepulster Laser, der mit jedem Puls poissonverteilt Photonen liefert. Dieser erzeugt eine periodisch modulierte Intensitätskorrelationsfunktion, mit einem der Maxima bei $\tau = 0$. Die Maxima wiederholen sich jeweils nach einer Periode $T$. Beobachtet man hingegen, dass eines der Maxima bei $\tau \neq 0$ größer ist als der Wert bei $\tau = 0$, so wird die Schwarz'sche Ungleichung verletzt – ein klares Zeichen für nicht-klassisches Licht.

### 2.3.3 Unabhängig emittierende Atome

Im Experiment wird die Photonenstatistik des Lichtfeldes eines optischen Resonators vermessen. Dessen Feld wird von Atomen erzeugt, die durch den Resonator fallen, während sie von der Seite mit einem Laser angeregt werden. Die Atome stammen aus einer magnetooptischen Falle. Nach deren Ausschalten fällt die gesamte Atomwolke durch den optischen Resonator. Die Ankunftszeit jedes einzelnen Atomes ist statistisch verteilt, weshalb die Zahl der Atome im Resonator fluktuiert. Werden nur wenige Atome in der Falle gefangen, so ist anschließend der Fluss an Atomen stark reduziert und es passiert nur sehr selten ein einzelnes Atom den Resonator. Diese einzelnen Atome erzeugen nicht-klassisches Licht mit $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$, siehe Kapitel

4.3.2. Steigert man den Atomfluss, so beobachtet man einen Übergang von nicht-klassischem zu klassischem Licht.

Dieser Übergang lässt sich mit zwei verschiedenen Theorien qualitativ verstehen. Die erste Theorie geht von einer fluktuierenden Anzahl *unabhängig strahlender Einzelemitter* aus. Für eine sehr geringe Zahl von Emittern beobachtet man im wesentlichen die Statistik der Einzelemitter. Für eine sehr große Zahl unabhängiger Emitter erwartet man entsprechend dem Zentralen Grenzwertsatz („central limit theorem"), chaotisches (gauß'sches) Licht mit $g^{(2)}(0) = 2$ [72]. Den Übergang zwischen diesen Extremen diskutiert eine Veröffentlichung von H.J. Carmichael et al. [73], vgl. aber auch [74, 75]. Deren Ergebnisse sind im folgenden Kapitel kurz zusammengefasst.

In der zweiten Theorie wird berücksichtigt, dass die Atome im Resonator über dessen Lichtfeld miteinander wechselwirken können. Diese Wechselwirkungsprozesse können die Photonenstatistik drastisch verändern. Das Bild unabhängig emittierender Atome ist dann nicht mehr gerechtfertigt. Daher behandelt das nächste Kapitel ein einfaches Ratenmodell für $N$ Atome in einem Resonator. Dort wird genauer untersucht worin sich die beiden Theorien unterscheiden.

Im ersten Modell geht man von $N$ unabhängig voneinander strahlenden, statistisch identischen Atomen aus, welche jeweils ein elektrischen Dipolfeld $\hat{E}_i^-(t)$ emittieren. Das gesamte elektrische Feld ist die Summe der Einzelbeiträge

$$\hat{E}^-(t) = \sum_{i=1}^{N} \hat{E}_i^-(t). \tag{2.92}$$

Unter der Annahme, dass zwischen den unabhängig strahlenden Atomen keine Korrelationen auftreten ($\langle \hat{O}_i \hat{O}_j \rangle = \langle \hat{O}_i \rangle \langle \hat{O}_j \rangle$ für $i \neq j$) und mit $\langle \hat{E}_i^-(t) \rangle = 0$, ergibt sich die unnormierte Intensitätskorrelationsfunktion $G^{(2)}(\tau)$ zu

$$G^{(2)}(\tau) = N G_A^{(2)}(\tau) + N(N-1)[I_A^2 + |G_A^{(1)}(\tau)|^2], \tag{2.93}$$

wobei

$$I_A = \langle \hat{E}_i^- \hat{E}_i^\dagger \rangle \tag{2.94}$$

die Intensität und

$$\begin{aligned} G_A^{(1)}(\tau) &= \langle \hat{E}_i^-(\tau) \hat{E}_i^\dagger(0) \rangle \\ G_A^{(2)}(\tau) &= \langle \hat{E}_i^-(0) \hat{E}_i^-(\tau) \hat{E}_i^\dagger(\tau) \hat{E}_i^\dagger(0) \rangle \end{aligned} \tag{2.95}$$

die unnormierten Korrelationsfunktionen erster und zweiter Ordnung des elektrischen Feldes eines einzelnen Atoms sind. Die Intensitätskorrelationsfunktion, Gl. (2.93), setzt sich somit aus drei verschiedenen Beiträgen zusammen. Der erste Summand ist proportional zur Intensitätskorrelationsfunktion einzelner Atome $G_A^{(2)}(\tau)$. Jedes der $N$ Atome trägt in gleichem Maß zu diesem Signal bei, welches daher proportional zur Anzahl der Atome ($\sim N$) ist. Der zweite und dritte Term hingegen stammt vom Produkt der Korrelationsfunktionen zweier verschiedener Atome. Da $N(N-1)$ Atompaare existieren, kommen diese Terme $\sim N(N-1)$ mal vor.

Der zweite und dritte Term unterscheiden sich darin, wie die elektrischen Felder der beiden Atome zum Signal zum Zeitpunkt 0 und $\tau$ beitragen. Beim zweiten Term erzeugt ein Atom die Intensität zum Zeitpunkt 0 das andere die zum Zeitpunkt $\tau$, das Produkt ergibt $I_A^2$.



Der dritten Term hingegen entsteht aus

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \langle \hat{E}_i^-(0) \hat{E}_i^\dagger(\tau) \rangle \langle \hat{E}_j^-(\tau) \hat{E}_j^\dagger(0) \rangle. \tag{2.96}$$

Erst die Überlagerung der elektrischen Felder verschiedener Atome führt zu diesem Signal. Die Intensität zum Zeitpunkt 0 setzt sich zum Beispiel aus einem Produkt von $\hat{E}_i^-(0)$ und $\hat{E}_j^\dagger(0)$ zusammen, ebenso zum Zeitpunkt $\tau$. Da im Experiment die Intensitätskorrelationsfunktion über ein Hanbury-Brown & Twiss-Aufbau gemessen wird, wird die Intensität zum Zeitpunkt 0 auf dem Detektor $D_1$, die zum Zeitpunkt $\tau$ auf Detektor $D_2$ gemessen, also räumlich vollkommen getrennt. Auf den einzelnen Detektoren erzeugen die Atome also ein Heterodyn-Signal. Die Korrelation der Heterodyn-Signale auf den Detektoren führt zum Beitrag (2.96).

Klarer wird diese Aussage, wenn man klassische Felder betrachtet. Nimmt man an, dass sich das insgesamt emittierte elektrische Feld aus identischen Emittern mit statistisch verteilten Phasen zusammensetzt

$$E(t) = \sum_{i=1}^{N} E_i(t) = E_0 \sum_{i=1}^{N} e^{i\phi_i(t)}, \tag{2.97}$$

so ergibt sich die Intensität auf den einzelnen Detektoren zu

$$I(t) = |E(t)|^2 = N|E_0|^2 + |E_0|^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} e^{i(\phi_i(t) - \phi_j(t))} \approx N|E_0|^2. \tag{2.98}$$

Die Phase der Interferenzterme sind statistisch verteilt und löschen sich für sehr viele Atome gegenseitig aus, weshalb die gesamte Intensität einfach die Summe der Einzelintensitäten ist. Anders sieht das für Intensitätskorrelationen $I(0)I(\tau)$ aus. Nach

$$\begin{aligned} I(0)I(\tau) &= \left( N|E_0|^2 + |E_0|^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} e^{i(\phi_i(0) - \phi_j(0))} \right) \left( N|E_0|^2 + |E_0|^2 \sum_{\substack{k,l=1 \\ (k \neq l)}}^{N} e^{i(\phi_k(\tau) - \phi_l(\tau))} \right) \\ &\approx N^2|E_0|^4 + |E_0|^4 \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} e^{i((\phi_i(0) - \phi_i(\tau)) - (\phi_j(0) - \phi_j(\tau)))} \\ &= N^2 I_A^2 + N(N-1)|G_A^{(1)}(\tau)|^2 \end{aligned} \tag{2.99}$$

führt gerade das Produkt der Interferenzterme auf den einzelnen Detektoren durch konstruktive und destruktive Interferenz zum zusätzlichen dritten Term der Intensitätskorrelation. Wenn die elektrischen Felder zweier Atome auf dem einen Detektor konstruktiv interferieren, dann ist die Interferenz auf dem zweiten Detektor zur selben Zeit automatisch auch konstruktiv. Dasselbe gilt für destruktive Interferenz. Dadurch fluktuieren die Signale der beiden Detektoren in Phase, vgl. Abb. 2.11. Außerhalb der Kohärenzzeit ($\tau > \tau_C$) des Lichtes sind die beitragenden Phasen hingegen vollständig unkorreliert. Der zusätzlich Term verschwindet und das Korrelationssignal geht auf das Produkt der gemittelten Einzelintensitäten $\lim_{\tau \to \infty} I(0)I(\tau) = N^2 I_A^2$ zurück.

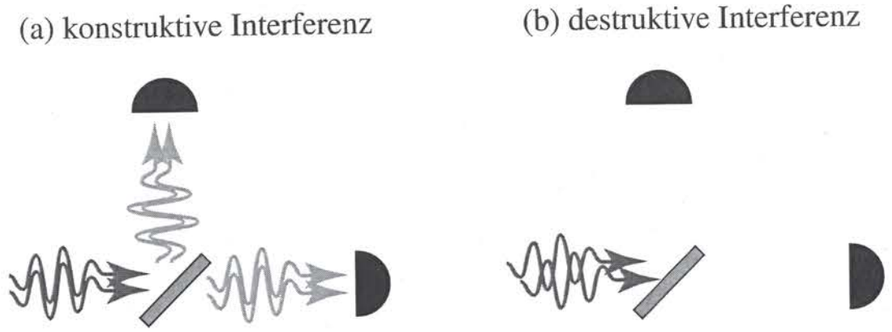



**Abbildung 2.11:** Einfaches Bild zur Erklärung des Bunching-Maximums. **(a)** Bei konstruktiver Interferenz messen beide Detektoren gleichzeitig ein Signal, **(b)** bei destruktiver Interferenz entsprechend beide kein Signal. Die Signale der beiden Detektoren sind wegen dieser Interferenzeffekte korreliert.

Gehen wir zurück zur quantenmechanischen Betrachtung. Im Experiment wird die normierte Intensitätskorrelationsfunktion bestimmt. Um die quantenmechanische Intensitätskorrelationsfunktion Gl. (2.93) direkt vergleichen zu können, muss sie auf die mittlere Intensität normiert werden

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{G_A^{(2)}(\tau)}{|G_A^{(1)}(\tau)|^2} = \frac{g_A^{(2)}(\tau)}{N} + (1 - \frac{1}{N})[1 + |g_A^{(1)}(\tau)|^2]. \tag{2.100}$$

Sie zeigt dieselben drei Beiträge wie die nicht-normierte Intensitätskorrelationsfunktion Gl. (2.93). Wie verhält sich diese Funktion $g^{(2)}(\tau)$ für $\tau = 0$? Da einzelne Atome bei normaler Resonanzfluoreszenz nicht gleichzeitig zwei Photonen emittieren können, ist die Intensitätskorrelationsfunktion einzelner Atome zum Zeitpunkt Null $g_A^{(2)}(0) = 0$. Weiterhin ist definitionsgemäß $|g_A^{(1)}(0)|^2 = 1$, wodurch sich für die gesamte Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(0) = 2 - 2/N$ ergibt. Erhöht man schrittweise die Atomzahl, so erwartet man bei $N = 2$ einen Übergang von nicht-klassischem ($g^{(2)}(0) < 1$) zu klassischem ($g^{(2)}(0) > 1$) Licht.

Im Experiment fluktuiert die Atomzahl fortlaufend, sollte jedoch im Mittel poissonverteilt sein. Berechnet man die normierte Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(\tau)$ für diese Verteilung, so ergibt sich

$$\overline{g^{(2)}}(\tau) = \frac{\overline{G_A^{(2)}}(\tau)}{\overline{|G_A^{(1)}(\tau)|^2}} = \frac{g_A^{(2)}(\tau)}{\bar{N}} + 1 + |g_A^{(1)}(\tau)|^2. \tag{2.101}$$

Im Unterschied zum Ausdruck für feste Atomzahl, vgl. Gl. (2.100), wachsen der zweite und dritte Term nicht mehr mit $(1 - 1/N)$ an, sondern liefern unabhängig von $N$ einen konstanten Beitrag. Dadurch bleibt die Intensitätskorrelationsfunktion für $\tau = 0$ und $g_A^{(2)}(0) = 0$ konstant bei $\overline{g^{(2)}}(0) = 2$. Der konstante Wert spiegelt die Poissonverteilung der Atomzahl wieder. Auch wenn ein emittierendes Atom kein weiteres Photon liefern kann, so kann gleichzeitig ein weiteres Atom vorhanden sein. Dieses emittiert genauso wahrscheinlich Photonen wie das erste Atom.

Die Poissonverteilung der Atome kommt jedoch dadurch zustande, dass die Atome durch das beobachtete Volumen fallen. Durch die begrenzte Wechselwirkungszeit können die Korrelationsfunktionen der einzelnen Atome nicht beliebig lange beobachtet werden. Sie müssen daher jeweils mit einer Korrekturfunktion $f(\tau)$ multipliziert werden, für die gilt $f(0) = 1$ und $\lim_{\tau\to\infty} f(\tau) = 0$ [75]. Für poissonverteilte Atome ergibt sich



$$\overline{g^{(2)}}(\tau) = f(\tau)\frac{g_A^{(2)}(\tau)}{\bar{N}} + 1 + f(\tau)^2|g_A^{(1)}(\tau)|^2. \tag{2.102}$$

Was lässt sich nun aus dieser Betrachtung für das Experiment ableiten? Unter der Voraussetzung, dass die Atome tatsächlich unabhängig strahlen, kann im Experiment die Intensitätskorrelationsfunktion in die drei verschiedenen Beiträge zerlegt werden, die jeweils unterschiedlich von der Atomzahl abhängen. Da für die Intensitätskorrelationsfunktion eines einzelnen Atoms $\lim_{\tau\to\infty} g_A^{(2)}(\tau) = 1$ erfüllt sein muss, lässt sich aus der Amplitude des ersten Beitrags direkt die mittlere Anzahl an Atomen im Resonator bestimmen. Mit diese Methode lässt sich daher die Rate an Atomen eichen.

Des Weiteren können über den Beitrag $|g_A^{(1)}(\tau)|^2$ Aussagen über die Kohärenzeigenschaften des Lichts getroffen werden. Die Kohärenzzeit $\tau_c$ kann als 1/e-Abfall von $|g_A^{(1)}(\tau)|$ definiert werden. Außerdem besteht über das Wiener-Khintchine-Theorem eine direkte Beziehung zwischen der Korrelationsfunktion $g^{(1)}(\tau)$ und dem Leistungsspektrum des emittierten Lichts $S(\nu)$

$$S(\nu) \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, g^{(1)}(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}. \tag{2.103}$$

Für unterschiedliche Emissionsspektren ergeben sich daraus charakteristische Funktionen für $|g_A^{(1)}(\tau)|^2$. Für ein lorentzförmiges Emissionsspektrum

$$S(\nu) \sim \frac{1}{1 + (2\pi\nu\tau_c)^2} \tag{2.104}$$

mit Breite $\Delta\nu_{\text{FWHM}} = \frac{1}{\pi\tau_c}$ ergibt sich

$$|g^{(1)}(\tau)|^2 = e^{-2\frac{\tau}{\tau_c}}. \tag{2.105}$$

Zum Beispiel sollte ein Atom, das genau mit dem lorentzförmigen Spektrum des optischen Resonators mit Breite $\Delta\nu_{\text{FWHM}} = 2{,}5\,\text{MHz}$ emittiert, zu einem mit $\tau_c = 127\,\text{ns}$ ($1/e^2$) exponentiell abfallenden Bunching-Maximum führen. Für ein gaußförmiges Emissionsspektrum

$$S(\nu) \sim e^{-(\pi\nu\tau_c)^2} \tag{2.106}$$

mit Breite $\Delta\nu_{\text{FWHM}} = \frac{2}{\pi\tau_c}\sqrt{\ln 2}$ ergibt sich

$$|g^{(1)}(\tau)|^2 = e^{-2(\tau/\tau_c)^2}, \tag{2.107}$$

also wiederum eine Gaußfunktion für die Korrelationsfunktion erster Ordnung.

Das Bunching-Maximum muss für unabhängige Emitter nicht immer sichtbar bleiben. Berücksichtigt man zusätzlich, dass das Licht nicht perfekt räumlich kohärent sein muss, so erhält

man die modifizierten Intensitätskorrelationsfunktionen

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{g_A^{(2)}(\tau)}{N} + (1 - \frac{1}{N})[1 + |g_A^{(1)}(\tau)|^2 h(A)], \quad \text{,für festes } N$$
$$\overline{g^{(2)}}(\tau) = \frac{g_A^{(2)}(\tau)}{\bar{N}} + 1 + |g_A^{(1)}(\tau)|^2 h(A) \quad \text{,für poissonverteiltes } \bar{N}, \tag{2.108}$$

wobei $h(A)$ ein Faktor für die räumlichen Kohärenz ist, der, wenn die Detektorfläche $A$ kleiner als die Kohärenzfläche $A_C$ ist, etwa gleich Eins ist und für $A > A_C$ mit $1/A$ gegen Null geht. Ohne räumliche Kohärenz verschwindet der Term $|g_A^{(1)}(\tau)|^2 h(A)$ vollkommen und damit das Bunching des Lichts, da die verschiedenen Emitter nicht mehr homogen auf der gesamten Detektorfläche konstruktiv oder destruktiv interferieren. Unabhängig von $N$ kann daher nichtklassisches Licht beobachtet werden. Bei fester Atomzahl mit $g_A^{(2)}(0) = 0$ ist $g^{(2)}(0) = 1 - 1/N$ (im Gegensatz zu $2 - 2/N$ bei räumlicher Kohärenz). Dieses Verhalten wurde in der Resonanzfluoreszenz mehrerer inkohärent strahlender Ionen beobachtet [76]. Bei der statistisch fluktuierenden Atomzahl eines Atomstrahls ist hier $\overline{g^{(2)}}(0) = 1$ (für $g_A^{(2)}(0) = 0$). Trotzdem verletzt das Licht die Schwarz'sche Ungleichung $g^{(2)}(0) \geq g^{(2)}(\tau)$, wie bereits 1977 von H.J. Kimble et al. [77] demonstriert wurde, da der Beitrag $g_A^{(2)}(\tau)$ für $0 < \tau < \infty$ anwächst.

Bereits früher wurde neben dem nicht-klassischen Licht mit $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$ klassisches Licht mit $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$ [78, 79] in der Resonanzfluoreszenz vieler Atome beobachtet, nicht jedoch der Übergang zwischen diesen beiden Bereichen in Abhängigkeit der Zahl der Emitter innerhalb eines Aufbaus. Der Grund dafür ist, dass man, um die nicht-klassische Photonenstatistik des Lichts einzelner Emitter nachzuweisen, eine hohe Nachweiseffizienz der emittierten Photonen benötigt. Man muss daher Photonen aus einem großen Raumwinkel auf den Detektor lenken. Das Licht vieler Emitter die etwas räumlich voneinander entfernt sind, kann durch einen solchen Aufbau nicht kohärent auf dem Detektor abgebildet werden [80]. Daher kann der Übergang zur klassischen Photonenstatistik durch die Interferenzen der verschiedenen Emitter nicht beobachtet werden.

Im Gegensatz zum freien Raum wird bei der Kopplung der Atome an eine einzelne Resonatormode nur die Statistik dieser Lichtmode gemessen. Die räumliche Kohärenz ist somit automatisch erfüllt. Zudem emittieren die Atome bei starker Kopplung durch erhöhte spontane Emission, vgl. Kapitel 2.2.1, bevorzugt in die Resonatormode, wodurch gleichzeitig eine hohe Detektionseffizienz gewährleistet ist. Daher kann man mit einem solchen Aufbau perfekt den Übergang zwischen klassischem und nicht-klassischem Licht beobachten. Jedoch können die Atome durch Absorption und stimulierte Emission innerhalb des Resonators miteinander wechselwirken, wodurch die Photonenstatistik stark beeinflusst werden kann. Um qualitativ zu verstehen, wie Absorption und stimulierte Emission innerhalb des Resonators die Photonenstatistik beeinflussen, wird im nächsten Kapitel ein Ratenmodell für $N$ Atome im Resonator diskutiert.

### 2.3.4 Ratenmodell eines $N$-Atom-Resonator-Systems

Bereits seit langem ist bekannt, dass ein Laser unterhalb seiner Schwelle chaotisches Licht mit $g^{(2)}(0) = 2$ emittiert, siehe z.B. [81, Kap.11]. Oberhalb der Laserschwelle hingegen erzeugt er durch einen lawinenartigen Anstieg der stimulierten Emission kohärentes Licht mit $g^{(2)}(0) = 1$.



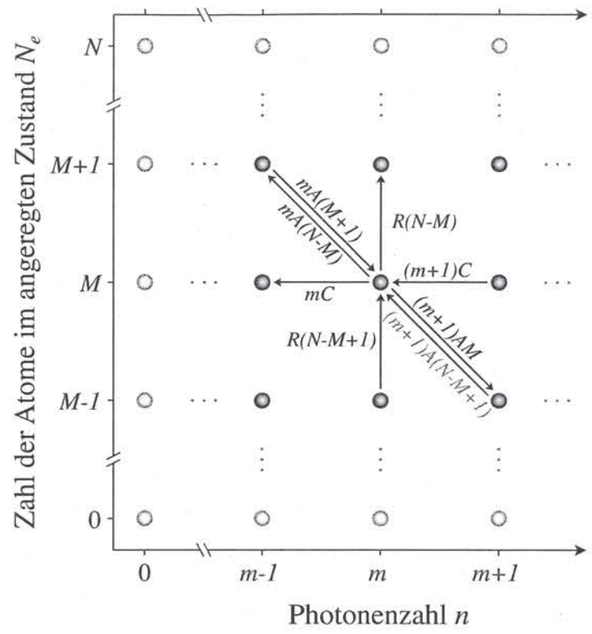



**Abbildung 2.12:** Ratenmodell eines $N$-Atom-Lasers. Jeder Punkt repräsentiert einen Zustand, in dem sich $N_e$ Atome im angeregten Zustand und $n$ Photonen im Resonator befinden. Die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands beträgt $P_{n,N_e}$. Von den $N$ zwei-Niveau-Atomen befinden sich $N_g$ im Grundzustand $|g\rangle$ und $N_e$ im angeregtem Zustand $|e\rangle$ mit $N = N_e + N_g$. Aus dem Grundzustand werden sie über die Rate $R$ in den angeregten Zustand gepumpt, die Photonen des Resonators zerfallen mit der Rate $C$ und über die Rate $A$ wird durch spontane und stimulierte Emission und durch Absorption Energie zwischen dem Lichtfeld des Resonators und den Atomen ausgetauscht.

Die Atome strahlen kollektiv in die Resonatormode. Die klassischen Lasermodelle gehen von einer sehr großen Zahl von Atomen aus, wobei die Atome und das Lichtfeld entkoppelt sind. Korrelationen zwischen einzelnen Atomen und der Anzahl an Photonen im Resonator können hierbei nicht auftreten. Die Rückwirkung des Messprozesses auf den Atomzustand wird jedoch üblicherweise verwendet, um nicht-klassisches Antibunching des von einzelnen Atomen emittierten Lichts zu erklären [82]. Daher muss ein Modell verwendet werden, in dem diese Korrelationen nicht vernachlässigt werden.

P. R. Rice und H. J. Carmichael verwenden ein einfaches Ratenmodell eines Lasers („birth-death model") [83], um dessen Photonenstatistik zu beschreiben. Dieses Modell lässt sich so modifizieren, dass damit die Photonenstatistik einer Resonatormode berechnet werden kann, die mit einer festen Zahl von $N$ 2-Niveau-Atomen wechselwirkt. Das Schema dieses Ratenmodells ist in Abbildung 2.12 dargestellt. Jedes der $N$ Atome kann sich entweder im Grundzustand $|g\rangle$ oder im angeregten Zustand $|e\rangle$ aufhalten. Die verschiedenen Zustände des Gesamtsystems werden nur durch die Anzahl der Atome im angeregten Zustand $N_e$ und die Anzahl der Photonen im Resonator $n$ unterschieden. Da die Gesamtzahl der Atome $N$ konstant ist, ergibt sich

für die Anzahl der Atome im Grundzustand $N_g = N - N_e$. Die Zustände des Gesamtsystems $|n, N_e, N_g\rangle$ bilden eine Matrix mit den Besetzungswahrscheinlichkeiten $P_{n,N_e}$ mit $N_e \in [0, N]$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Zwischen den einzelnen Zuständen führen Emission und Absorption der Atome, das externe Pumpen der Atome aus dem Grundzustand in den angeregten Zustand, sowie Verluste des Resonators zu Übergängen. Die Emissionsrate von $|m, M, N-M\rangle$ nach $|m+1, M-1, N-M+1\rangle$ setzt sich dabei aus zwei Beiträgen zusammen: der spontanen Emission der $M$ angeregten Atome mit der Rate $AM$ und der durch $m$ Photonen stimulierten Emission mit der Rate $mAM$. Die Absorption der $m$ Photonen im Resonator durch eines der $N-M$ Atome im Grundzustand auf dem Übergang $|m, M, N-M\rangle \rightarrow |m-1, M+1, N-M-1\rangle$ erfolgt mit der Rate $mA(N-M)$. Mit dem Pumpprozess wird eines der $N-M$ Atome im Grundzustand mit der Rate $R$ in den angeregten Zustand überführt, wodurch sich die Pumprate $R(N-M)$ für den Übergang von $|m, M, N-M\rangle$ nach $|m, M+1, N-M-1\rangle$ ergibt. Zuletzt kann eines der $m$ Photonen im Resonator verloren gehen, was zur Übergangsrate $mC$ von $|m, M, N-M\rangle$ nach $|m-1, M, N-M\rangle$ führt. Insgesamt ergibt sich folgende Ratengleichung für den Zustand $|m, M, N-M\rangle$

$$\begin{aligned}
\dot{P}_{m,M} = &- mA(N-M) \quad P_{m,M} + mA(M+1) \quad P_{m-1,M+1} \\
&- (m+1)AM \quad P_{m,M} + (m+1)A(N-M+1) \quad P_{m+1,M-1} \\
&- R(N-M) \quad P_{m,M} + R(N-M+1) \quad P_{m,M-1} \\
&- Cm \quad P_{m,M} + C(m+1) \quad P_{m+1,M}.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Für den stationären Fall, d.h. für $\dot{P}_{m,M} = 0$, lassen sich die einzelnen Besetzungswahrscheinlichkeiten $P_{m,M}$ für ein in der Photonenzahl begrenztes System ($n \in [0, n_{max}]$) numerisch berechnen. Mit Hilfe der stationären Besetzungswahrscheinlichkeiten können das erste ($\bar{n}$) und zweite Moment ($\overline{n^2}$) der Photonenstatistik bestimmt werden und daraus mit Gl. (2.79) die Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$.

Die Parameter sollen zunächst so gewählt werden, dass das Verhalten möglichst dem unabhängiger Emitter entspricht. Für geringe Emissions- und Absorptionsrate $A$ ist die Wechselwirkung jedes einzelnen Atoms mit der Resonatormode gering. Insofern sollte die Wechselwirkung der Atome untereinander vernachlässigbar klein sein. Zudem muss jedes einzelne Atom, nachdem es ein Photon an die Resonatormode abgegeben hat, erst wieder in den angeregten Zustand zurückgepumpt werden, bevor es ein zweites Photon emittieren kann. Für eine geringe Rückpumprate $R$ ist daher gewährleistet, dass jedes Atom nicht mehr als ein Photon zum momentanen Lichtfeld beiträgt. In Abb. 2.13 (a) ist die Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ in Abhängigkeit der Atomzahl für einen solchen Parametersatz dargestellt. Das Verhalten entspricht sehr gut dem theoretischen Verlauf $g^{(2)}(0) = 2 - 2/N$ *räumlich kohärenter, unabhängig strahlender Atome* des letzten Kapitels. Man sollte daher auch innerhalb eines Resonators den Übergang von nicht-klassischem Antibunching ($g^{(2)}(0) < 1$) zu klassischem Bunching ($g^{(2)}(0) > 1$) bei $N \approx 2$ beobachten können.

Die Frage bleibt offen, inwiefern stimulierte Emission und Reabsorption die Photonenstatistik beeinflussen. Im Ratenmodell kann man diese Prozesse gezielt entfernen. In Gl. (2.109) verschwinden dann die beiden Absorptionsterme $-mA(N-M)P_{m,M}$ und $(m+1)A(N-M+1)P_{m+1,M-1}$ vollständig. Außerdem werden beim ersten Emissionsterm $-(m+1)AMP_{m,M}$ der Anteil der stimulierten Emission $-mAMP_{m,M}$, sowie beim zweiten Emissionsterm $mA(M+1)P_{m-1,M+1}$ der stimulierte Beitrag $(m-1)A(M+1)P_{m-1,M+1}$



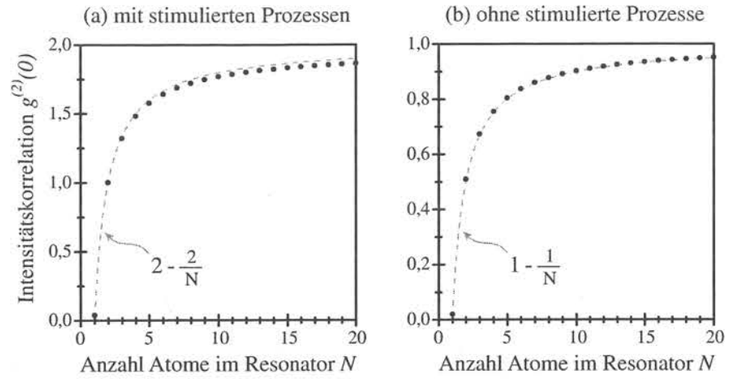



**Abbildung 2.13:** Vergleich der Photonenstatistik des N-Atom-Resonator-Systems für sehr geringe Raten $R$ und $A$ ($R/C = 0{,}01$ und $A/C = 0{,}01$) mit den theoretischen Funktionen unabhängig strahlender Atome. **(a)** Die Photonenstatistik des Lasersystems mit stimulierten Prozessen stimmt sehr gut mit der Funktion $(2-2/N)$, die für $N$ unabhängig strahlende, räumlich kohärente Atome erwartet wird, überein. **(b)** Ohne stimulierte Prozesse passt hingegen die Funktion $(1-1/N)$ für nicht kohärente, unabhängig strahlende Atome.

entfernt. Die Pumpterme und die Terme des Resonatorzerfalls bleiben unberührt. Daraus ergibt sich für $P_{m,M}$ die Ratengleichung

$$\begin{aligned}
\dot{P}_{m,M} = &- AM \quad P_{m,M} + A(M+1) \quad P_{m-1,M+1} \\
&- R(N-M) \quad P_{m,M} + R(N-M+1) \quad P_{m,M-1} \\
&- Cm \quad P_{m,M} + C(m+1) \quad P_{m+1,M}.
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Abb. 2.13 (b) zeigt die resultierende Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ für dieselben Parameter wie in (a), jedoch ohne stimulierte Prozesse. Offensichtlich ergibt sich unabhängig von der Atomzahl Antibunching, das sehr gut dem Verhalten von $N$ *unabhängig strahlenden, nicht räumlich kohärenten Emittern* $g^{(2)}(0) = 1 - 1/N$ folgt. Das Bunching des Lichts wird also nur mit stimulierten Prozessen beobachtet. Dies lässt sich folgendermaßen erklären: Bunching bedeutet, wenn sich bereits ein Photon im Resonator befindet, ist mit größerer Wahrscheinlichkeit ein weiteres darin zu finden. Hat ein Atom ein Photon an den Resonator abgegeben, so kann dieses ein zweites Atom stimulieren, gleichzeitig ein Photon in den Resonator zu emittieren. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit zweier Photonen erhöht. Andererseits kann das Photon auch vom zweiten Atom absorbiert werden, wodurch entsprechend die Wahrscheinlichkeit, kein Photon im Resonator zu finden, größer wird. Die Zahl der Photonen fluktuiert daher stärker um den Mittelwert.

Dies entspricht der Erklärung für unabhängig strahlende Emitter, wo konstruktive und destruktive Interferenz ebenfalls zu stärkeren Fluktuationen der Intensität und damit zum Bunching führen. Die Analogie der Effekte wird offensichtlich, wenn man berücksichtigt, dass man stimulierte Emission auch als konstruktive Interferenz und Absorption als destruktive Interferenz der emittierten Photonen auffassen kann, siehe z.B. [81, Kap. 5.6].

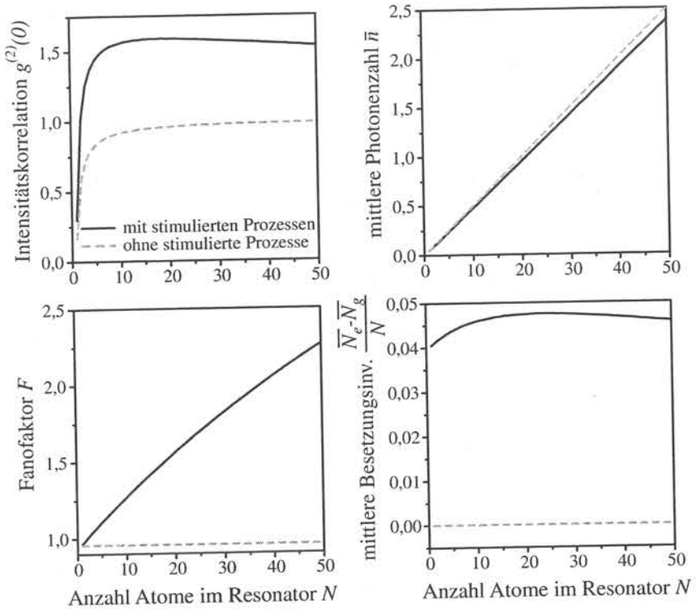



**Abbildung 2.14:** Photonenstatistik des N-Atom-Resonator-Systems mit und ohne stimulierten Prozessen bei etwas höherer Kopplungsrate $A$ und Rückpumprate $R$ ($A/C = 0{,}1$ und $R/C = 0{,}1$) vergleichbar den experimentell möglichen Parametern. Durch die geringe Rückpumprate ist das System nur geringfügig invertiert, mit stimulierten Prozessen wird daher im dargestellten Bereich keine Laserschwelle erreicht. Wie für kleinere Kopplungsrate $A$ beobachtet man für $N \approx 2$ den Übergang von Antibunching zu Bunching. Das Bunching bleibt jedoch unter $g^{(2)}(0) = 1,6$ und fällt für $N \geq 20$ wieder ab. Ohne stimulierte Prozesse beobachtet man auch hier ausschließlich Antibunching.

Es gibt jedoch einen wichtigen Unterschied zwischen der Interferenz und den stimulierten Prozessen. Bei unabhängigen Emittern ist konstruktive und destruktive Interferenz immer gleich wahrscheinlich. Innerhalb eines Resonators können hingegen nur Atome im Grundzustand Photonen absorbieren und Atome im angeregten Zustand Photonen stimuliert emittieren. Sind die Atome hauptsächlich im Grundzustand, so wird ein spontan emittiertes Photon schnell wieder von anderen Atomen absorbiert. Umgekehrt kann es bei invertierten Atomen durch stimulierte Emission lawinenartig verstärkt werden. Diese kollektiven Effekte können zu einer vollkommen anderen Photonenstatistik führen. Sie sind umso wahrscheinlicher, je größer die Wechselwirkung zwischen Atom und Resonator ist. Erhöht man die Rate $A$ um eine Größenordnung, so zeigen sich schon signifikant Abweichungen von der Theorie unabhängiger Emitter, siehe Abb. 2.14. Die Intensitätskorrelationsfunktion mit stimulierten Prozessen steigt nicht mehr über 1,6 und fällt für $N > 20$ sogar wieder ab. Da die Rückpumprate hier verhältnismäßig klein ist, ist das System kaum invertiert, so dass stimulierte Emission und Absorption sich noch die Waage halten.

Ein ganz anderes Verhalten zeigt sich hingegen, wenn man die Rückpumprate weiter erhöht, siehe Abb. 2.15. Das System wird stark invertiert. Selbst ein einzelnes Atom wird durch



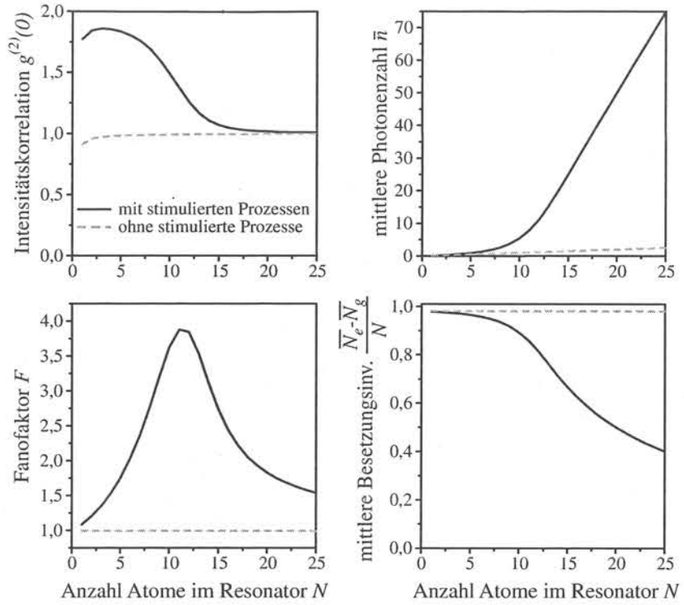



**Abbildung 2.15:** Photonenstatistik des N-Atom-Resonator-Systems mit und ohne stimulierten Prozessen bei hoher Rückpumprate ($R/C = 10$ und $A/C = 0{,}1$). Mit stimulierten Prozessen ergibt sich für $N < 10$ ein Bunching mit $g^{(2)}(0) > 1$. Bei $N \approx 10$ erreicht man die Laserschwelle des Systems. Die Photonenstatistik wird kohärenter $g^{(2)}(0) \to 1$, der Fano-Faktor durchläuft ein Maximum, die Anzahl der Photonen steigt sprunghaft an und die Besetzungsinversion geht durch Sättigung der Atome zurück. Ohne stimulierte Prozesse erreicht man hingegen keine Laserschwelle und beobachtet immer nicht-klassisches Licht mit $g^{(2)}(0) < 1$.

die hohe Rückpumprate sofort wieder in den angeregten Zustand zurückbefördert, so dass es, bevor der Resonator zerfällt, ein zweites Photon erzeugen kann. Das System zeigt daher für $N = 1$ statt Antibunching Bunching. Die Wahrscheinlichkeit eines Resonatorverlustes ist jedoch größer, als durch stimulierte Emission weitere Photonen zu erzeugen. Daher befindet sich das System trotz Inversion unterhalb der Laserschwelle. Erhöht man die Atomzahl, so ist für $N = 10$ die Verstärkung bei perfekter Inversion $NA$ gleich den Resonatorverlusten $C$. Das System beginnt zu lasen. Das Licht wird kohärenter $g^{(2)}(0) \to 1$ und die Anzahl der emittierten Photonen steigt sprunghaft an. Oft wird zur Definition der Laserschwelle das Maximum des Fano-Faktors $F$ verwendet [83], das ebenfalls für $N = 10$ erreicht wird. Gleichzeitig wird die Besetzungsinversion abgebaut, weil durch die stimulierten Prozesse die Atome kollektiv in den Resonator emittieren, wodurch die Pumprate nicht mehr genügt, das System vollständig invertiert zu halten.

Ohne stimulierte Prozesse zeigt sich auch hier nur Antibunching. Aufgrund der starken Rückpumprate ist $g^{(2)}(0)$ bereits für ein einzelnes Atom nahe Eins, lässt sich aber mit $g_A^{(2)}(0) = 0{,}9$ sehr gut mit dem Modell unabhängig strahlender, inkohärenter Emitter beschreiben. Die stimulierten Prozesse sind folglich sowohl für das Bunching unterhalb der Laser-

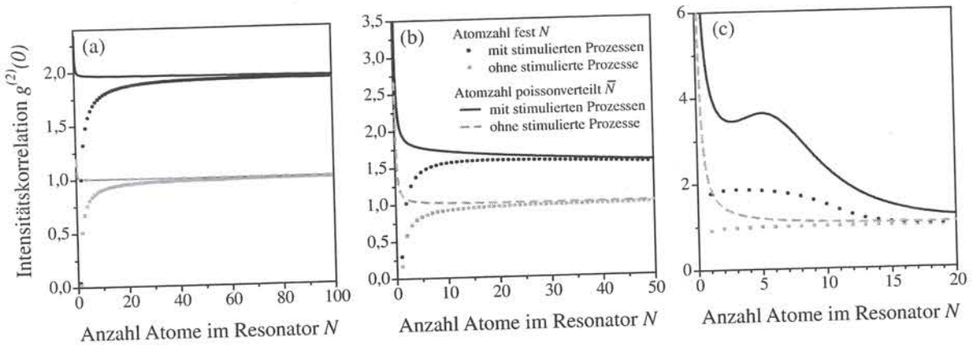



**Abbildung 2.16:** Intensitätskorrelationsfunktionen $g^{(2)}(0)$ für poissonverteilte Atomzahl $\bar{N}$ im Vergleich zu fester Atomzahl $N$. **(a)** Bei geringer Kopplungsrate $A$ und Rückpumprate $R$ ($R/C = 0{,}01$ und $A/C = 0{,}01$) bleibt $g^{(2)}(0)$ in guter Näherung konstant bei 2 (1 ohne stimulierte Prozesse). **(b)** Erhöht man die Raten um eine Größenordnung ($R/C = 0{,}1$ und $A/C = 0{,}1$) so weicht die Photonenstatistik signifikant vom konstanten Verhalten ab. Man beobachtet superchaotisches Licht mit $g^{(2)}(0) > 2$ für $\bar{N} \to 0$. **(c)** Bei starker Rückpumprate $R$ ($R/C = 10$ und $A/C = 0{,}1$) ergibt sich sogar ein zusätzliches Maximum für $\bar{N} \approx 5$.

schwelle, wie auch für die kollektive Emission oberhalb der Laserschwelle verantwortlich.

Im Experiment wird ein Atomstrahl verwendet, daher muss das Ratenmodell auf eine fluktuierende Atomzahl erweitert werden. Zu einem Zeitpunkt $t$ befindet sich immer eine genau definierte Anzahl Atome im Resonator. Nimmt man nun an, dass sich der stationäre Zustand schneller einstellt, als sich die Anzahl der Atome verändert, so kann man die Photonenstatistik über die Verteilung der Atomzahl mitteln

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_N P(N)\bar{n}(N) \\ \overline{n^2} &= \sum_N P(N)\overline{n^2}(N). \end{aligned} \tag{2.111}$$

Für ein poissonverteilte Atomzahl ergibt sich mit Gl. (2.79) die in Abb. 2.16 dargestellten Intensitätskorrelationsfunktionen. Bei niedriger Kopplungsrate $A$ und Rückpumprate $R$ folgt $g^{(2)}(0)$ gut dem theoretischen Verlauf unabhängig strahlender Emitter von $g^{(2)}(0) = 2$, vgl. 2.16(a). Der Anstieg für $\bar{N} \to 0$ lässt sich durch ein nicht perfektes Antibunching der einzelnen Atome $g_A^{(2)}(0) \approx 0{,}04$ erklären, das auch bei unabhängig strahlenden Emittern zu einem Verhalten $g^{(2)}(0) = g_A^{(2)}(0)/\bar{N} + 2$ führt. Da die einzelnen Atome nach einer ersten Photonenemission schnell genug zurückgepumpt werden, um ein weiteres Photon zu erzeugen, bevor das erste Photon den Resonator verlässt, weicht für höhere Rückpumpraten $R$ die Photonenstatistik der einzelnen Atome immer weiter vom perfekten Antibunching mit $g_A^{(2)}(0) = 0$ ab. Dadurch entsteht für $\bar{N} \to 0$ superchaotisches Licht mit $g^{(2)}(0) > 2$, das jedoch nur durch die Photonenstatistik der Einzelemitter, nicht durch kollektive Effekte mehrerer Atome verursacht wird. Insofern beschreibt das Modell unabhängig strahlende Atome für geringe Kopplungsraten $A$ gut die Statistik des emittierten Lichts. Abweichungen treten jedoch auch bei fluktuierender Atomzahl für



höhere Kopplungsraten auf. Durch die kollektiven Effekte fällt die Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ unter 2. Bei gleichzeitig hoher Rückpumprate wird auch bei fluktuierender Atomzahl eine Laserschwelle beobachtet, oberhalb der kohärentes Licht mit $g^{(2)}(0) \to 1$ erzeugt wird.

### 2.3.5 Effektives Zwei-Niveau-System

Das im Experiment verwendete $\Lambda$-System kann stark vereinfacht auch als effektives Zwei-Niveau-System betrachtet werden. Insofern kann das Ratenmodell des letzten Kapitels auch für unser System verwendet werden. Die beiden beitragenden Niveaus sind die Grundzustände $|u\rangle$ und $|g\rangle$. Der Ramanprozess koppelt diese beiden Zustände, wobei beim Übergang von $|u\rangle$ nach $|g\rangle$ ein Photon in den Resonator emittiert, bzw. von $|g\rangle$ nach $|u\rangle$ aus dem Resonator absorbiert wird. Der Rückpumplaser pumpt die Atome von $|g\rangle$ nach $|u\rangle$ zurück. Da der Rückpumpprozess immer eine spontane Emission des angeregten Zustands erfordert, kann er als inkohärenter Prozess mit der Rückpumprate $R$ beschrieben werden. Dieses Zwei-Niveau-System soll nun im folgenden in einzelnen Schritten näherungsweise abgeleitet werden. Ausgehend vom Hamiltonoperator $\hat{H}_\Lambda$ des Drei-Niveau-Systems mit Rückpumplaser im mitrotierten Bezugssystem, vgl. Abb. 2.17(a),

$$\frac{\hat{H}_\Lambda}{\hbar} = \Delta\hat{a}^\dagger\hat{a} + \Delta\hat{\sigma}_{uu} + \frac{\Omega_R}{2}(\hat{\sigma}_{eg} + \hat{\sigma}_{ge}) + \frac{\Omega_P}{2}(\hat{\sigma}_{eu} + \hat{\sigma}_{ue}) + g(\hat{\sigma}_{eg}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ge}) \tag{2.112}$$

kann für schwache Kopplung von Pumplaser und Resonator ($\Omega_P/\Delta, g/\Delta$) $\ll 1$ durch eine unitäre Transformation $\hat{U}$

$$\hat{U} = e^{\hat{S}} \qquad \text{mit} \qquad \hat{S} = \frac{\Omega_P}{2\Delta}(\hat{\sigma}_{eu} - \hat{\sigma}_{ue}) + \frac{g}{\Delta}(\hat{\sigma}_{eg}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ge}) \tag{2.113}$$

ein effektiver Hamiltonoperator $\hat{H}'_\Lambda$ bestimmt werden

$$\hat{H}'_\Lambda = \hat{U}\hat{H}_\Lambda\hat{U}^\dagger, \tag{2.114}$$

der anstelle der einzelnen Kopplungen zu Pumplaser und Resonator eine effektive Ramankopplung enthält, siehe z.B. [84]. Mit Hilfe der Relation

$$\hat{H}'_\Lambda = \hat{H}_\Lambda + [\hat{S}, \hat{H}_\Lambda] + \frac{1}{2}[\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}_\Lambda]] + \ldots \tag{2.115}$$

kann dieser transformierte Hamiltonoperator bis zur Ordnung $1/\Delta$ berechnet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\hat{H}'_\Lambda}{\hbar} = \Delta\hat{a}^\dagger\hat{a} + \Delta\hat{\sigma}_{uu} &+ \underbrace{\frac{\Omega_R}{2}(\hat{\sigma}_{eg} + \hat{\sigma}_{ge})}_{\text{Rückpumpen}} + \underbrace{\frac{g\Omega_P}{2\Delta}(\hat{\sigma}_{ug}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{gu})}_{\text{effektive Ramankopplung}} \\ &+ \underbrace{\frac{g\Omega_R}{2\Delta}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_{gg} - \hat{\sigma}_{ee})}_{\text{Streuung des Rückpumplasers}} + \underbrace{\frac{\Omega_R\Omega_P}{4\Delta}(\hat{\sigma}_{ug} + \hat{\sigma}_{gu})}_{\text{Raman mit Rückpumplaser}} \\ &+ \underbrace{\frac{\Omega_P^2}{4\Delta}(\hat{\sigma}_{uu} - \hat{\sigma}_{ee}) + \frac{g^2}{\Delta}[(\hat{\sigma}_{gg} - \hat{\sigma}_{ee})\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{\sigma}_{ee}]}_{\text{dynamische Starkverschiebung}} + \mathcal{O}(\frac{1}{\Delta^2}). \end{aligned} \tag{2.116}$$

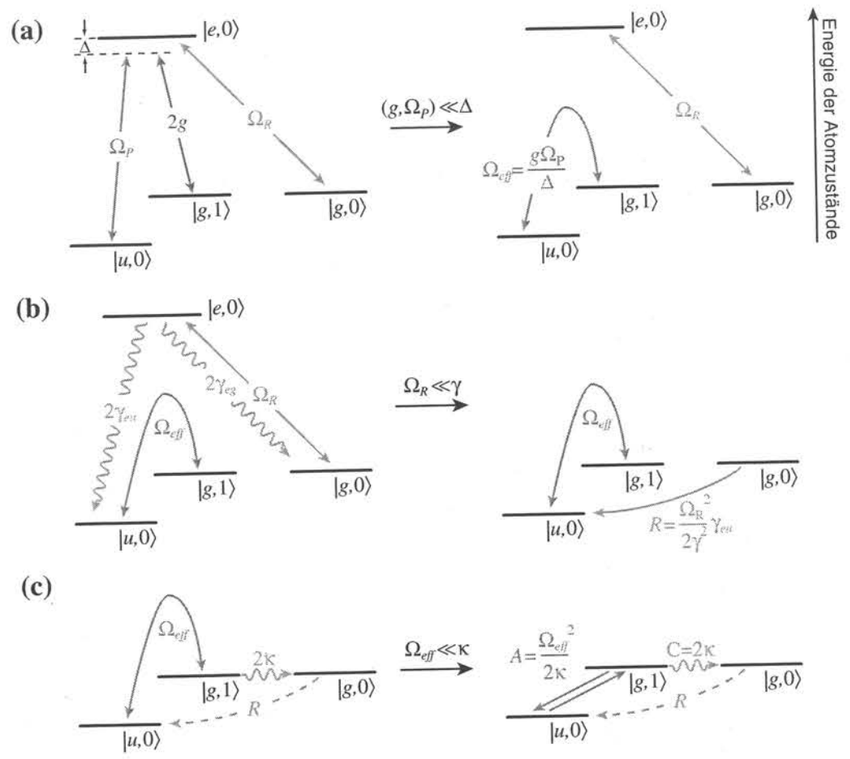



**Abbildung 2.17:** Umwandlung des Λ-Systems in ein effektives Zwei-Niveau-System.

Die verschiedenen Beiträge tragen nur zum beobachteten Signal bei, wenn sie resonant sind. Hier wird angenommen dass Pumplaser und Resonator ramanresonant eingestellt werden bei großer Verstimmung $\Delta$, so dass die Streuung von Photonen aus dem Rückpumplaser und die Ramankopplung der Grundzustände durch Rückpumplaser und Pumplaser nicht resonant sind und vernachlässigt werden können. Außerhalb der Ramanresonanz tragen diese Beiträge jedoch zum beobachteten Anregungsspektrum bei, siehe Kapitel 4.3.1. Die beim Ramanprozess zusätzlich auftretende dynamische Starkverschiebung kann im Prinzip durch Veränderung der Verstimmung von Pumplaser oder Resonator kompensiert werden, in unserem System jedoch nur für eine feste Photonenzahl. Trotzdem sei sie im folgenden vernachlässigt. Die Verstimmung der angeregten Photonenzustände und des Zustands $|u\rangle$ um $\Delta$ spielt für die folgende Betrachtung keine Rolle, da alle im folgenden betrachteten Übergänge resonant gekoppelt werden. Zur Vereinfachung werden sie daher ebenfalls weggelassen. Übrig bleiben nur die effektive Ramankopplung der beiden Grundzustände mit der Vakuum-Rabifrequenz $\Omega_{eff} = {}^{g\Omega_P}/_{\Delta}$ und die Kopplung der Atome an den Rückpumplaser mit der Rabifrequenz $\Omega_R$. Es ergibt sich somit folgender vereinfachter Hamiltonoperator

$$\frac{\hat{H}''_\Lambda}{\hbar} = \frac{\Omega_R}{2}(\hat{\sigma}_{eg} + \hat{\sigma}_{ge}) + \frac{\Omega_{eff}}{2}(\hat{\sigma}_{ug}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{gu}). \tag{2.117}$$



Der angeregte Zustand $|e\rangle$ ist weiterhin als transientes Niveau im Rückpumpprozess enthalten. Um diesen Zustand zu eliminieren, betrachten wir zunächst das vereinfachte System $|g\rangle$ und $|e\rangle$, wobei der angeregte Zustand entweder mit $\gamma_{eg}$ in den einen Grundzustand $|g\rangle$ oder mit $\gamma_{eu}$ in den anderen Grundzustand $|u\rangle$ zerfällt, siehe auch Abb. 2.17 (b). Der in diesem Teilsystem wirkende Hamiltonoperator

$$\frac{\hat{H}_R}{\hbar} = \frac{\Omega_R}{2}(\hat{\sigma}_{eg} + \hat{\sigma}_{ge}) \tag{2.118}$$

zusammen mit der Zerfall des angeregten Zustands

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}[\hat{\rho}] = {} & \gamma_{eu}(2\hat{\sigma}_{ue}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{eu} - \hat{\sigma}_{ee}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{ee}) \\ & + \gamma_{eg}(2\hat{\sigma}_{ge}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{eg} - \hat{\sigma}_{ee}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{ee})\end{aligned} \tag{2.119}$$

führt auf die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{ee} &= -i\frac{\Omega_R}{2}(\rho_{ge} - \rho_{eg}) - 2\gamma\rho_{ee} \\ \dot{\rho}_{gg} &= i\frac{\Omega_R}{2}(\rho_{ge} - \rho_{eg}) + 2\gamma_{eg}\rho_{ee} \\ \dot{\rho}_{uu} &= 2\gamma_{eu}\rho_{ee} \\ \dot{\rho}_{eg} &= -i\frac{\Omega_R}{2}(\rho_{ee} - \rho_{gg}) - \gamma\rho_{eg}\end{aligned} \tag{2.120}$$

(2.121)

mit $\gamma = \gamma_{eg} + \gamma_{eu}$. Ist der Übergang nicht gesättigt, also $\Omega_R \ll \gamma$, so können die Außerdiagonalelemente der Dichtematrix $\rho_{eg}$ adiabatisch eliminiert werden, d.h. $\dot{\rho}_{eg} \approx 0$. Dadurch werden die übrigen Gleichungen effektiv Ratengleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{ee} &= -\frac{\Omega_R^2}{2\gamma}\rho_{ee} + \frac{\Omega_R^2}{2\gamma}\rho_{gg} - 2\gamma\rho_{ee} \\ \dot{\rho}_{gg} &= \frac{\Omega_R^2}{2\gamma}\rho_{ee} - \frac{\Omega_R^2}{2\gamma}\rho_{gg} + 2\gamma_{eg}\rho_{ee} \\ \dot{\rho}_{uu} &= 2\gamma_{eu}\rho_{ee}\end{aligned} \tag{2.122}$$

zwischen den einzelnen Zuständen $|u\rangle$,$|e\rangle$ und $|g\rangle$ mit der Übergangsrate ${}^{\Omega_R^2}/_{2\gamma}$. Im vorliegenden Fall kann zusätzlich der angeregte Zustand adiabatisch eliminiert werden ($\dot{\rho}_{ee} \approx 0$), woraus sich für den Prozess bei schwachem Rückpumplaser das einfache Ratengleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{gg} &= -R\rho_{gg} \\ \dot{\rho}_{uu} &= R\rho_{gg}\end{aligned} \tag{2.123}$$

ergibt, wobei die Pumprate durch $R \approx {}^{\Omega_R^2}/_{2\gamma^2}\gamma_{eu}$ gegeben ist. Für einen intensiveren Rückpumplaser treten Rabioszillationen zwischen $|g\rangle$ und $|e\rangle$ auf, die durch ein einfaches Ratenmodell nicht beschrieben werden können.

Auf die gleiche Weise kann auch der Ramanprozess für $\Omega_{eff} \ll \kappa$ in ein System von Ratengleichungen überführt werden. Begrenzt man sich auf das System $\{|u,0\rangle, |g,1\rangle, |g,0\rangle\}$, so ist die effektive Transferrate $A$ zwischen $|u,0\rangle$ und $|g,1\rangle$ gegeben durch

$$A = \frac{\Omega_{eff}^2}{2\kappa} = \frac{g^2\Omega_P^2}{2\kappa\Delta^2}. \tag{2.124}$$

Bei dieser einfachen Ableitung der Übergangsraten werden mehrere Punkte nicht berücksichtigt. Zum einen wird nur der unterste Photonenzustand verwendet. Über die Methode der adiabatischen Elimination des Resonatorfeldes sollten jedoch auch die Übergangsraten der höheren Photonenzustände berechnet werden können [85, 86]. Zudem müsste das Rückpumpen beim Ramanprozess als zusätzlicher Verlustprozess berücksichtigt werden. Bei hohen Rückpumpraten führt dies bei Zwei-Niveau-Systemen zu sogenanntem „self-quenching", d.h. durch zu starkes Rückpumpen wird die Kohärenz des Laserübergangs zerstört und der Laser verlöscht, siehe z.B. [87]. Ebenso kann bei den höheren Photonenzuständen der Ramanprozess zur Zerstörung der Kohärenz des Rückpumpübergangs von $|g\rangle$ nach $|e\rangle$ führen. Im Extremfall würde das System nur zurückgepumpt, wenn es im Zustand $|g,0\rangle$ ist. Für höhere Photonenzustände müsste erst der Resonator zerfallen, bevor ein weiteres Photon erzeugt werden könnte. Die Folge wäre Licht, das starkes Antibunching zeigt.

Sieht man von diesen Korrekturen ab, so können nun, zusammen mit der Zerfallsrate des Resonators $C = 2\kappa$, die entsprechenden Übergangsraten des Experiments berechnet werden. Typische experimentelle Parameter sind: $(\Omega_P^{max}; \Omega_R^{max}; g^{max}) = 2\pi\ (6{,}6; 3{,}8; 2{,}5)\,\mathrm{MHz}$ und $(\kappa; \gamma; \Delta) = 2\pi\ (1{,}25; 3; 20)\,\mathrm{MHz}$. Daraus ergibt sich $R/C = 0{,}3$ und $A/C = 0{,}1$ für sowohl an die Laser als auch an den Resonator maximal gekoppelte Atome. Berücksichtigt man weiterhin, dass die Atome sich auch außerhalb des Bereiches maximaler Kopplung aufhalten können, so sind $A$ und $R$ eher kleiner. Die maximale Rückpumprate ergibt sich, wenn der Übergang von $|g\rangle$ nach $|e\rangle$ sehr stark gesättigt ist, so dass diese beiden Zustände annähernd gleich besetzt sind. Trotzdem bleibt diese Rate mit $R^{max} = 1/2\gamma_{eu}$ also $R^{max}/C = 2/3$ kleiner als die Zerfallsrate des Resonators, wobei außerdem starkes „self-quenching" nicht zu vermeiden ist. Vergleicht man diese Werte mit den Simulationen des letzten Kapitels, so ist die Rückpumprate zu klein, um für eine kleine Anzahl an Atomen in den Laserbereich zu gelangen. Für kleine Rabifrequenzen, sollte man im Bereich aufhalten, der gut durch das Modell unabhängig emittierender Atome beschrieben werden kann, für höhere Rabifrequenzen sind möglicherweise kollektive Effekte, vergleichbar denen in Abb. 2.14, zu sehen.

### 2.3.6 Dynamik eines einzelnen Atoms im Resonator

Bei unabhängig strahlenden Atomen kann die Intensitätskorrelationsfunktion, wie in Kapitel 2.3.3 diskutiert, in Komponenten zerlegt werden, die aus Korrelationsfunktionen eines einzelnen Atoms zusammengesetzt sind. Für ein einzelnes Atom in einem optischen Resonator lassen sich diese Korrelationsfunktionen direkt quantenmechanisch berechnen. Es genügt in der Simulation, vgl. Kapitel 2.2.6, ein einzelnes festgehaltenes Atom bei konstanten Pump- und Rückpumplaser-Rabifrequenzen sowie konstanter Kopplungsstärke $g$ zu betrachten. Das gekoppelte System entwickelt sich in einigen hundert Nanosekunden aus dem Anfangszustand $\rho(0) = |u,0\rangle\langle u,0|$ in den stationären Zustand $\rho_s$. Die Korrelationsfunktion erster Ordnung zum Zeitpunkt $t$ ausgehend vom stationären Zustand wird über

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle_s}{\langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle_s} \tag{2.125}$$

und die Intensitätskorrelationsfunktion über

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle_s}{\langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle_s^2} \tag{2.126}$$



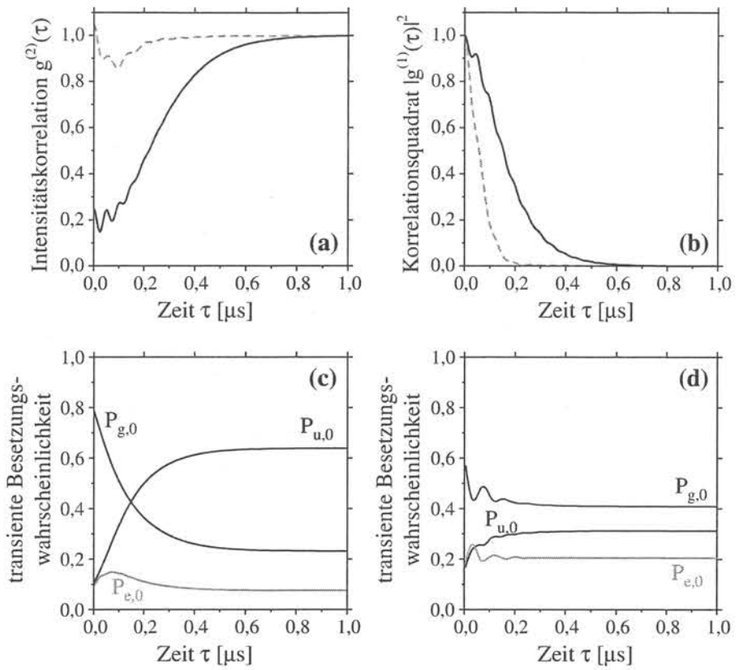



**Abbildung 2.18:** Obere Zeile: Simulation unterschiedlicher Korrelationsfunktionen eines einzelnen Atoms bei konstanter Kopplung an Resonator, Pump- und Rückpumplaser. **(a)** Die Korrelationsfunktion 2.Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ beschreibt das Antibunching, **(b)** das Betragsquadrat der Korrelationsfunktion 1.Ordnung $|g^{(1)}(\tau)|^2$ das Bunching der Photonen. Die Parameter der Simulation sind $(\Omega_P; \Omega_R; g; \Delta) = 2\pi\ (7{,}6; 3{,}3; 2{,}5; -20)\,\mathrm{MHz}$ für Antibunching (durchgezogene Linie) und $(\Omega_P; \Omega_R; g; \Delta) = 2\pi\ (20; 12; 2{,}5; -15)\,\mathrm{MHz}$ ohne Antibunching (gestrichelte Linie). Untere Zeile: Transiente Besetzungswahrscheinlichkeiten, $\langle P_\phi\rangle = Sp(\hat{P}_\phi\breve{\rho}(\tau))$, nach einer Photonenemission aus dem optischen Resonator entsprechend den Parametern mit Antibunching **(c)** und ohne Antibunching **(d)**. Für $t \to \infty$ wird wieder der stationäre Zustand der Besetzungswahrscheinlichkeiten von $P_{u,0}, P_{e,0}$ und $P_{g,0}$ erreicht. Bei $t = 0$ zeigen sich hingegen die Verhältnisse der Besetzungswahrscheinlichkeiten des $n = 1$ Zustands $P_{u,1}, P_{e,1}$ und $P_{g,1}$ des stationären Zustands, der durch die Photonenemission auf $n = 0$ projiziert wird.

bestimmt.[7]

Die durchgezogenen Linien in Abbildung 2.18 zeigen die simulierten Korrelationsfunktionen entsprechend den in Kapitel 4.3.2 verwendeten experimentellen Parametern, bei denen der

[7] Der Erwartungswert $\langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle$ lässt sich mit Hilfe des in Kapitel 2.2.6 besprochenen Dichtematrixformalismus über folgende Zwischenschritte berechnen: Zuerst wird $\tilde{\rho}(t) = \hat{a}\hat{\rho}(t) = \hat{a}\hat{\rho}_s$ bestimmt, anschließend kann die zeitliche Entwicklung von $\tilde{\rho}(t+\tau)$ über die Mastergleichung (2.76) numerisch berechnet werden, schließlich ergibt $\langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle = Sp(\hat{a}^\dagger\tilde{\rho}(t+\tau))$ den gesuchten Erwartungswert. Entsprechend kann der Erwartungswert der unnormierten Intensitätskorrelationsfunktion über $G^{(2)}(\tau) = \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle = Sp(\hat{a}^\dagger\hat{a}\breve{\rho}(t+\tau))$ mit $\breve{\rho}(t) = \hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger = \hat{a}\hat{\rho}_s\hat{a}^\dagger$ berechnet werden, vgl. [88, Kap. 8.2].

Übergang von Antibunching zu Bunching bei Variation der Atomzahl beobachtet wird. Aus der Intensitätskorrelationsfunktion in Abb. 2.18(a) geht deutlich hervor, dass hier tatsächlich für ein einzelnes Atom im Resonator ein Antibunching-Verhalten erwartet wird. Nach erfolgter Photonenemission befindet sich das Atom mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% im Zustand $|g,0\rangle$, vgl. Abb. 2.18(c). Von dort muss es erst wieder zurückgepumpt werden, bevor es ein weiteres Photon emittieren kann. Auffallend ist jedoch, dass das Antibunching nicht wie bei der normalen Resonanzfluoreszenz auf Null zurück geht, sondern nur auf $g^{(2)}(0) \approx 0{,}2$. Durch „schnelles" Zurückpumpen, kann das Atom auch Photonenzustände mit $n > 1$ besetzen.

Erhöht man die Rabifrequenzen von Pump- und Rückpumplaser weiter, siehe Abb. 2.18 (a und b, gestrichelte Linien, sowie d), so verschwindet das Antibunching vollständig. Das Rückpumpen ist hier so schnell, dass im $n = 1$-Photonenzustand die Atomzustände $|u\rangle, |e\rangle$ und $|g\rangle$ annähernd gleich besetzt sind wie im $n = 0$-Zustand. Dadurch führt die Emission eines Photons nicht mehr zu einer Projektion in den $|g,0\rangle$-Zustand. Atom- und Photonenbesetzungswahrscheinlichkeiten sind entkoppelt. Bei noch höheren Rückpump-Rabifrequenzen zeigt sich in der Simulation sogar ein Bunching mit $g^{(2)}(0) > 1$. Im Experiment wurde dieser Übergang von Antibunching zu Bunching für ein einzelnes Atom bisher noch nicht beobachtet – jedoch auch nicht ausgeschlossen.

Im Prinzip kann ein einzelnes Atom als laseraktives Medium agieren [87, 89]. Bereits in Abb. 2.18(d) wird deutlich, warum für unser System die Laserschwelle für ein einzelnes Atom nicht erreicht werden kann: Das Rückpumpen ist zu langsam, um die Besetzungsinversion aufrecht zu erhalten. Die mittlere Photonenzahl im Resonator bleibt daher deutlich unter eins.

Neben der simulierten Intensitätskorrelationsfunktion eines einzelnen Atoms zeigt Abb. 2.18(b) das Betragsquadrat der Korrelationsfunktion erster Ordnung $|g^{(1)}(\tau)|^2$ – die Bunching-Komponente der Resonanzfluoreszenz unabhängig strahlender Atome. Der Abfall von $|g^{(1)}(\tau)|^2$ auf $1/e^2$ definiert die Kohärenzzeit $\tau_c$. Aus der Simulation ergibt sich bei Antibunching eine Kohärenzzeit $\tau_c = 300\,\mathrm{ns}$, für die entsprechenden Parameter ohne Antibunching ist die Kohärenzzeit mit $\tau_c = 115\,\mathrm{ns}$ deutlich kürzer. Durch das starke Rückpumpen wird in diesem Fall einerseits die atomare Kohärenz schneller zerstört, andererseits gelangt das gekoppelte Atom-Resonator-System schneller in den stationären Zustand zurück. Die Breite des Bunching-Maximums $\tau_c$, wie auch des Antibunching-Minimums, ist somit auch ein Maß dafür, wie lang sich das System an eine Störung erinnert.

Zusammengefasst ergibt sich aus dieser Simulation, dass ein einzelnes Atom im optischen Resonator für die verwendeten Parameter, sowohl die Antibunching-Komponente in der Intensitätskorrelationsfunktion, wie auch die Bunching-Komponente in der Korrelationsfunktion 1. Ordnung zeigt. Sind die kollektiven Effekte vernachlässigbar, so sollten die Atome weitgehend unabhängig voneinander abstrahlen. Dann sollten diese Beiträge auch in der Intensitätskorrelationsfunktion des gekoppelten N-Atom-Resonator-System erhalten bleiben.

# Kapitel 3

# Experimenteller Aufbau

Die Realisierung der Idee, einzelne Photonen durch eine adiabatische Passage in einem $\Lambda$-System zu erzeugen, stellt hohe Anforderungen an den experimentellen Aufbau. Wie in Kapitel 2.2 diskutiert, lässt sich eine adiabatische Passage über den Dunkelzustand nur erreichen, wenn man sich im Bereich starker Kopplung befindet. Dazu benötigt man einen sehr kleinen Resonator hoher Finesse. Zusätzlich müsste man, um zu einem beliebigen Zeitpunkt ein einzelnes Photon erzeugen zu können, ein einzelnes Atom im Resonator festhalten. Um jedoch als ersten Schritt das Funktionieren des adiabatischen Transfers zu demonstrieren, wurde im Experiment ein sehr schwacher Atomstrahl mit mittlerer Atomzahl im Resonator deutlich kleiner eins verwendet. Detektiert man ein einzelnes Atom, so kann man mit diesem experimentieren, solange es durch den Resonator fällt. Damit die Atome lange mit dem Resonator wechselwirken, werden langsame, d.h. kalte Atome aus einer magnetooptischen Falle (MOT) verwendet. Eine Skizze des experimentellen Aufbaus ist in Abb. 3.1 dargestellt. Details zu den einzelnen Komponenten des Aufbaus werden in den folgenden Kapiteln beschrieben. Im folgenden wird kurz das Prinzip des Experiments skizziert.

## 3.1 Prinzip des Experiments

Ein Messzyklus setzt sich aus den folgenden Schritten zusammen: In der magnetooptischen Falle werden $^{85}$Rb-Atome aus dem Hintergrundgas gefangen. Über die Ladezeit der Falle (zwischen 50 ms und 2,5 s) lässt sich die Anzahl der gefangenen Atome einstellen und dadurch die Stromdichte der Atome im Resonator. Die Magnetfelder der magnetooptischen Falle werden ausgeschaltet, um anschließend die Atome in einer Melassenphase auf unter 10 µK abzukühlen. Nach dem Ausschalten der Laser fallen die Atome im Schwerefeld nach unten und gelangen nach 209 ms in den optischen Resonator. Dort werden sie von der Seite durch Laserstrahlen angeregt und strahlen daraufhin Photonen in den Resonator ab. Einer der beiden Resonatorspiegel besitzt eine höhere Transmission. Durch diesen verlassen die erzeugten Photonen den Resonator und können über Silizium-Avalanche-Photodioden (APD) mit einer Quanteneffizienz von 50% nachgewiesen werden.

Der experimentelle Aufbau wurde in drei Ausbaustufen erweitert, bis kontrolliert einzelne Photonen erzeugt werden konnten. Da sich in diesen Stufen das System sehr verschieden verhält

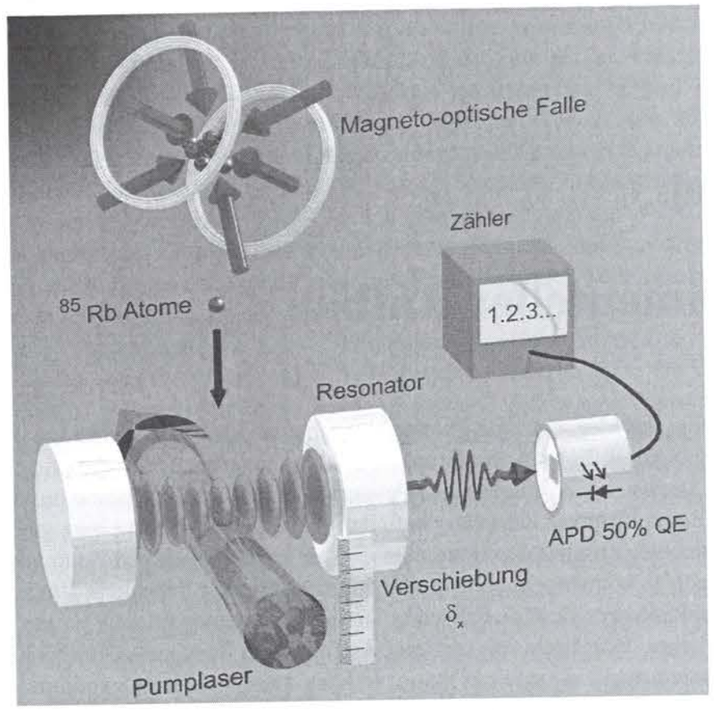



**Abbildung 3.1:** Skizze des experimentellen Aufbaus zur adiabatischen Photonenerzeugung. Eine Wolke kalter $^{85}$Rb-Atomen wird mit einer magnetooptischen Falle präpariert und fällt 209 ms nach Ausschalten der Falle mit einer Geschwindigkeit von etwa 2 m/s innerhalb von 8 ms durch einen optischen Resonator. Die Wechselwirkungszeit eines einzelnen Atoms mit der Mode des Resonators beträgt 35 µs. Um eine anti-intuitive Pulsfolge der Kopplungen an Resonator und Pumplaser zu erreichen, ist der Pumpstrahl um die Strecke $\delta_x$ nach unten verschoben.

und folglich auch vollständig unterschiedliche Eigenschaften des Systems nachgewiesen werden können, sollen diese im folgenden kurz skizziert werden:

- In der ersten Ausbaustufe wurde ein Atom welches durch den Resonator fällt einzig durch einen kontinuierlich eingestrahlten Pumplaser von der Seite angeregt, siehe Abb. 3.1. Die vertikale Position des Pumplasers wurde so eingestellt, dass die Atome im Fallen zuerst mit dem Feld des Resonators wechselwirken, bevor sie transversal zur Resonatorachse durch dem Pumplaser angeregt werden. Somit durchläuft jedes Atom eine anti-intuitive Pulssequenz der Kopplung an Resonator und Pumplaser und emittiert dabei maximal ein Photon. Die anti-intuitive Pulssequenz stellt sicher, dass die Anfangsbedingung des adiabatischen Transfers, entsprechend Gl. (2.18), erfüllt ist. Durch Variation der vertikalen Position des Pumplasers lassen sich die Verzögerung $\delta_x$ zwischen Resonator- und Pumplaserfeld frei einstellen und somit diese Bedingung der Adiabasie untersuchen. Durch Variation der Verstimmung von Pumplaser und Resonator lässt sich zudem feststellen, ob die Photonen über einen Ramanprozess emittiert werden. Insgesamt lässt sich so zeigen,



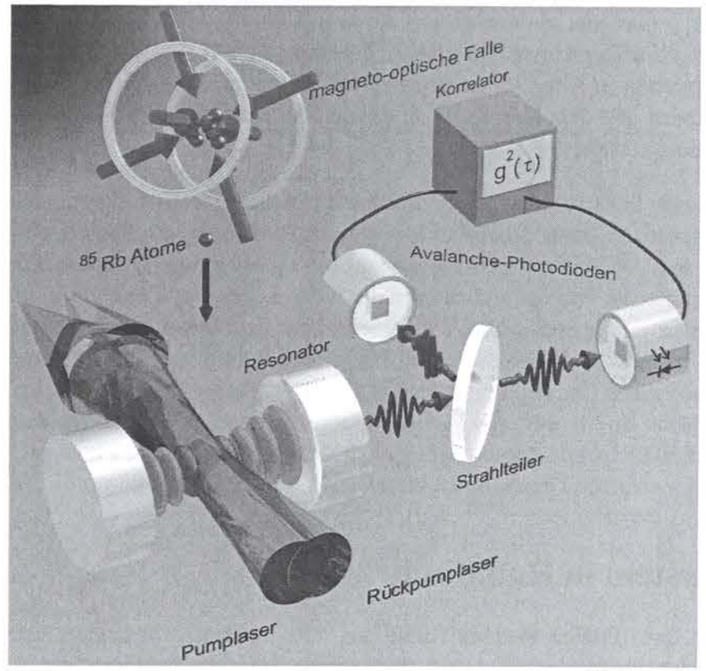



**Abbildung 3.2:** Experimenteller Aufbau der Einzelphotonenquelle. Für ein Atom löst ein Pumplaserpuls die Emission eines einzelnen Photons aus, woraufhin ein Rückpumplaserpuls das Atom in den Ausgangszustand zurückbefördert. Jedes Atom kann so während seines Durchflugs durch den Resonator eine Serie von Einzelphotonen erzeugen. Am Ausgang des Resonators befindet sich ein Hanbury-Brown & Twiss-Aufbau um die Statistik des emittierten Lichts zu bestimmen. Die emittierten Photonen werden durch den Strahlteiler zufällig auf die zwei Avalanche-Photodioden verteilt.

dass die Photonen über einen STIRAP-Prozess erzeugt werden. Jedes der Atome kann der Theorie nach maximal ein Photon emittieren. Wegen der zufälligen Ankunftszeit der Atome ist der Zeitpunkt der Emissionen jedoch unbestimmt.

- Um mehr als ein Photon pro Atom zu erzeugen, muss das Atom nach erfolgter Emission wieder in den Ausgangszustand des Λ-System zurückgebracht werden. Im Experiment erfolgt dies durch optisches Pumpen mit einem zusätzlichen transversalen Rückpumplaser parallel zum Pumplaserstrahl, siehe Abb. 3.2. Durch abwechselndes Anlegen von Pump- und Rückpumplaserpulsen sind Photonenemission und Rückpumpen voneinander zeitlich getrennt. Der Zeitpunkt der Emission einzelner Photonen wird hierbei durch den Pumplaserpuls definiert. Ein lineares Ansteigen der Rabifrequenz des Pumplasers gewährleistet hierbei eine adiabatische Photonenerzeugung. Die Pulssequenz läuft kontinuierlich ab, während die Atome zu zufälligen Zeitpunkten durchfallen. Eine Detektion eines einzelnen Photons signalisiert die Anwesenheit eines Atoms. Solange das Atom weiter durch den Resonator fällt, können getriggert einzelne Photonen erzeugt werden. Über die Photonenstatistik der Photonen kann nachgewiesen werden, dass jedes Atom

tatsächlich maximal ein einzelnes Photon pro Pumplaserpuls erzeugt. Die Photonenstatistik wird im Experiment über einen Hanbury-Brown & Twiss Aufbau (HBT) gemessen, dargestellt in Abb. 3.2 durch den Strahlteiler zusammen mit den beiden Avalanche-Photodioden und dem Korrelator. Die Funktionsweise des HBT-Aufbaus wird in Kapitel 3.4 genauer erläutert.

- Wenn beide Laserstrahlen kontinuierlich eingestrahlt werden, kann jedes durchfallende Atom statistisch (nicht adiabatisch) über den Ramanprozess Photonen im Resonator erzeugen, bzw. wieder in den Ausgangszustand zurückgepumpt werden. Die maximale Rate an emittierten Photonen wird erreicht, wenn Laser und Resonatormode möglichst gut überlappen, da die anti-intuitive Pulssequenz des adiabatischen Transfers nicht erforderlich ist. Im Prinzip ähnelt dieser Aufbau einem Ramanlaser. Da ein einzelnes Atom, jedoch nach einer Emission erst wieder in den Ausgangszustand zurückgepumpt werden muss, bevor es ein weiteres Photon emittieren kann, zeigt das emittierte Licht nichtklassisches Licht mit Antibunching. Erhöht man jedoch den Fluss an Atomen, so beobachtet man einen Übergang zu klassischem Licht mit Bunching.

## 3.2 Λ-System in Rubidium $^{85}$Rb

Hauptsächlich zwei Punkte machen Rubidium $^{85}$Rb zu einem besonders geeigneten Kandidat zur Erzeugung einzelner Photonen. Einerseits sind die Übergänge der $D_2$-Linie bei der Wellenlänge $\lambda = 780{,}24\,\mathrm{nm}$, welche zum Laserkühlen verwendet werden, durch kommerziell erhältliche Titan-Saphir-Laser bzw. Laserdioden erreichbar. Somit lassen sich einfach kalte Atome mit langer Wechselwirkungszeit mit dem Resonator erzeugen. Andererseits besitzt $^{85}$Rb mit den beiden Hyperfein-Grundzuständen $5S_{1/2}$, $F = 2$ und $F = 3$, zwei extrem langlebige Zustände, die als Basiszustände für das gewünschte Λ-System verwendet werden können. Als angeregter Zustand des Λ-Systems kommen jeweils die Zustände $F = 2$ und $F = 3$ der $5P_{1/2}$ und $5P_{3/2}$ Niveaus in Frage. Für die $D_1$-Linie zum $5P_{1/2}$ Zustand wären, zusätzlich zu den Lasern der magnetooptischen Falle, weitere Laser bei $\lambda = 795\,\mathrm{nm}$ nötig. Ein einfacherer Aufbau ergibt sich daher unter Verwendung des $D_2$-Übergangs zum $5P_{3/2}$-Zustand, siehe Abb. 3.3.

Die Hyperfeinzustände bestehen jeweils aus mehreren magnetischen Unterzuständen $m_F$. Für ein Λ-System mit genau definierten Kopplungsstärken müssten gezielt einzelne $m_F$-Unterzustände verwendet werden. Die Verwendung der unterschiedlichen Niveaus für den Λ-Übergang ist jedoch durch folgende Argumente begrenzt:

- Der Resonator bevorzugt keine Polarisation des emittierten Photons. Der angeregte Zustand koppelt daher in Emission an mehrere verschiedene $m_F$-Grundzustände. Ausgenommen davon sind nur die Übergänge von:
  $5P_{3/2}$, $F = 3$, $m_F = +3$ nach $5S_{1/2}$, $F = 2, m_F = +2$ mit einer $\sigma^+$-Emission und
  $5P_{3/2}$, $F = 3$, $m_F = -3$ nach $5S_{1/2}$, $F = 2, m_F = -2$ mit einer $\sigma^-$-Emission.

- Um weitere Photonen erzeugen zu können, muss in den Ausgangszustand zurückgepumpt werden. Am einfachsten erreicht man dies durch optisches Pumpen über den angeregten Zustand. Die Emission beim optischen Pumpen erfolgt jedoch wiederum mit willkürlicher Polarisation. Derselbe $m_F$-Zustand wird somit nur zufällig erneut besetzt.



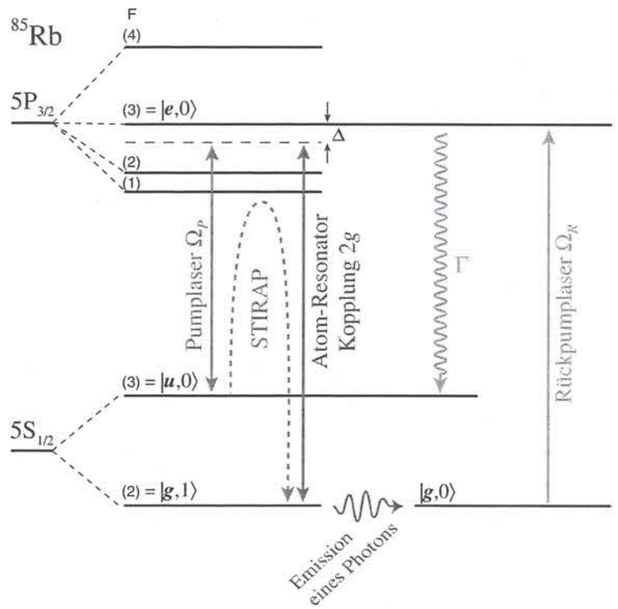



**Abbildung 3.3:** Energieniveauschema des Λ-Systems in $^{85}$Rb.

- Im Prinzip kann auch über einen Ramanprozess zurückgepumpt werden. Um wieder in denselben Ausgangszustand zurückzugelangen, muss jedoch einer der beiden Laser $\sigma$-, der andere kontrolliert $\pi$-polarisiert sein. Dies ist aus technischen Gründen nicht möglich, da die Laserstrahlen nur transversal in den Resonator eingestrahlt werden können.

- Durch ein zusätzliches Magnetfeld könnte spektral ein Übergang von anderen getrennt werden, so dass sowohl für die Erzeugung einzelner Photonen, wie auch zum Ramanrückpumpen ein Übergang definiert wäre. Ein inhomogener Anteil des Magnetfeldes müsste dabei vermieden werden, da dieses entsprechend dem Stern-Gerlach-Experiment die Atome in ihrer Flugbahn ablenken würde. Es würde genügen, die benachbarten $m_F$-Unterzustände um wenige Megahertz zu verschieben. Da die Grundzustände mit $\Delta\nu = 470\,\mathrm{kHz/G}$ aufspalten ($g_F = \pm 1/3$), genügt ein Magnetfeld von wenigen Gauss, das durch ein Helmholtz-Spulenpaar außerhalb der Vakuumkammer erzeugt werden könnte.

Für eine Demonstration der Einzelphotonenerzeugung ist dieser zusätzliche experimentelle Aufwand nicht notwendig. Das im Experiment verwendete einfache System, ohne Begrenzung auf einen speziellen $m_F$-Λ-Übergang, ist in Abb. 3.3 dargestellt. Als Ausgangszustand $|u\rangle$ wird der Zustand $5S_{1/2}$, $F = 3$ verwendet, in dem die Atome die magnetooptische Falle (verteilt über alle Zeemanniveaus) verlassen. Dieser wird über den Pumplaser an den angeregten Zustand $|e\rangle$ ($5P_{3/2}$, $F = 3$), und weiter über den optischen Resonator an den Zielzustand $|g\rangle$ ($5S_{1/2}$, $F = 3$) gekoppelt. Die über alle $m_F$-Unterzustände gemittelte Kopplungsstärke zwischen Atom und Resonator ist $g^{av} = 2\pi\ 2{,}5\,\mathrm{MHz}$, siehe Anhang A. Die beiden Kopplungen können relativ zum

angeregten Zustand verstimmt sein. Für einen Ramanübergang müssen sie jedoch ein gemeinsames virtuelles Niveau treffen. Der dazu verstimmte angeregte Zustand $|e\rangle$ zerfällt mit der Rate $2\gamma = 2\pi\ 6\,\mathrm{MHz}$, wobei 5/9 der Atome zurück in den Zustand $|u\rangle$ und 4/9 der Atome in den Zustand $|g\rangle$ ($5S_{1/2}$, $F = 2$) gelangen. Durch resonantes Anregen des Atoms auf dem Übergang $|g\rangle$ nach $|e\rangle$ mit einem zusätzlichen Rückpumplaser, kann gerade dieser Zerfall zum optischen Rückpumpen in den Ausgangszustand $|u\rangle$ verwendet werden.

Die Polarisation des Pumplasers wurde auf maximale Emissionsrate aus dem optischen Resonator optimiert. Diese ergibt sich bei linearer Pumplaserpolarisation unter einem Winkel von 45° zur Resonatorachse, wie auch zu einem Führungsmagnetfeld von etwa $B_x = 0{,}3\,\mathrm{G}$ entlang der vertikalen Achse, das die Quantisierungsachse des Systems definiert. In diesem Bezugssystem wird der Übergang mit $\sigma^+$-, $\sigma^-$- und mit $\pi$-Licht gleichzeitig getrieben, wodurch die verschiedenen $m_F$-Unterzustände immer wieder durchmischt werden. Des Weiteren ist die Polarisation des Rückpumplasers parallel zu der des Pumplasers und treibt daher ebenso $\sigma^+$-, $\sigma^-$- wie auch $\pi$-Übergänge. Durch diese Anordnung werden alle Zustände einbezogen, ohne die Atome nach und nach in einem $m_F$-Dunkelzustand zu fangen. In diesem Bezugssystem wird bei symmetrischer Besetzung der $m_F$-Unterzustände bei jedem Übergang gleich wahrscheinlich ein vertikales, wie ein horizontales $\pi$-Photon erzeugt. Das Atom koppelt also nicht an eine Mode sondern an zwei verschiedene Polarisationsmoden.

## 3.3 Der asymmetrische optische Resonator hoher Finesse

Kernbauelement des Experiments ist der optische Resonator hoher Finesse, siehe Abb. 3.4. Je höher die Finesse eines Resonators, umso größer ist der Ein-Atom-Kooperativitätsparameter [90] und somit im Drei-Niveau Atom die Effizienz der Photonenerzeugung. Für das Drei-Niveau Atom gilt

$$\frac{g^2}{\kappa\gamma_{eg}} = 2\frac{\mu_g^2}{\mu_{eg}^2}\frac{F}{\pi}\frac{\sigma}{A} \tag{3.1}$$

mit der Modenquerschnittsfläche $A = \pi w_C^2/2$, dem Streuquerschnitt zwischen Licht und Atom $\sigma = \frac{3\lambda^2}{2\pi}$ und der mittleren Anzahl der Reflexionen $F/\pi$ jedes Photons, bevor es den Resonator verlässt.[1] Für eine hohe Finesse werden nach Gl. (2.2) Spiegel sehr hoher Reflektivität benötigt. Technisch sind der Reflektivität Grenzen gesetzt, da bei jeder Reflektion durch Absorption und Streuung Verluste auftreten. Bei den derzeit besten kommerziell erhältlichen Spiegeln liegen diese Verluste $L$ bei wenigen ppm. Die gemessenen Verluste der im Experiment verwendeten Spiegel sind in Summe $L_1 + L_2 = 6{,}3\,\mathrm{ppm}$. Um das im Resonator erzeugte Photon nicht in den Spiegeln zu absorbieren, sondern durch die Spiegel in den freien Raum zu emittieren, wurde für den Resonator ein Auskoppelspiegel mit relativ hoher Transmissivität von $T_1 = 100\,\mathrm{ppm}$, sowie ein zweiter hoch reflektierender Spiegel mit $T_2 = 1{,}8\,\mathrm{ppm}$ verwendet. Ein Photon im Resonator sollte daher mit der Wahrscheinlichkeit $P_{out} = T_1/(T_1 + T_2 + L_1L_2) = 92{,}5\%$ gerichtet durch den Auskoppelspiegel emittiert werden. Die Finesse des Resonators ist $F = 58000$ – bedingt

[1] Bei einem Zwei-Niveau Atom erfolgt die Kopplung an den Resonator auf demselben Übergang, wie die spontane Emission. Die entsprechenden Dipolmatrixelemente kürzen sich somit heraus. Anschaulich ist daher der Kooperativitätsparameter $\frac{g^2}{2\kappa\gamma}$ die Wahrscheinlichkeit des Photons, bei einem Resonatorumlauf am Atom gestreut zu werden, multipliziert mit der mittleren Zahl der Umläufe, siehe [90].



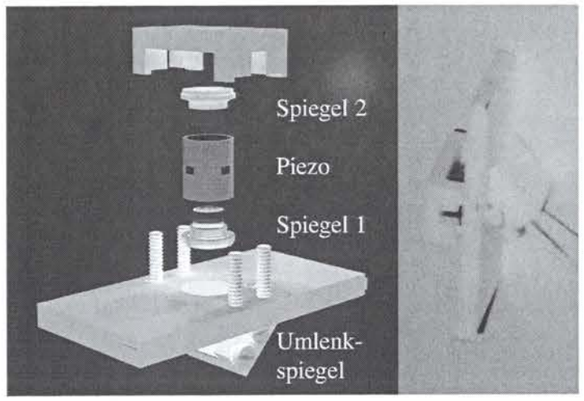



**Abbildung 3.4:** Optischer Resonator bestehend aus zwei hoch reflektierenden Spiegeln mit Transmissionen von 1,8 ppm und 100 ppm und Krümmungsradius $R = 50\,\mathrm{mm}$. Die Spiegel werden über ein Piezoröhrchen auf Distanz gehalten. Durch zwei der vier Löcher im Piezo fallen die Atome, durch die anderen werden Pump- und Rückpumplaser geschickt. Hinter dem Resonator befindet sich ein Umlenkspiegel, welcher die emittierten Photonen um 90° ablenkt.

durch den Auskoppelspiegel deutlich kleiner als in anderen Experimenten [91, 92], die sich daher weiter im „strong-coupling"-Regime befinden.

Die Länge des optischen Resonators lässt sich aus dem Verhältnis zwischen dem Abstand der transversalen Moden und dem freien Spektralbereich bei bekanntem Krümmungsradius der Spiegel bestimmen [90]. Für einen Krümmungsradius von $r = 50\,\mathrm{mm}$ ergibt sich eine Länge von $l = 0{,}98\,\mathrm{mm}$. Dies genügt um Pump- und Rückpumplaserstrahl transversal durch den Resonator zu schicken, ohne zu viel Streulicht auf den Detektoren zu erzeugen. Die Strahltaille der Gauß'schen $\mathrm{TEM}_{00}$-Mode beträgt damit $w_C = 35\,\mu\mathrm{m}$, vgl. (2.4). Der Resonator ist nicht doppelbrechend, so dass jeweils 2 Polarisationsmoden entartet sind.

Um die $\mathrm{TEM}_{00}$-Mode des Resonators auf die gewünschte Frequenz relativ zum Atomübergang zu stabilisieren, muss die Länge des optischen Resonators auf unter $\lambda/2/F \approx 7\,\mathrm{pm}$ stabilisiert werden. Durch das Piezoröhrchen, das die Spiegel auf Distanz hält, kann die Länge kontrolliert werden (Abb. 3.4). Mit einer Spannung $U \approx 160\,\mathrm{V}$ kann ein freier Spektralbereich durchgefahren werden. Zur Stabilisierung wird ein frequenzmodulierter Referenzlaser ($\nu_{mod} = 100\,\mathrm{kHz}$) der gewünschten Frequenz durch den Resonator geschickt, über eine Lock-in-Technik ein Fehlersignal erzeugt, und der Abstand über einen PID-Regler auf maximaler Transmission gehalten. Der Resonator wird relativ zur Laserfrequenz auf $50\,\mathrm{kHz} < \Delta\nu < 300\,\mathrm{kHz}$ (RMS) stabilisiert, entsprechend einer Längenänderung kleiner $1/70$ des Bohrschen Radius. Erschütterungen führen zu deutlichen Längenänderungen des Resonators, z.B. wurden aufgrund einer vibrierenden Turbopumpe $\Delta\nu = 80\,\mathrm{MHz}$ gemessen. Während die Atome bei einer Messung durch den Resonator fallen und einzelne Photonen erzeugt werden wird der Referenzlaser ausgeschalten und die Spannung des Piezos festgehalten. Die passive Stabilität des Resonators ist gut genug, um über 20 ms noch deutlich innerhalb der Linienbreite des Resonators zu bleiben. Die Messung findet zu Beginn dieses Intervalls statt und ist nur wenige ms lang. Eine mögliche Drift des Resonators ist in dieser Phase vernachlässigbar klein.

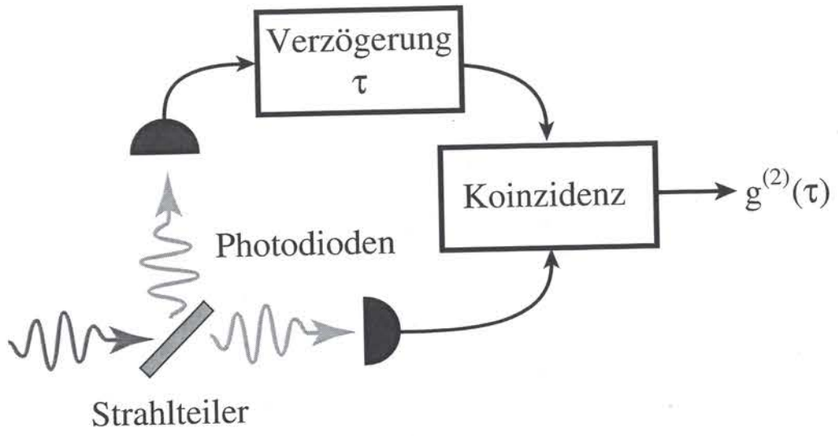



**Abbildung 3.5:** Schematische Darstellung des Hanbury-Brown & Twiss Aufbaus, um die Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(\tau)$ einer Lichtquelle zu messen.

## 3.4 Hanbury-Brown & Twiss Aufbau

Die in Kapitel 2.3.1 vorgestellte Intensitätskorrelationsfunktion lässt sich mit einem Hanbury-Brown & Twiss (HBT) Aufbau direkt messen [93], ohne durch die Totzeit $t_d$ eines Detektors limitiert zu sein. Im HBT Aufbau kann der 2. Detektor zeitgleich mit dem 1. Detektor ein Photon detektieren. Diese Betrachtung ist nur gültig, solange die mittlere Photonenzahl auf den einzelnen Detektoren niedrig genug ist, dass nur ein verschwindender Anteil der Photonen in die Dunkelzeiten der Detektoren fallen. Um dies zu gewährleisten muss gegebenenfalls das untersuchte Licht abgeschwächt werden.

Im Experiment besteht der Aufbau aus einem nicht-polarisationsabhängigen 50:50 Strahlteiler, welcher das Licht auf 2 Avalanche-Photodioden (APD) von Perkin-Elmer SPCM-AQR-13 mit einer Quanteneffizienz von jeweils etwa 50% bei $\lambda = 780\,\mathrm{nm}$ aufteilt, vgl. Abb. 3.5. Die APD's besitzen eine Dunkelzählrate von 320 bzw. 575 Clicks pro Sekunde. Streulicht von Pump- und Rückpumplaser wird durch einen Raumfilter zwischen Resonator und Strahlteiler auf ein vernachlässigbares Niveau unterdrückt. Leider passiert nur 73% des aus dem Resonator emittierten Lichts diesen Raumfilter. Die Intensitätskorrelationsfunktion ist durch die Normierung jedoch unabhängig von Detektoreffizienzen und Verlusten, einzig das Signal-zu-Rausch-Verhältnis wird dadurch verschlechtert.

Die Zeitpunkte der von den beiden APD's erzeugen Spannungspulse pro detektiertem Photon werden über eine Transientenrekorderkarte PCI.258 von Spectrum aufgezeichnet. Die Intensitätskorrelationsfunktion wird, im Gegensatz zur üblichen Start-Stop-Messung, aus dem gesamten Strom der detektierten Photonen numerisch berechnet. Durch entsprechende Filter lässt sich aus diesem Strom von Photonen auch eine auf die Detektion eines Atoms konditionierte Photonenstatistik der emittierten Photonen bestimmen.



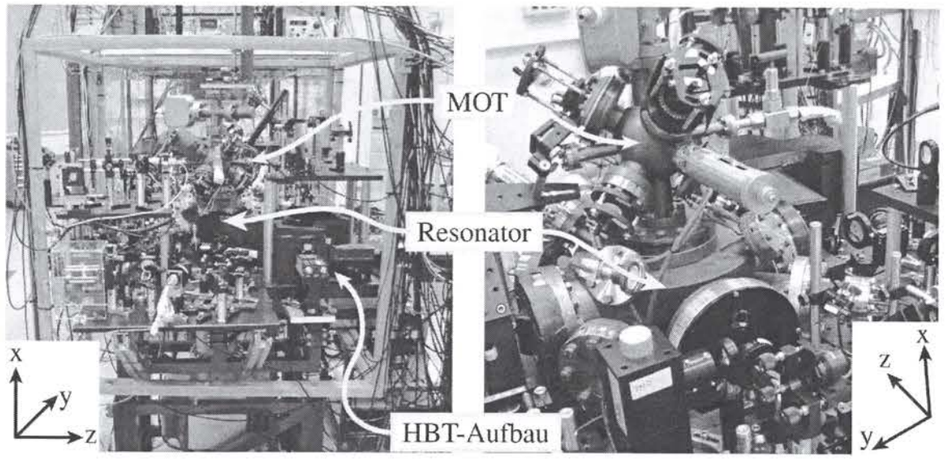



**Abbildung 3.6:** Bilder der Vakuumapparatur. Die Atome werden im oberen, kugelförmigen Bereich der Vakuumapparatur (MOT) gefangen. Im unteren zylinderförmigen Bereich befindet sich der optische Resonator. Um Streulicht durch das Umgebungslicht zu unterdrücken, sind die Fenster dieses Bereichs vollkommen abgedunkelt, Laserstrahlen erreichen den Resonator durch Interferenzfilter. Photonen, die vom Resonator emittiert werden, werden durch die beiden Avalanche-Photodioden des Hanbury-Brown & Twiss Aufbaus (HBT) nachgewiesen.

## 3.5 Charakteristika der Atomquelle

Der optische Resonator wurde in eine bestehende Vakuumapparatur eingebaut, siehe Abb. 3.6, an der zuvor atominterferometrische Experimente durchgeführt wurden [94]. Details zur Apparatur wurden bereits in den früheren Arbeiten veröffentlicht [95, 96, 97]. Daher werden im folgenden nur kurz die wesentlichen Charakteristika angesprochen, sowie die Veränderungen diskutiert.

Die in der magnetooptischen Falle gefangenen Atome werden in einer anschließenden Melassenphase auf $T < 10\,\mu\mathrm{K}$ abgekühlt entsprechend einer Anfangsgeschwindigkeit von $\sigma_v = \sqrt{kT/m} < 3{,}2\,\mathrm{cm/s}$. Etwa $21{,}5\,\mathrm{cm}$ unterhalb erreichen sie nach einer Fallzeit von $t_C = 209\,\mathrm{ms}$ den optischen Resonator mit einer Geschwindigkeit von $v_C = 2\,\mathrm{m/s}$. Die Wechselwirkungsdauer mit dem Resonator beträgt $t_{WW} = 2w_C/v_C = 35\,\mu\mathrm{s}$. Auf dem Weg zum Resonator passieren die Atome mehrere Schlitzblenden. Die erste Blende mit Breite $\Delta z_1 = 100\,\mu\mathrm{m}$ direkt unterhalb der magnetooptischen Falle begrenzt im wesentlichen die Ausdehnung der Quelle in z-Richtung. Parallel dazu wirkt der anregende Laserstrahl mit horizontaler Strahltaille $w_{hor} = 216\,\mu\mathrm{m}$ als Geschwindigkeitsfilter für die Atome. Die Geschwindigkeitsverteilung der Atome beträgt $\Delta v_z = {}^{2w_{hor}}/_{t_C} = 2\,\mathrm{mm/s}$. Die Atome sind daher während ihres Durchflugs durch den Resonator bis auf $\lambda/10$ in Richtung der Resonatorachse lokalisiert. Innerhalb der Zeit von $2\,\mu\mathrm{s}$, um ein einzelnes Photon zu erzeugen, ist daher die Kopplungsstärke $g$ an den Resonator in guter Näherung konstant, vorausgesetzt es wirken keine zusätzliche Kräfte. Leider gibt es Hinweise, dass die Atome durch Dipolkräfte im Resonator beschleunigt werden, siehe Kap. 3.6.

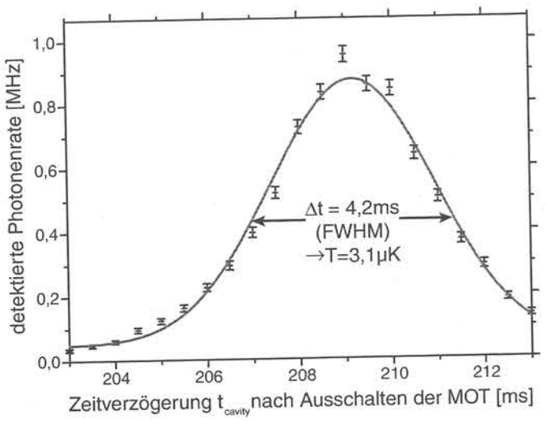



**Abbildung 3.7:** Flugzeitverteilung der Atome im optischen Resonator. Im Resonator werden die Atome kontinuierlich mit Pump- und Rückpumplaser bestrahlt, so dass jedes Atom während seines Durchflugs durch den Resonator mehrere Photonen in diesen abstrahlen kann. Das Fluoreszenzsignal nach Abschalten der magnetooptischen Falle wird mit den beiden APS's nachgewiesen. Die Atomwolke erreicht nach $t_C = 209\,\mathrm{ms}$ den Resonator, entsprechend der Flugstrecke von $s = 21{,}5\,\mathrm{cm}$.

In y-Richtung wird die Atomwolke etwa $3\,\mathrm{cm}$ oberhalb der Resonatormode durch einen $\Delta y = 100\,\mu\mathrm{m}$ breiten Spalt eingeschränkt. Ein Atomdetektor unterhalb des Resonators detektiert daher hauptsächlich Atome, welche den Resonator passiert haben, aber auch solche, welche an der etwas schmäleren Resonatormode vorbeigefallen sind.

In der Fallrichtung x lässt sich die Temperatur der Atomwolke nach Ausschalten der Melasse über die Flugzeitverteilung der Atome im Resonator vermessen, siehe Abb. 3.7. Aus der Breite der Flugzeitverteilung $\tau = 4{,}2\,\mathrm{ms}$ (FWHM) ergibt sich eine Temperatur von $T = 3{,}1\,\mu\mathrm{K}$. Die Kohärenzlänge der Atomwolke in Fallrichtung ist entsprechend früheren Berechnungen [95] $l_{coh} \approx 500\,\mathrm{nm}$, also viel kürzer als der Durchmesser der Resonatormode. Die Atome können daher in guter Näherung als voneinander unabhängige Teilchen betrachtet werden, die sich jeweils an einem klassisch definierten Punkt im Resonator aufhalten.

## 3.6 Fluoreszenzdetektor zum Nachweis der Atome

Zum direkten Nachweis der einzelnen durch den Resonator geflogenen Atome wurde ein Fluoreszenzdetektor aufgebaut, der zustandsselektiv einzelne Atome nachweisen kann [98]. Die Atome werden resonant auf dem geschlossenen Übergang $5S_{1/2}$, $F = 3$ nach $5P_{3/2}$, $F = 4$ angeregt. Dabei emittiert jedes Atom mit einer Photonenrate von bis zu $\gamma = 2\pi\,3\,\mathrm{MHz}$. Die emittierten Photonen werden durch ein Kollektorsystem, siehe Abb. 3.8, eingesammelt und auf einen Hamamatsu Photomultiplier R943-02 mit 12% Quanteneffizienz gelenkt. Geometrischen Verluste betragen etwa 50%, Absorptions- und Reflexionsverluste ebenfalls 50%, wodurch sich eine gesamte Nachweiseffizienz von 3% ergibt. Im Mittel werden pro Atom bei einer Zeitauflösung von $60\,\mu\mathrm{s}$ 18 Photonen detektiert. Dieses Signal ist deutlich von Streulicht mit im Mittel



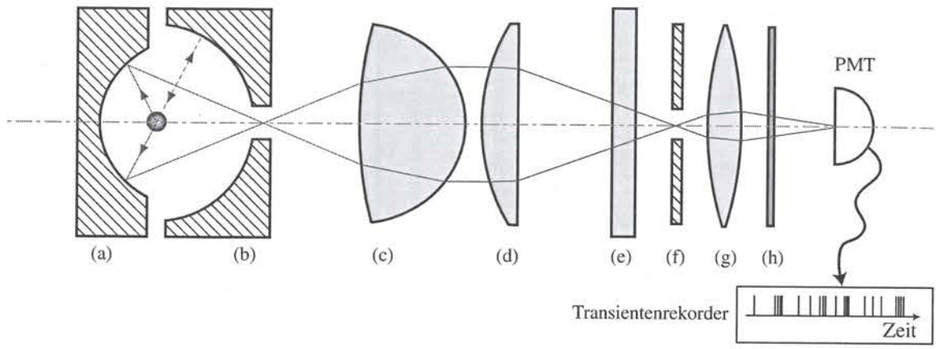



**Abbildung 3.8:** Fluoreszenzkollektor und Abbildungssystem (nicht maßstabsgetreu): Ein ellipsoider (a) und ein sphärischer Spiegel (b) sammeln die Photonen, die von einem Brennpunkt des Ellipsoids emittiert werden. Die Photonen werden zum 2. Brennpunkt abgebildet. Von dort fokussiert ein Teleskop, bestehend aus den Linsen (c) und (d), durch das Fenster der Vakuumkammer (e) auf eine Blende (f), welche als Raumfilter gegen Streulicht wirkt. Schließlich werden sie von einer bikonvexen Linse (g) durch einen Bandpassfilter (h) auf die Kathode eines Photomultipliers (PMT) abgebildet. Die Detektionsereignisse des Photomultipliers werden durch einen Transientenrekorder aufgezeichnet.

0,6 Photonen in $60\,\mu\mathrm{s}$ unterscheidbar. Abb. 3.9(a) zeigt den Zeitverlauf einer Messung, ausgewertet über ein $60\,\mu\mathrm{s}$ langes gleitendes Zeitintervall. Die Ankunftszeiten der einzelnen Atome lassen anhand der Maxima ablesen.

Im Experiment wurde der Fluoreszenzdetektor einzig dazu verwendet, die relative Stromdichte der Atome für unterschiedliche Ladezeiten der magnetooptischen Falle zu bestimmen. Eine Korrelation einzelne Atome im Resonator mit einzelne Atomen im Detektor konnte nicht nachgewiesen werden. Der Detektor befindet sich wahrscheinlich in zu großem zeitlichen Abstand zum Resonator ($\tau = 100\,\mathrm{ms}$), so dass Kräfte im Resonator das Atom beschleunigen und eine genaue Zuordnung des Signals von Resonator und Atomdetektor unmöglich machen. Zum Beispiel führen spontan gestreute Photonen jeweils zu einer Geschwindigkeitsänderung von $v = h/\lambda/m = 6\,\mathrm{mm/s}$. Pro Ramanprozess wird jedoch nur ein Photon emittiert – zu wenig um zu erklären, dass die Atome in einem Bereich von $\pm 3{,}5\,\mathrm{mm}$ im Detektor nicht mehr nachgewiesen werden können. Ein in Flugrichtung der Atome gestreutes Photon führt jedoch dazu, dass dieses Atom $200\,\mu\mathrm{s}$ später am Detektor ankommt. Bei den verwendeten Atomraten ist es dann nicht mehr von den übrigen Atomen zu unterscheiden. Am wahrscheinlichsten ist jedoch, dass die Atome über Dipolkräfte beschleunigt werden. Die Energie des adiabatischen Eigenzustands ist in Richtung der Resonatorachse durch die Variation von $g$ für $\Delta \neq 0$ moduliert, vgl. Abb. 2.5. Eine Energieverschiebung des Zustandes, vor der Emission des Photons von nur $\Delta\nu = 100\,\mathrm{kHz}$ genügt, das Atom in horizontaler Richtung von $v = 0$ auf $v = \sqrt{\frac{2h\Delta\nu}{m}} = 3\,\mathrm{cm/s}$ zu beschleunigen, vorausgesetzt es ist genügend Zeit zum Beschleunigen vorhanden. Die Gradienten sollten jedoch groß genug sein, dass innerhalb der Wechselwirkungsdauer mit dem Resonator entsprechende Geschwindigkeitsänderungen möglich sind. Für eine genauere Behandlung der Dipolkräfte, müsste eine Monte-Carlo-Simulation der Bewegung der Atome durchgeführt werden.

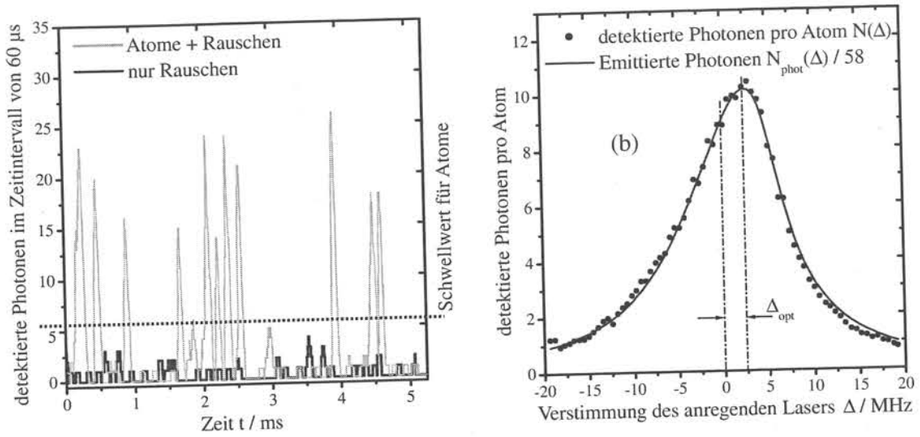



**Abbildung 3.9:** Fluoreszenzsignal einzelner Photonen. Links: Anzahl detektierter Photonen innerhalb eines gleitenden 60 µs langen Zeitintervalls als Funktion des Messzeitpunkts. Die Maxima zeigen die Zeitpunkte einzelner durchfallender Atome an. Zum Vergleich ist eine Messung ohne Laden der magnetooptischen Falle gezeigt, die vorwiegend zu Rauschen durch Streulicht führt. Rechts: Mittlere Anzahl an detektierten Photonen pro Atom $N(\Delta)$ innerhalb eines Zeitintervalls von $\Delta\tau = 50\,\mu s$ als Funktion der Verstimmung des anregenden Lasers $\Delta$ bei dreifacher Sättigungsintensität. Die durchgezogene Linie zeigt die theoretisch erwartete Photonenzahl $N_{phot}(\Delta)$. In der Theorie wurde die Beschleunigung der Atome durch den Lichtdruck und die daraus resultierende Dopplerverschiebung berücksichtigt [98]. Die Theoriekurve ist um einen Faktor 58 herunterskaliert, um zu den experimentellen Daten zu passen. Dies entspricht einer Detektionseffizienz von 1,7%.

## 3.7 Das Lasersystem

Zum Betreiben der magnetooptische Falle, zur Stabilisierung des optischen Resonators, zum Pumpen und Rückpumpen der Atome im Resonator, sowie zum Nachweis der Atome im Detektor werden Laser mit unterschiedlichen Frequenzen benötigt. Das System zur Erzeugung dieser frequenzstabilisierten Laserstrahlen ist in Abb. 3.10 dargestellt und wird im folgenden diskutiert.

Die magnetooptische Falle wird auf dem geschlossenen Übergang von $5S_{1/2}$, F = 3 nach $5P_{3/2}$, F = 4 betrieben. Dieses Licht kann auch zur nicht-resonanten Anregung des $5P_{3/2}$, F = 3 Zustandes führen, der unter anderem in den Zustand $5S_{1/2}$, F = 2 zerfällt. Daher wird zusätzlich Rückpumplicht in Resonanz zum $5S_{1/2}$, F = 2 nach $5P_{3/2}$, F = 3-Übergang benötigt, um die Atome wieder in den Ausgangszustand $5S_{1/2}$, F = 3 zurückzupumpen. Aufgrund der Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands von $\Delta\nu = 3{,}035732\,\mathrm{GHz}$ werden zwei Laser benötigt.

Das Licht des Fallenübergangs ausgehend von $5S_{1/2}$, F = 3-Zustand wird mit einem Titan-Saphir-Laser Coherent 899 mit Ausgangsleistung von etwa 2 W erzeugt. Dieser wird von einem Argon-Ionenlaser Coherent Innova 400 mit etwa 14 W Leistung gepumpt. Der Titan-Saphir-Laser wird über das Signal einer Sättigungsspektroskopie mit der Pound-Drever-Hall-Methode relativ zum Interkombinationsübergang $5S_{1/2}$, F = 3 nach $5P_{3/2}$, F = 3/4 stabilisiert. Die Linienbreite des Lasers beträgt 68 kHz (RMS, 14 MHz-Bandbreite). Die Verstimmung der Laserstrahlen relativ zum gewünschten Übergang, sowie die Intensität, lässt sich jeweils mit einem akustooptischen Modulator in doppelter oder einfacher Passage einstellen.



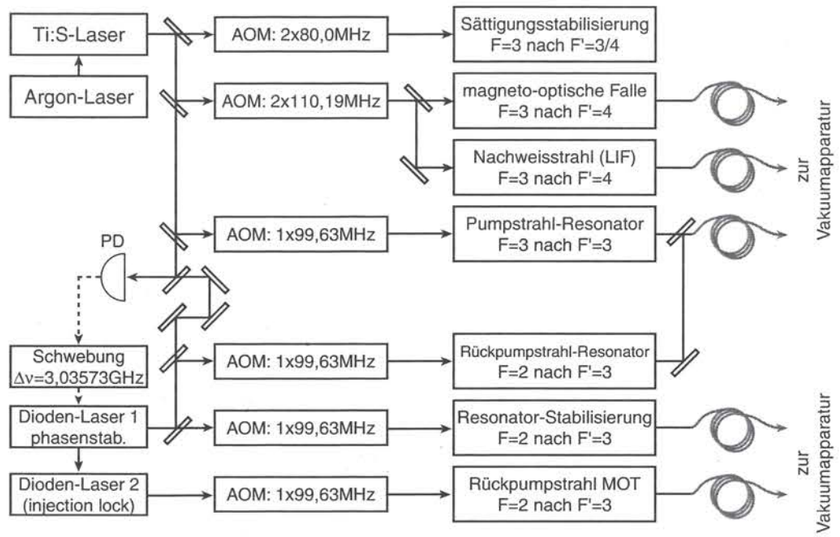



**Abbildung 3.10:** Das Lasersystem besteht im wesentlichen aus dem Titan-Saphir-Laser für alle Übergänge ausgehend vom Zustand $F$ = 3-Grundzustand von $^{85}$Rb und den beiden Diodenlasern ausgehend vom $F = 2$-Grundzustand. Der erste Diodenlaser wird über eine Phasenstabilisierung relativ zum Titan-Saphir-Laser stabilisiert. Der zweite ist durch einen Teil des Laserlichts des ersten Diodenlasers injektionsstabilisiert. Sowohl Diodenlaser wie auch Titan-Saphir-Laser sind um 99,63 MHz relativ zum Übergang nach $F' = 3$ rotverstimmt.

Das Rückpumplicht wird mit einem gitterstabilisierten Diodenlaser in Littrow-Anordnung erzeugt. Der Diodenlaser wird relativ zum Titan-Saphir-Laser phasenstabilisiert [99]. Dazu wird das Licht der beiden Laser auf einer Photodiode von New Focus Typ 1554 mit einer Grenzfrequenz von 12 GHz überlagert. Das dabei entstehende Schwebungssignal schwingt mit der Differenzfrequenz der beiden Laser. Diese Frequenz wird mit dem Signal eines Mikrowellengenerators HP83752A bei $\nu = 3{,}045732\,\mathrm{GHz}$ in einem Mischer (Minicircuits ZEM-4300MH) auf Frequenzen um 10 MHz heruntergemischt und anschließend in einem Phasen-Frequenz-Detektor [100] mit einer −10 MHz-Referenz verglichen. Das schnelle Ausgangssignal wird direkt über einen Hochpass auf den Strom der Laserdiode, sowie das integrierte Signal auf den Piezoaktuator des Gitters der Laserdiode zurückgekoppelt. Die Regelbandbreite der Rückkopplung beträgt etwa 400 kHz. Dadurch erreicht man, dass 53% der Leistung des Diodenlasers in einer Bandbreite von $\Delta\nu = \pm 8\,\mathrm{Hz}$ bei $\nu = 3{,}035732\,\mathrm{GHz}$ blauverstimmt zum Titan-Saphir-Laser sind, bzw. 93% in einer Bandbreite von $\Delta\nu = \pm 2\,\mathrm{kHz}$. Dies entspricht einer Phasenstabilität von $\Delta\phi = 46°$ (RMS). Die Phasenstabilisierung ist extrem robust gegen Erschütterungen, ein sehr großer Vorteil gegenüber dem früher für den Diodenlaser verwendeten Pound-Drever-Hall-Verfahren.

Da die Leistung des Diodenlasers nicht für alle benötigten Strahlen ausreicht, wird ein zweiter Diodenlaser durch ein Teil des Lichts des ersten Diodenlasers injektionsstabilisiert. Dieser Laser erzeugt das Rückpumplicht der magnetooptischen Falle, der erste Diodenlaser das Rückpumplicht im Resonator, sowie das Referenzlicht zur Stabilisierung des optischen Resonators. Vom Titan-Saphir-Laser stammt zusätzlich das Pumplaserlicht im optischen Resonator, sowie das Laserlicht für den Fluoreszenzdetektor.

Alle Laserstrahlen werden auf einem optischen Tisch erzeugt und anschließend mit Einmoden-Glasfasern zur Vakuumkammer übertragen. Dadurch erhält man jeweils eine ausgezeichnete $TEM_{00}$-Mode. Pumplaser und Rückpumplaser für den optischen Resonator werden vor der Faser auf dem optischen Tisch mit einem Strahlteiler überlagert, so dass nach der Faser beide Strahlen perfekt überlappen. Die Intensitäten der beiden Strahlen können über akustooptische Modulatoren mit 10 MHz ein- und ausgeschaltet werden. Über frei programmierbare Frequenzgeneratoren Tabor 8024 lassen sich beliebige Pulsformen programmieren, um eine adiabatische Photonenerzeugung zu gewährleisten. Nach der Faser wird ein elliptisches Strahlprofil im Resonator erzeugt mit den Strahltaillen $w_{hor} = 216\,\mu m$ in horizontaler und $w_{ver} = 32\,\mu m$ in vertikaler Richtung. Dadurch wird ein guter Überlapp zwischen Pump-/Rückpumplaser und Resonatormode erreicht.

# Kapitel 4

# Experimentelle Ergebnisse

Ziel des Experimentes ist es, durch einen adiabatischen Ramanprozess in einem optischen Resonator einzelne Photonen zu erzeugen. Der adiabatische Transfer über den Dunkelzustand des Atoms soll spontane Emission vermeiden und somit Verluste unterdrücken. Der Ramanprozess zur Photonenemission wird dabei durch das Vakuumfeld des optischen Resonators stimuliert, wodurch gerichtete Photonen innerhalb einer wohldefinierten Mode des Lichtfeldes entstehen. Kapitel 4.1 untersucht, ob die Erzeugung von Photonen über diesen durch das Vakuumfeld stimulierten, adiabatischen Ramanprozess möglich ist [28, 32].

Darauf aufbauend soll in Kapitel 4.2 die getriggerte Erzeugung einzelner Photonen demonstriert werden. Dazu werden die Atome abwechselnden Pump- und Rückpumplaserpulsen ausgesetzt. Während des Pumplaserpulses können sie einzelne Photonen emittieren, im folgenden Rückpumplaserpuls werden sie wieder in den Ausgangszustand zurückgepumpt. Vorausgesetzt ein einzelnes Atom befindet sich im Resonator, sollte diese Pulsfolge eine zeitlich definierte Sequenz von Einzelphotonen erzeugen. Diese Einzelphotonen müssen eine nicht-klassische Statistik aufweisen. Ein Antibunching mit $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$ der Intensitätskorrelationsfunktion des Lichts beweist dessen nicht-klassischen Charakter für einen geringen Atomfluss (Kapitel 4.2.1) [30]. Da Atome jedoch zu zufälligen Zeitpunkten durch den Resonator fallen, ist die Anzahl der Atome im Resonator poissonverteilt. Für einen beliebigen Pumplaserpuls wird nur die Atomstatistik auf die Photonenstatistik übertragen. Bei niedrigem Atomfluss lässt sich jedoch ein einzelnes Atom detektieren. Mit den darauf folgenden Pumplaserpulsen sollten sich einzelne Photonen erzeugen lassen, die schließlich der sub-Poisson-Statistik einzelner Photonen genügen (Kapitel 4.2.2) [101].

Bei kontinuierlichem Pump- und Rückpumplaser entsteht ein Ramanlaser-ähnliches System, siehe Kapitel 4.3. Da der Pumplaser nicht adiabatisch eingeschaltet wird, werden über den Ramanprozess statistisch Photonen erzeugt. Nach erfolgter Photonenemission befördert der Rückpumplasers das Atom in den Ausgangszustand zurück, worauf es sofort erneut emittieren kann. Da das Rückpumpen Zeit erfordert, kann eine zweite Photonenemission vom selben Atom erst einige hundert Nanosekunden später erfolgen. Daher zeigen die emittierten Photonen für geringen Atomfluss auch hier ein nicht-klassisches Antibunching mit $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$, d.h. sie kommen bevorzugt nicht gleichzeitig am Detektor an. In Kapitel 4.3.2 wird für höheren Atomfluss ein Übergang zu Bunching mit $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$ beobachtet. Photonen treten dann bevorzugt in Paaren auf. Da das Bunching klassisch erklärbar ist beobachtet man in Abhängigkeit der mittleren Atomzahl im Resonator einen Übergang von nicht-klassischem zu klassischem

Licht. Für sehr hohen Atomfluss wird das emittierte Licht durch kooperative Effekte zwischen den Atomen kohärenter, siehe Kapitel 4.3.3. Das umlaufende Licht wird verstärkt. Die Verluste des Resonators sind jedoch zu groß, als dass die Laserschwelle des Systems erreicht werden könnte.

Um die gepulst erzeugten einzelnen Photonen in zukünftigen Experimenten zur Quanteninformation einsetzen zu können, müssen diese in sich kohärent sein. Bei sehr hohem Atomfluss wird in Kapitel 4.4 mit Hilfe der Intensitätskorrelationsfunktion die Kohärenz des gepulst emittierten Lichts untersucht.

## 4.1 Vakuum-stimulierte Ramanstreuung

### 4.1.1 Anregungsspektren

Dieses Kapitel untersucht im wesentlichen, ob das Vakuumfeld des optischen Resonators den Ramanprozess zur Erzeugung von Photonen im Resonator stimulieren kann. Notwendig für eine hohe Effizienz des Prozesses ist ein adiabatische Transfer über den Dunkelzustand des Systems, vgl. Kap. 2.1.4, welcher eine anti-intuitive Abfolge der Wechselwirkungen mit Pumpstrahl und Resonator erfordert.

Diese Abfolge wird, entsprechend Abb. 3.1, durch eine Verschiebung der Pumplaserstrahls in Bezug auf die Resonatormode in Flugrichtung der Atome realisiert. Das Atom erreicht zuerst die Resonatormode und erfährt daher eine starke Kopplung auf dem anti-Stokes-Übergang. Die Wechselwirkung mit dem Pumplaser ist dagegen verzögert, da er die Fallstrecke um $\delta_x$ unterhalb der Resonatormode kreuzt. Die Verzögerung wurde auf eine große Anzahl aus dem Resonator emittierter Photonen optimiert.

Der Durchflug der Atome mit der Geschwindigkeit $v = 2\,\mathrm{m/s}$ durch den Resonator führt zu einer gaußförmigen Kopplung an den Resonator

$$2g(t) = 2g(y,z)\exp\left[-\left(\frac{tv}{w_C}\right)^2\right]. \tag{4.1}$$

Die Amplitude $g(y,z)$ variiert in Abhängigkeit der Position der Falllinie mit der Modenfunktion des Resonators. Das Modenprofil des Pumplasers bewirkt ebenfalls eine gaußförmige Kopplung mit

$$\Omega_P(t) = \Omega_0\exp\left[-\left(\frac{tv-\delta_x}{w_P}\right)^2\right]. \tag{4.2}$$

Der Pumplaser wird auf eine Strahltaille von $w_P = 50\,\mu\mathrm{m}$ fokussiert und hat eine Leistung von $5{,}5\,\mu\mathrm{W}$, entsprechend einer maximalen Rabifrequenz von $\Omega_0 = 2\pi\,30\,\mathrm{MHz}$.

Abb. 4.1(a) zeigt die Anzahl vom Resonator kommender, detektierter Photonen als Funktion der Verstimmung des Pumplasers, $\Delta_P$, für einen resonanten optischen Resonator, $\Delta_C = 0$. Zur Aufzeichnung der Daten, wurde die magnetooptische Falle 50 mal geladen und durch den optischen Resonator geworfen. Während die Atomwolke durch den Resonator fällt, wurde durch den Transientenrekorder $2{,}6\,\mathrm{ms}$ lang das Signal des Avalanche-Photodetektors mit einer Zeitauflösung von $25\,\mathrm{MHz}$ aufgezeichnet. Daher beträgt die Gesamtmesszeit $130\,\mathrm{ms}$. Die Dunkelzählrate der APD von $390\,\mathrm{Hz}$ führt zu $51 \pm 7$ Dunkelzählereignissen im Messintervall. Bei



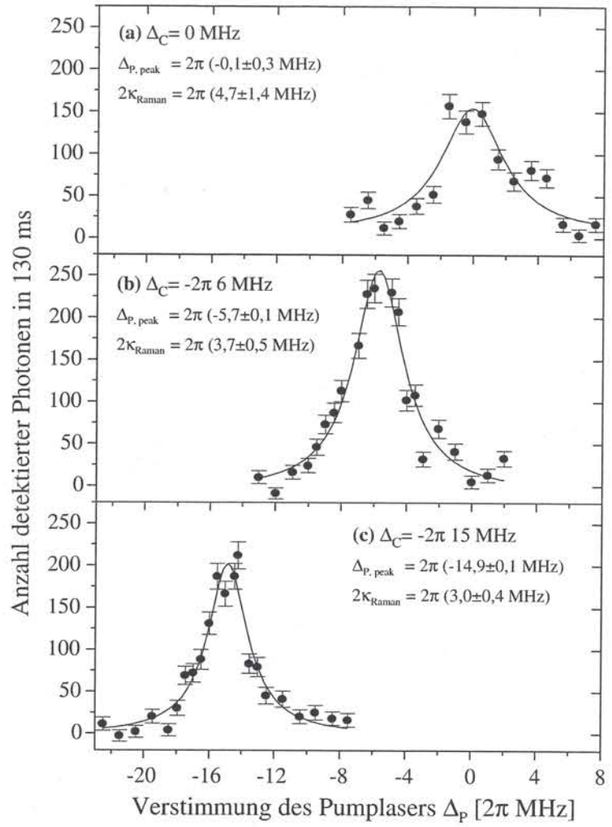



**Abbildung 4.1:** Anzahl der vom Resonator detektierten Photonen als Funktion von Pumplaser-Verstimmung $\Delta_P$ für jeweils drei verschieden Verstimmungen des Resonators $\Delta_C$. Die durchgezogenen Linien sind an die Daten angepasste Lorentzfunktionen.

den in Abb. 4.1 dargestellten Daten wurden diese Dunkelzählereignisse von den gemessenen Zählereignissen subtrahiert.

Für den resonanten Fall ($\Delta_C = 0$) beobachtet man eine maximale Emissionsrate, wenn auch der Pumplaser auf Resonanz ist ($\Delta_P = 0$). Das Signal ist etwas kleiner als bei Messungen außerhalb der Resonanz ($\Delta_C \neq 0$), vgl. 4.1(b) und (c). Die Pumplasermode weicht leicht von einem perfekten Gaußprofil ab. Daher sehen manche Atome bereits resonantes Licht bevor sie den Resonator erreichen. Durch dieses Licht können sie vom Ausgangszustand $|u\rangle$ in den Endzustand $|g\rangle$ gepumpt werden und können daher im Resonator nicht mehr zum Emissionssignal beitragen. Da die Linienbreite jedoch unterhalb der natürlichen Linienbreite liegt, kann das beobachtete Signal nicht durch einen zweistufigen Prozess einer Anregung mit dem Pumplaser, gefolgt von einer erhöhten spontanen Emission, erklärt werden. Ein Zwei-Photonen Ramanprozess erklärt hingegen die kleinere Linienbreite.

Das wird noch deutlicher, wenn der Resonator verstimmt ist, 4.1(b) und (c). Das Emissionsmaximum entfernt sich von der Resonanz zum Atom und folgt der Ramanresonanzbedingung $\Delta_P = \Delta_C$. Solch eine Verschiebung beweist, dass die Emission des Lichts nicht durch einen zweistufigen Prozess hervorgerufen wird, sondern nur über einen vom Vakuumfeld des Resonators stimulierten Ramanprozess erklärt werden kann. Für den nicht-resonanten Fall ist die Verstimmung des Pumplasers $\Delta_P$ zu groß für eine elektronische Anregung des Atoms. Deshalb regen die weit herausragenden Flanken des Pumpstrahls das Atom nicht weiter an, bevor es mit dem Resonator wechselwirkt. Die Verluste verschwinden und die maximale Photonenemissionsrate wird größer als im resonanten Fall. Man beachte zusätzlich, dass die beobachtete Linienbreite viel kleiner ist als die natürliche Linienbreite von ${}^{2\gamma}/_{2\pi} = 6\,\mathrm{MHz}$. Für $\Delta_C = -2\pi\,15\,\mathrm{MHz}$ ist die Linie nur 3 MHz breit und nähert sich der Linienbreite ${}^{2\kappa}/_{2\pi} = 2.5\,\mathrm{MHz}$ des Resonators an. Diese begrenzt auch die Linienbreite des Ramanübergangs, da $2\kappa$ die Zerfallsrate des Zielzustandes $|g,1\rangle$ ist.

Zusammenfassend zeigen diese Messergebnisse entsprechend der Simulation in Abb. 2.10, dass nur Photonen aus unserem Resonator emittiert werden, wenn die Ramanbedingung $\Delta_P = \Delta_C$ erfüllt wird und nicht für $\Delta_C = 0$ entsprechend der Bedingung für erhöhte spontane Emission. Das Experiment zeigt somit die Charakteristika des „strong-coupling"-, und nicht die des „bad-cavity"-Regimes.

### 4.1.2 Adiabatisches Folgen

Der Emissionsprozess kann im „strong-coupling"-Regime Effizienzen nahe eins erreichen, vorausgesetzt dass das System adiabatisch dem Dunkelzustand folgt. Deshalb muss der Parametersatz $\{\Omega_0, g, w_C, w_P, \Delta, \delta_x\}$ so gewählt werden, dass die Bedingung für adiabatisches Folgen, siehe Gl. (2.26), während des gesamten Prozesses erfüllt ist. Dies erfordert ein genaues Einstellen der Verschiebung $\delta_x$ zwischen Pumplaserstrahl und Resonatorachse.

Abbildung 4.2 zeigt $|(\omega^0 - \omega^\pm)/\dot{\theta}|$ als Funktion der Zeit $t$ und der Verschiebung $\delta_x$. Je kleiner dieses Verhältnis ist, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit einer nicht-adiabatischen Zeitentwicklung. Offensichtlich sind für jedes mögliche $\delta_x$ solche Bereiche beteiligt. Die Zeitentwicklung ist immer nicht-adiabatisch bevor und nachdem das Atom mit Pumplaser und Resonator wechselwirkt. Da jedoch sowohl die Kopplungsstärke $2g$ wie auch die Rabifrequenz $\Omega_P$ in diesen Bereichen klein ist, bleibt die Besetzung in den Eigenzuständen des ungekoppelten Systems.

Ein besonders kritischer Punkt wird erreicht, wenn $|\dot{\theta}|$ seinen Maximalwert erreicht, in Abb. 4.2 dargestellt durch die gestrichelte Linie. Dieser Punkt liegt auf der Trajektorie zwischen der Resonatorachse und der Mitte des Pumplaserstrahls. Für $|\delta_x| > \max(w_C, w_P)$ ist hier die Niveauaufspaltung $|\omega^0 - \omega^\pm|$ zu klein, um Adiabasie zu gewährleisten. Es treten Verluste in andere Zustände auf. Nur im Bereich für $|\delta_x/2| < \min(w_C, w_P)$ ist die Adiabasie auch für große $|\dot{\theta}|$ erfüllt. Das Verhalten wird hier im wesentlichen definiert durch die Projektion des Anfangszustands $|u,0\rangle$ auf die Eigenzustände des gekoppelten Drei-Niveau-Systems, vgl. Kapitel 2.1.3, sobald der adiabatische Bereich erreicht wird. Abhängig von $\delta_x$ ergeben sich nun verschiedene Möglichkeiten der Projektion:

1. $\delta_x > 0$: Das Atom koppelt zuerst an den Pumplaser. Der Zustand $|u,0\rangle$ wird auf den leuchtenden Zustand $|B\rangle$ projiziert. Die Anregung geht durch spontane Emission verloren.



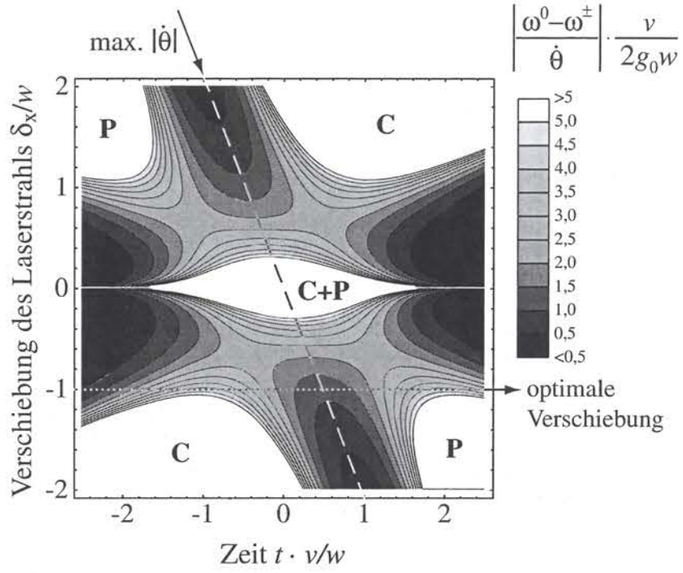



**Abbildung 4.2:** Bereiche von hoher und niedriger Adiabasie: Der Grauverlauf zeigt $|(\omega^0 - \omega^\pm)/\dot{\theta}|$ als Funktion von Zeit und Verschiebung des Pumplaserstrahls für $\Delta = 0, w_C = w_P \equiv w$ und $\Omega_0 = 2g$. In den Bereichen markiert mit **C** und/oder **P** koppelt das Atom an den Resonator und/oder den Pumplaser. In den dunklen Bereichen ist die Adiabasie nicht sichergestellt. Bei maximalem $|\dot{\theta}|$ (gestrichelte Linie) ist die Wahrscheinlichkeit für nicht-adiabatische Verluste am größten. Die optimale Atomtrajektorie (gepunktete Linie) führt zu maximaler Emissionswahrscheinlichkeit in unserem Experiment.

2. $\delta_x \approx 0$: Der Dunkelzustand $|D\rangle$ wird teilweise besetzt, so dass die Emissionswahrscheinlichkeit bis zu 50% erreichen kann.

3. $\delta_x < 0$: Das Atom koppelt zuerst an den Resonator. Der Zustand $|u,0\rangle$ wird auf den Dunkelzustand $|D\rangle$ projiziert. Für starke Kopplung treten kaum Verluste durch spontane Emission auf und das Photon wird mit einer Wahrscheinlichkeit nahe 100% emittiert.

Abbildung 4.3(a) zeigt die Anzahl detektierter Photonen als Funktion der Verschiebung des Pumplaserstrahls $\delta_x$ für fünf verschiedene Pumpintensitäten. Die Photonen werden innerhalb von 5,24 ms beim Durchflug einer Atomwolke registriert. Pumpstrahl und Resonator sind ramanresonant mit einer gemeinsamen Verstimmung von $\Delta = 10\,\mathrm{MHz}$ relativ zum angeregten Niveau $|e\rangle$. Die Verschiebung des Pumplaserstrahls wird über einen piezoelektrischen Spiegel (New Focus 8809) eingestellt. Strahltaille und Position des Laserstrahls werden zusätzlich mit einer CCD-Kamera kontrolliert. Das Maximum der Messkurve, die zur kleinsten Pumpintensität gehört wird zur Kalibrierung des $\delta_x$-Ursprungs verwendet. Dahinter steckt die Annahme, dass bei kleiner Pump-Rabifrequenz eine adiabatische Zeitentwicklung nur für $\delta_x = 0$ stattfindet, so dass die größte Emissionsrate bei nicht verschobenem Pumplaserstrahl auftritt. Von dieser Position verschiebt sich das Maximum der Photonenemission mit wachsender Pump-Rabifrequenz zu negativen $\delta_x$, da die Niveauaufspaltung $|\omega^0 - \omega^\pm|$ und damit der adiabatische Bereich mit $\Omega_P$

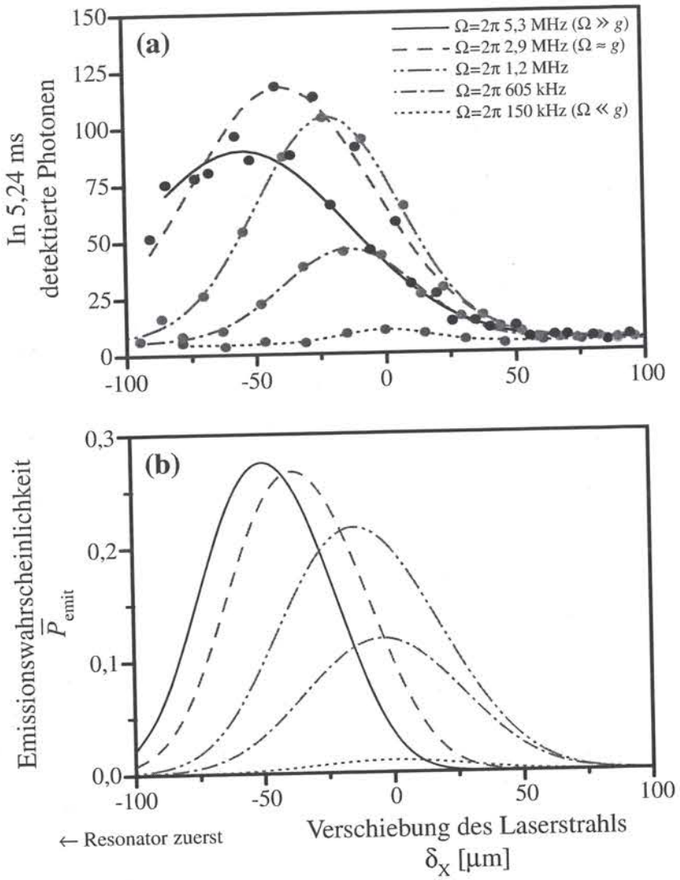



**Abbildung 4.3: (a)** Anzahl vom Resonator innerhalb von $5{,}24\,\mathrm{ms}$ emittierter Photonen als Funktion der vertikalen Verschiebung des Pumplaserstrahls relativ zur Resonatorachse bei verschiedenen Pumpintensitäten. Eine anti-intuitive Pulssequenz ist für negative $\delta_x$ realisiert. Die angegebenen Rabifrequenzen ergeben sich aus den gemessenen Strahlintensitäten zusammen mit einer angenommenen Strahltaille von $w_P = 44\,\mu\mathrm{m}$, wodurch man die beste Übereinstimmung mit den numerischen Simulationen aus (b) erhält. **(b)** Simulation der Photonenemissionswahrscheinlichkeit gemittelt über alle möglichen Trajektorien der Atome als Funktion der Verschiebung des Pumplaserstrahls $\delta_x$ für verschiedene Pumpintensitäten. Die übrigen Parameter sind $(g^{max}; \Delta; \kappa; \gamma) = 2\pi\,(2{,}5; 10; 1{,}25; 3)\,\mathrm{MHz}$ und $(w_C; w_P) = (35; 44)\,\mu\mathrm{m}$.

größer werden. Für negatives $\delta_x$ erhöht sich der Anteil der Projektion auf den Dunkelzustand am Rand des adiabatischen Bereichs und damit die Emissionswahrscheinlichkeit. Die Messung zeigt auch, dass ein signifikanter Überlapp zwischen Pumplaserstrahl und Resonatormode nötig ist, um Photonen zu erzeugen. Andernfalls ist die Adiabasie für maximales $|\dot{\theta}|$ nicht gewährleistet. Das Signal fällt für $\delta_x \to -\infty$ wieder ab. Für unser Experiment wird das Optimum für $\Omega_P \approx g$ und $\delta_x \approx -(w_C + w_P)/2$ erreicht.



Ein Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit einer numerischen Simulation des Prozesses muss berücksichtigen, dass die Trajektorien der Atome nicht kontrolliert werden. Die Kopplung $g$ variiert mit der Position $(y, z)$ jedes Atoms in Bezug auf die Mode des Resonators. Zur exakten Simulation des Systems muss wegen der nicht-Linearität von $P_{emit}(g)$ das Mittel über alle möglichen Trajektorien gebildet werden, entsprechend

$$\bar{P}_{emit} = \int_0^{\lambda} dz \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \frac{P_{emit}(g(y,z))}{\lambda \Delta y}, \tag{4.3}$$

wobei $\Delta y$ die Breite des Spalts oberhalb des Resonators ist. Dieser Spalt begrenzt mögliche Trajektorien der Atome auf das Intervall $[-\Delta y/2, \Delta y/2]$. Zur Berechnung der mittleren Emissionswahrscheinlichkeit $\bar{P}_{emit}$ wird $P_{emit}(g(y,z))$ durch numerisches Lösen der Mastergleichung entsprechend Kapitel 2.2.6 berechnet und anschließend über Gl. (4.3) integriert.

Abbildung 4.3(b) zeigt das Ergebnis der Simulation von $\bar{P}_{emit}$ als Funktion von $\delta_x$ entsprechend der im Experiment verwendeten Rabifrequenzen. Für die kleinste Rabifrequenz liegt die höchste Emissionswahrscheinlichkeit bei $\delta_x = 0$, wodurch unsere $\delta_x$-Kalibrierung gerechtfertigt wird. Zudem zeigt auch die Simulation die im Experiment beobachtete Verschiebung der maximalen Emissionswahrscheinlichkeit zu negativen $\delta_x$ für höhere Pump-Rabifrequenzen. Experiment und Simulation stimmen jedoch nicht perfekt überein, insbesondere zeigt die Simulation keinen Rückgang der Emissionswahrscheinlichkeit für sehr hohe Pumpintensitäten. Wie bereits die geringere Emissionswahrscheinlichkeit auf Resonanz im letzten Kapitel, kann dieser Unterschied dadurch erklärt werden, dass die Atome durch Streulicht oder eine Abweichung des Pumplaserstrahls von einer gaußschen Mode bereits vor der Kopplung an den Resonator signifikant an den Pumplaser koppeln. Dieser kann die Atome bei hohen Intensitäten trotz Verstimmung aus dem Ausgangszustand $|u\rangle$ wegpumpen, wodurch diese Atome für eine Photonenemission in den Resonator verlorengehen.

Die sehr gute Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Betrachtungen und den Simulationen legt nahe, dass die vakuumstimulierte Photonenerzeugung hauptsächlich durch adiabatischen Transfer erfolgt. Dazu ist eine anti-intuitive Pulssequenz nötig, d.h. die Atome müssen zuerst an die leeren Mode des Resonators ankoppeln, bevor sie durch einen ansteigende Pumplaserintensität zur adiabatischen Passage getrieben werden. Um eine adiabatische Zeitentwicklung sicherzustellen und Verluste in andere Zustände zu vermeiden, ist ein signifikanter Überlapp zwischen Resonatormode und Pumplaserstrahl erforderlich. Optimale Bedingungen werden im Experiment erreicht, wenn die Rabifrequenz des Pumplasers $\Omega_P$ mit der Kopplungsstärke an den Resonator $g^{max}$, sowie die Verschiebung des Pumplaserstrahls mit dem arithmetischen Mittel der Strahltaillen von Resonatormode und Pumplaserstrahl übereinstimmen.

## 4.2 Die gepulste Einzelphotonenquelle

Bisher kann jedes Atom während seines Durchflugs durch den Resonator maximal ein Photon erzeugen. Kombiniert man nun den vakuum-stimulierten Ramanprozess zur Photonenerzeugung aus Kapitel 4.1 mit einem zusätzlichen Rückpumpmechanismus, der das Atom in den

Ausgangszustand zurückbefördert, so kann jedes Atom im Prinzip eine getriggerte Sequenz von Einzelphotonen erzeugen.

Im Experiment wird dazu eine kontinuierliche Pulssequenz von abwechselnden Pumplaser- und Rückpumplaserpulsen verwendet, siehe Abb. 4.4(a). Jedes Atom, das zu einem zufälligen Zeitpunkt durch den Resonator fällt kann während der Pumplaserpulse Photonen in den Resonator emittieren und wird anschließend vom nächsten Rückpumplaserpuls wieder in den Ausgangszustand zurückbefördert. Die Rabifrequenzen von Pumplaser und Rückpumplaser haben eine Sägezahnstruktur. Der lineare Anstieg des Pumplaserpulses führt zu Beginn zu einer konstanten Winkeländerung $\dot{\theta}$ des Dunkelzustandes und somit zu optimaler Adiabasie, also minimalen Verlusten in andere Eigenzustände. Für den Rückpumplaser wurde ebenfalls eine linear ansteigende Rabifrequenz gewählt, um Seitenbänder zu vermeiden, welche zur Emission von Photonen in den verstimmten Resonator führen. Man beachte, dass der Rückpumpprozess vor dem Ende des Rückpumppulses abgeschlossen ist, so dass das plötzliche Ausschalten des Lasers keinen Einfluss hat.

In Abbildung 4.4(b) ist die Verteilung der Ankunftszeiten der detektierten Photonen dargestellt. Offensichtlich ist die Dauer von 2 µs des Pumplaserpulses etwas zu kurz, so dass der emittierte Photonenpuls abrupt abgeschnitten wird. Ein längerer Pumppuls würde jedoch die Repetitionsrate und damit die Rate emittierter Photonen reduzieren.

Die gemessenen Daten stimmen gut mit der Simulation dargestellt in Abb. 4.4(c) überein. In Experiment (b) und Simulation (c) sind die Ankunftszeiten der Photonen gemittelt über die gesamte Resonatormode als durchgezogene Linie dargestellt. In der Simulation wurde dazu die Emissionsrate $R_{emit}(t) = 2\kappa\langle P_{g,1}(t)\rangle$ für festen Ort $(x, y, z)$ über das Volumen gemittelt, entsprechend

$$\tilde{R}_{emit}(t) = \frac{1}{F}\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} dx \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} dy \int_{0}^{\lambda} dz \, \frac{R_{emit}(g(x,y,z), \Omega_P(x), \Omega_R(x), t)}{\lambda \Delta y \Delta x}, \qquad (4.4)$$

wobei $y$- und $z$-Integrationen analog Gl. (4.3) durchgeführt wurden. Die Grenzen der $x$-Integration waren $\Delta x = 2{,}3\, w_C$, also deutlich größer als der Bereich der Resonatormode, wodurch der größte Teil der zur Emission beitragenden Atome berücksichtigt wird. Die Rabifrequenzen des Pumplasers $\Omega_P(x)$ und des Rückpumplasers $\Omega_R(x)$ sind in $x$-Richtung als Gaußfunktion mit einer Strahltaille von $w_{R,P} = 32\,\mu\text{m}$ und in der Zeit als linear ansteigender Sägezahn, entsprechend Abb. 4.4(a), modelliert. $F$ ist eine Normierungskonstante, so dass $\int_0^{4\,\mu\text{s}} dt\, \tilde{R}_{emit}(t) = 1$. Der Vergleich der gemessenen Ankunftszeiten mit der Simulation zeigt, dass im Experiment die Photonen den Resonator im Mittel etwas später verlassen. Es ist wahrscheinlich, dass die Atome nach mehrfacher Photonenemission und anschließendem Rückpumpen in magnetische Unterzustände gepumpt werden, die schwächer an den Resonator koppeln. Simulationen zeigen, vgl. Abb. 2.9, dass für eine schwächere Kopplung $g$ zwischen Resonator und Atom die Emission später erfolgt, entsprechend der experimentellen Beobachtung.

Als gestrichelte Linie ist in Abb. 4.4(c) die simulierte Pulsform des Photons für ein Atom im Bauch der Resonatormode dargestellt. Aufgrund der höheren Kopplung erfolgt die Emission zu einem früheren Zeitpunkt. Auch im Experiment ist diese frühere Emission zu sehen, wenn nur stark gekoppelte Atom berücksichtigt werden. Zum Herausfiltern dieses Signals wird angenommen, dass stark gekoppelte Atome während ihrer Wechselwirkungszeit mit dem Resonator



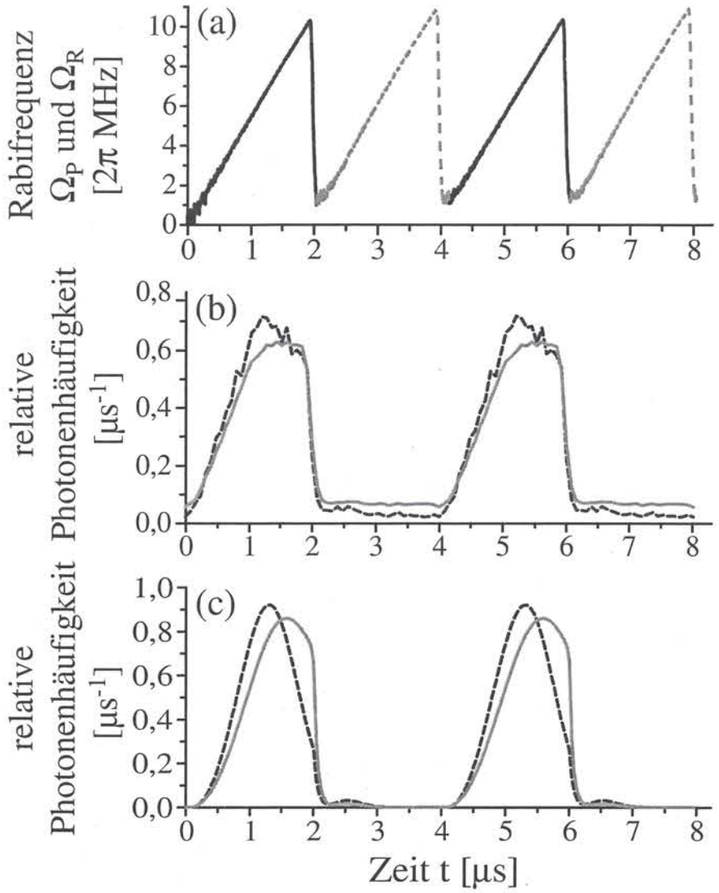



**Abbildung 4.4:** Pulssequenz. (a) Die Atome werden periodisch mit 2 µs-langen Pumplaser- (durchgezogene Linie) und Rückpumplaserpulsen (gestrichelte Linie) angeblitzt. (b) Verteilung der Ankunftszeiten der detektierten Photonen. Die gestrichelte Linie zeigt die entsprechende Verteilung für stark gekoppelte Atome (siehe Text). (c) Simulation des Emissionsprozesses mit $(g, \Omega^0_{P,R}, \Delta_{P,R}, \gamma, \kappa) = 2\pi\ (2{,}5, 8, -20, 3, 1{,}25)\,\text{MHz}$ (gestrichelte Linie), wobei $\Omega^0_{P,R}$ die maximalen Rabifrequenzen der Pump- und Rückpumplaserpulse sind, sowie über das Resonatorvolumen gemittelter Emissionsprozess (durchgezogene Linie, siehe Text).

mehrere Photonen emittieren, vgl. Abb. 4.5. Daher werden einzelne Photonenereignisse innerhalb dieser Wechselwirkungszeit entfernt und anschließend die Ankunftszeit der verbleibenden Photonen relativ zum Pumplaserpuls bestimmt.[1]

[1] Man beachte, dass bei einem unitären Prozess die Pulsform gleich der Einhüllenden des Photonenwellenpakets ist, und nicht als Unsicherheit des Emissionszeitpunkts betrachtet werden darf. Ein Detektorereignis zu einem bestimmten Zeitpunkt bedeutet nur, dass das Photon innerhalb seines Wellenpaketes lokalisiert wird.

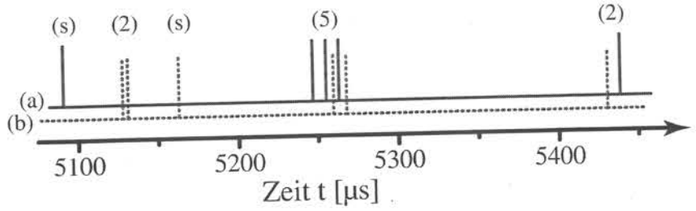



**Abbildung 4.5:** Ausschnitt des mit den Avalanche-Photodioden detektierten Stroms an Photonen. Sichtbar sind Sequenzen von zwei (2) und fünf (5) detektierten Photonen, welche innerhalb der Wechselwirkungsdauer eines Atoms mit dem Resonator liegen. Die einzeln detektierten Photonen (s) sind entweder Dunkelpulse des Detektors oder Photonen von Atomen, die nur sehr schwach an den Resonator gekoppelt sind.

Aus der Simulation ergibt sich pro Pumplaserpuls eine Emissionswahrscheinlichkeit von $61\%$ für ein maximal gekoppeltes Atom. Eine über die Resonatormode gemittelte Emissionswahrscheinlichkeit hängt sehr stark von den jeweils gewählten Integrationsgrenzen (insbesondere in vertikaler Richtung) ab und ist daher nur begrenzt sinnvoll. Grob vergleichen lässt sich die mittlere Anzahl an Photonen pro durchfallendem Atom. In der Simulation werden im Mittel $0{,}93$ Photonen pro Atom emittiert. Im Experiment werden im Mittel $0{,}3$ Photonen pro leuchtendem Atom detektiert. Berücksichtigt man die Detektionseffizienz von $73\% \times 50\% = 36{,}5\%$, so sollten $0{,}8$ Photonen pro leuchtendem Atom emittiert werden. Dieser Wert ist eine Abschätzung nach oben, da viele Atome am Resonator vorbeifallen und somit nicht leuchten. Für die eigentlich wichtige Größe, die Effizienz der Erzeugung eines einzelnen Photons, muss zusätzlich die Wahrscheinlichkeit berücksichtigt werden, dass sich ein einzelnes Atom im Resonator befindet. Diese konditionierte Emissionswahrscheinlichkeit lässt sich aus der Intensitätskorrelationsfunktion der emittierten Photonen bestimmen und wird im folgenden Kapitel genauer diskutiert.

### 4.2.1 Gepulste Photonenstatistik

Die Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(\tau)$ des detektierten Stroms an Photonen, gemessen mit dem Hanbury-Brown & Twiss-Aufbau, ist in Abb. 4.6 dargestellt. Da Photonen, wie in Abb. 4.4 zu sehen, nur während der Pumplaserpulse und nicht während der Rückpumplaserpulse emittiert werden, liegen alle Maxima der gemessenen Intensitätskorrelationsfunktionen bei ganzzahligen Vielfachen der Pumplaserperiode. Die annähernd gaußförmige Einhüllende der kammartigen Struktur ist offensichtlich durch die begrenzte Wechselwirkungsdauer des Atoms mit der Resonatormode bedingt. Am bemerkenswertesten ist jedoch das deutlich kleinere Korrelationsmaximum bei $\tau = 0$ im Vergleich zu den beiden benachbarten Maxima. Die Intensitätskorrelationsfunktion ist für $\tau = 0$ kleiner als für $\tau \neq 0$, verletzt dadurch die Schwartz'sche Ungleichung (2.87) und ist folglich nur nicht-klassisch erklärbar.

Für eine genauere Betrachtung muss man berücksichtigen, dass die Atome zufällig durch den Resonator fallen. Die Anzahl der Atome innerhalb des Resonators ist dabei poissonverteilt. Zum Beispiel ist für einen Atomfluss von $10\,\mathrm{Atomen/ms}$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Atom innerhalb des Resonators befindet, $15\%$. Entsprechend liegt die Wahrscheinlichkeit,



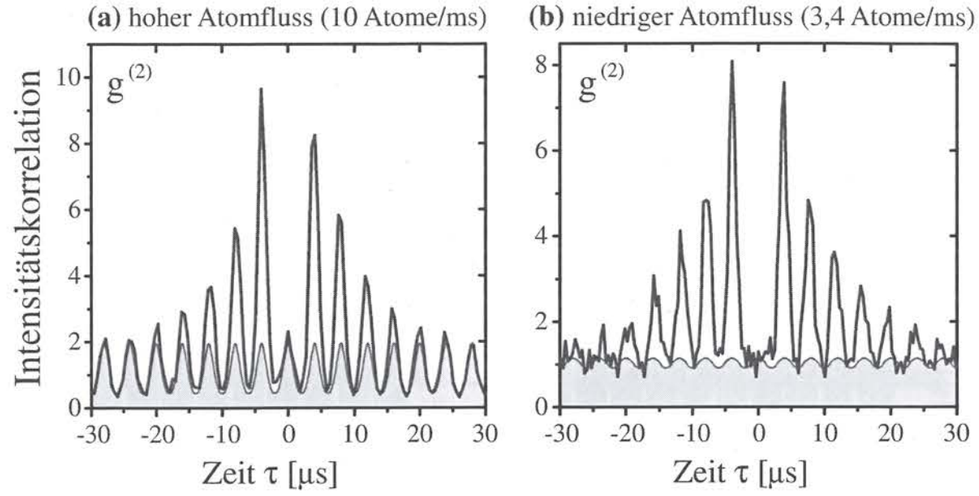



**Abbildung 4.6:** Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(\tau)$ des Stroms detektierter Photonen. **(a)** Hoher Atomfluss, gemittelt über 4998 Messzyklen (Laden der MOT, Fallen lassen der Atomwolke, $7{,}86\,\mathrm{ms}$ Messdauer) mit insgesamt 151089 detektierten Photonen. Die schattierte Fläche ist jeweils das periodisch gemittelte Signal für lange Verzögerungszeiten, periodisch fortgesetzt nach $\tau = 0$. Dieses ergibt sich aus Korrelationen zu anderen Atomen (oszillierender Anteil) sowie zum Rauschen des Detektors (konstanter Anteil). Das überschüssige Signal ist das Korrelationssignal der Photonen eines einzelnen Atoms (vgl. Text). **(b)** Niedriger Atomfluss, gemittelt über 15000 Messzyklen mit insgesamt 184868 detektierten Photonen. Für lange Verzögerungszeiten verbleiben überwiegend Korrelationen mit dem Detektorrauschen.

mehr als ein Atom vorzufinden, bei $1{,}4\%$. Diese ebenfalls an den Resonator gekoppelten Atome führen zu zusätzlich emittierten Photonen während desselben Pumplaserpulses und damit zu einem nicht verschwindenden Korrelationsmaximum für $\tau = 0$, siehe Abb. 4.6(a).

Der Beitrag zusätzlicher Atome lässt sich über folgende Überlegung bestimmen: Die Wahrscheinlichkeit weitere Atome anzutreffen ist für jede beliebige Verzögerungszeit $\tau$ gleich groß. Daher führen Photonen, die von verschiedenen Atomen erzeugt werden, zu einem periodischen Beitrag der Korrelationsfunktion mit konstanter Amplitude für alle Verzögerungszeiten $\tau$. Ein zusätzlicher konstanter Beitrag ergibt sich aus den Korrelationen mit dem Rauschen der Detektoren. Diese beiden Beiträge lassen sich für für $|\tau| \to \infty$ bestimmen, indem das Korrelationssignal periodisch gemittelt und anschließend periodisch nach $t \to 0$ fortgesetzt wird (schattierte Fläche in Abb. 4.6). Das überschüssige Signal ist das Korrelationssignal der Photonen eines einzelnen Atoms. Das Maximum bei $\tau = 0$ ist genauso hoch, wie die Maxima für $|\tau| \to \infty$. Folglich kann ein einzelnes Atom innerhalb desselben Pumplaserpulses kein weiteres Photon emittieren. Erst nach erfolgtem Rückpumpen wird im nächsten Pumplaserpuls ein weiteres Photon vom selben Atom erzeugt, was zu einem höheren Maximum bei $\tau = 4\,\mu\mathrm{s}$ führt. Die folgenden Maxima werden zunehmend kleiner, da das Atom mit größer werdender Wahrscheinlichkeit den Resonator verlässt.

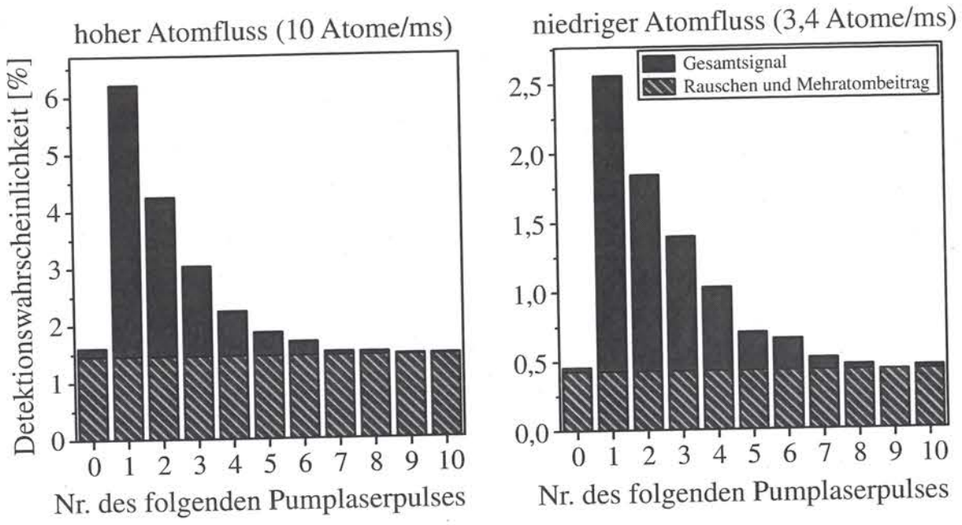



**Abbildung 4.7:** Wahrscheinlichkeit einer Photonendetektion nach der Detektion eines ersten Photons. Es ist jeweils die Wahrscheinlichkeit für den nächsten (1), übernächsten(2), usw. Pumplaserpuls nach $4\,\mu s, 8\,\mu s, \ldots$ dargestellt. Für viel spätere Intervalle geht die Detektionswahrscheinlichkeit auf den Untergrundsbeitrag von Rauschen und zusätzlichen Atomen (schraffiert) zurück.

Für einen kleineren Atomfluss von $3{,}4\,\mathrm{Atome/ms}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Atom im Resonator aufhält, mit $5{,}7\%$ kleiner als für höheren Atomfluss. Die Wahrscheinlichkeit mehr als ein Atom vorzufinden verringert sich umso mehr auf $0{,}18\%$. Daher verschwindet der periodische Mehratombeitrag in der Intensitätskorrelationsfunktion in Abb. 4.6(b) im Rauschen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit können nun einzelne Photonen erzeugt werden, wenn sich ein Atom im Resonator aufhält? Dazu muss man erst wissen, dass tatsächlich ein Atom im Resonator ist. Dies kann über die Detektion eines Photons innerhalb eines Intervalls eines Pumplaserpulses zum Zeitpunkt $t$ erfolgen. Es zeigt die Anwesenheit eines Atoms mit der Wahrscheinlichkeit $P_{atom} = R_{atom}/(R_{noise} + R_{atom})$ an, wobei $R_{atom}$ und $R_{noise}$ die Rate an detektierten Photonen von Atomen bzw. vom Detektorrauschen innerhalb dieser Intervalle sind. Für den hohen Atomfluss ($10\,\mathrm{Atome/ms}$) ist $P_{atom} = 85\%$, für den niedrigen Atomfluss ($3{,}4\,\mathrm{Atome/ms}$) ergibt sich $P_{atom} = 47\%$.

In den nachfolgenden Intervallen der Pumplaserpulse kann nun das detektierte Atom weitere Photonen emittieren. Aus den gemessenen Daten lässt sich direkt bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit, auf ein erstes Detektorsereignis konditioniert, in den folgenden Pumppuls-Intervallen, nach $4\,\mu s, 8\,\mu s, \ldots$, weitere Photonen detektiert werden. Angenommen man hat $N_{cond}$ Konditionierungsereignisse (Atome und Rauschen) gemessen und zählt nun $N_1$ Ereignisse im Intervall $4\,\mu s$ später, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $P_{det}(1) = N_1/N_{cond}$ für die konditionierte Detektion eines weiteren Photons. Ebenso lässt sich die konditionierte Detektionswahrscheinlichkeit für die übernächsten(2), usw.(3,4,...) Intervalle bestimmen. Das Ergebnis ist in Abb. 4.7 dargestellt. Für weit entfernte Pumpintervalle nimmt die konditionierte



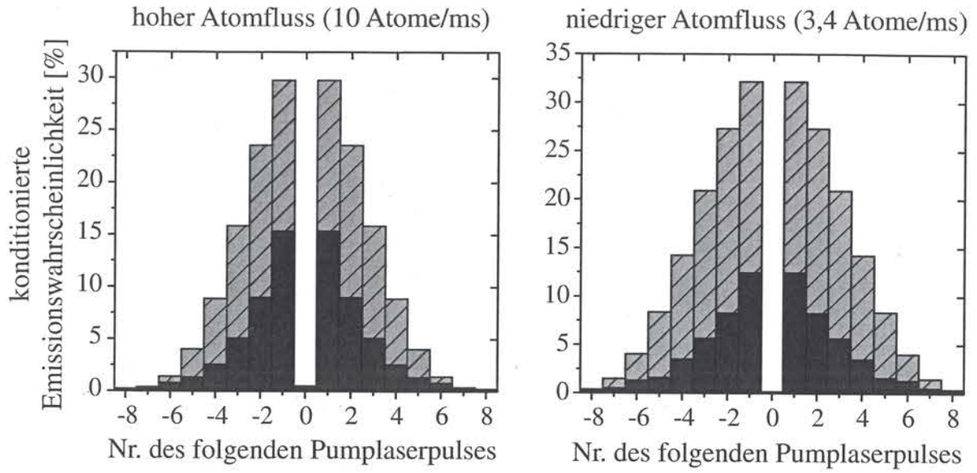



**Abbildung 4.8:** Vergleich von Theorie und Experiment der konditionierten Emissionswahrscheinlichkeit $P_{emit}$ eines idealen, einzelnen, durch den Resonator fallenden Atoms, ohne zusätzliche Atome und Detektorrauschen. Im Experiment (blau, unschraffiert) fällt $P_{emit}$ für die folgenden Pulse schneller ab als in der Theorie (grün, schraffiert) und ist um einen Faktor 2-3 kleiner. Die geringere Emissionswahrscheinlichkeit kann nicht allein durch einen dejustierten Nachweisaufbau erklärt werden. Vielmehr ist ein zunehmendes Umpumpen in magnetische Unterzustände, welche schwächer an den Resonator koppeln, wahrscheinlich.

Wahrscheinlichkeit immer weiter ab, da das Atom den Resonator verlässt, bzw. in Zustände umgepumpt wird, welche schwächer mit dem Resonator wechselwirken. Sie geht bis auf den Untergrundsbeitrag von zusätzlichen Atome sowie von Detektorrauschen $P_\infty$ zurück. Die Wahrscheinlichkeit im selben Pumplaserpuls $P_{det}(0)$ ein weiteres Photon zu detektieren ist gleich $P_\infty$, d.h. das einzelne Atom emittiert nur ein einzelnes Photon. Für den niedrigen Atomfluss ist die konditionierte Detektionswahrscheinlichkeit $P_{det}$ kleiner als bei hohem Atomfluss, da hier das Konditionierungsereignis mit höherer Wahrscheinlichkeit durch Detektorrauschen hervorgerufen und daher mit geringerer Wahrscheinlichkeit ein Atom detektiert wird.

Um die gemessenen Wahrscheinlichkeiten mit einer numerischen Simulation vergleichen zu können, muss der Idealfall eines einzelnen durch den Resonator fallenden Atoms bestimmt werden. Aus den Messdaten lässt sich diese ideale Emissionswahrscheinlichkeit ableiten, wenn man berücksichtigt, dass die Detektionswahrscheinlichkeit im Verhältnis zur Emissionswahrscheinlichkeit um die Transmission des Raumfilters $T = 73\%$, die Detektoreffizienz $\eta = 50\%$ und die Detektionswahrscheinlichkeit von Atomen $P_{atom}$ abgeschwächt ist. Zudem gibt es für ein solches ideales Atom keine zusätzlichen Atome und kein Detektorrauschen. Daraus ergibt sich die ideale konditionierte Emissionswahrscheinlichkeit $P_{emit}(i) = \frac{P_{det}(i) - P_\infty}{\eta T P_{atom}}$. Ein solches ideales, einzelnes Atom würde mit $P_{emit} = (15{,}3\%; 9{,}0\%; 5{,}1\%; \ldots)$ im $(1.; 2.; 3.; \ldots)$ folgenden Pumplaserpuls für den hohen Atomfluss, sowie mit $P_{emit} = (12{,}4\%; 8{,}3\%; 5{,}7\%; \ldots)$ für den niedrigen Atomfluss weitere Photonen emittieren, vgl. Abb. 4.8.

Zur Berechnung der entsprechenden idealen konditionierten Emissionswahrscheinlichkeit in einer numerischen Simulation, siehe Abb. 4.8 (schraffiert), wurde die Emissionswahrscheinlichkeit eines einzelnen Atoms über die räumliche Verteilung der Atome gemittelt

$$P_{cond}(\tau) = \frac{\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} dx \langle P_{emit}(x,y,z) P_{emit}(x+v\tau,y,z)\rangle_{y,z}}{\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} dx \langle P_{emit}(x,y,z)\rangle_{y,z}} \quad \text{mit}$$

$$P_{emit}(x,y,z) = \int_0^{2\,\mu s} dt R_{emit}(g(x,y,z), \Omega_P(x), \Omega_R(x), t). \tag{4.5}$$

Gewichtet mit der Emissionswahrscheinlichkeit an einem festen Ort $x$ wird hier die Emissionswahrscheinlichkeit an den Orten $x + v\tau$ berechnet, an der sich das Atom beim nächsten, übernächsten, usw. Pumplaserpuls befindet. Atome, die am Ort $x$ wahrscheinlicher emittieren, tragen somit stärker zur obigen konditionierten Emissionswahrscheinlichkeit $P_{cond}$ bei. Die Notation $\langle \cdot \rangle_{y,z}$ zeigt an, dass für festes $x$ über $y$ und $z$, entsprechend den in (4.4) verwendeten Grenzen, gemittelt werden muss. Die konditionierten Wahrscheinlichkeiten der Simulation liegen um einen Faktor 2-3 über den gemessenen Werten, vgl. Abb. 4.8. Eine Dejustage des Hanbury-Brown & Twiss-Aufbaus könnte nur einen Teil dieses Unterschieds erklären. Da die gemessenen Wahrscheinlichkeiten jedoch zudem für die folgenden Laserpulse schneller abfallen, liegt es nahe, dass die Atome zunehmend schwächer an den Resonator gekoppelt werden. In der Simulation wurde aus Laufzeitgründen die magnetische Substruktur der Hyperfeinzustände der Atome nicht berücksichtigt. Es liegt jedoch nahe, dass die Atome mit der Zeit in Zeemanzustände gepumpt werden, die schwächer an den Resonator gekoppelt sind und daher mit geringerer Wahrscheinlichkeit emittieren.

### 4.2.2 Konditionierte Erzeugung einzelner Photonen

Nach wie vor fallen die Atome jedoch zu zufälligen Zeiten durch den Resonator. Kann man nach der Detektion eines Atoms (durch die Detektion eines Photons in einem Pumppuls-Intervall) in den folgenden Intervallen tatsächlich einzelne Photonen erzeugen? Um diese Frage zu klären, muss die Statistik des Lichtfeldes in diesen Intervallen bestimmt werden. Sie lässt sich mit Hilfe des Hanbury-Brown & Twiss-Aufbaus direkt messen. Wird nur ein einzelnes Photon erzeugt, dann kann dieses nur von einem der Detektoren nachgewiesen werden. Zusätzliche Atome können jedoch zusätzliche Photonen emittieren. Dann können beide Detektoren im gleichen Intervall Photonen detektieren. Trotz der Möglichkeit, dass weitere Atome vorhanden sind, sollte die gemittelte Statistik innerhalb der Intervalle entsprechend folgender Überlegung sub-poissonsch bleiben:

Das durch das Konditionierungsphoton mit $P_{det}$ detektierte Atom kann im folgenden Pumplaserpuls mit der oben berechneten Wahrscheinlichkeit $P_{cond}$ ein einzelnes Photon erzeugen. Dem ist das Signal des Detektorrauschens überlagert, das in guter Näherung poissonverteilt ist. Auch die zusätzlichen Atome, die poissonverteilt angenommen werden, sollten einen poissonverteilten Beitrag zum Lichtfeld liefern. Das Verhältnis des Beitrags eines einzelnen Photons



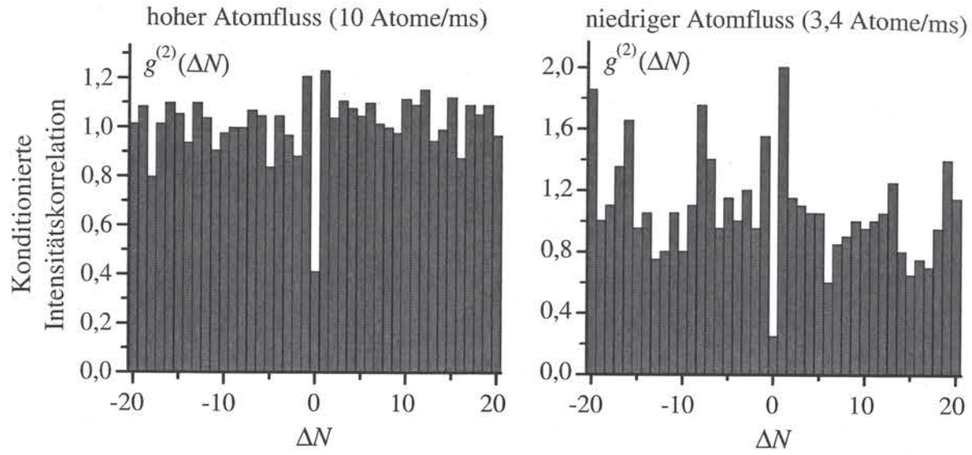



**Abbildung 4.9:** Sub-Poisson-Statistik der konditionierten Intensitätskorrelationsfunktion. Die Detektion eines ersten Photons zeigt die Anwesenheit eines Atoms an. Im direkt vorhergehenden Intervall befand sich dieses Atom mit hoher Wahrscheinlichkeit bereits im Resonator. Dadurch wird die Atomstatistik in diesem Intervall sub-poissonsch. Dies spiegelt sich entsprechend in der Statistik der emittierten Photonen in diesem Intervall wider, wenn pro Atom maximal ein Photon emittiert wird, $g^{(2)}(0) < 1$. Das Licht in verschiedenen solchen Intervallen ist unkorreliert, d.h. $g^{(2)}(\Delta N \neq 0) = 1$.

zum poissonverteilten Untergrund entspricht den Verhältnissen in Abb. 4.7. Daraus lässt sich die erwartete Photonenstatistik berechnen. Konditioniert auf die Detektion eines ersten Photons ist die Wahrscheinlichkeit $P(i)$ mit dem nachfolgenden Puls $i$ Photonen zu detektieren

$$P(i) = (1 - P_{det}) p_i(\lambda) + P_{det} p_{i-1}(\lambda), \tag{4.6}$$

wobei $p_i(\lambda)$ die Poissonverteilung

$$p_i(\lambda) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \tag{4.7}$$

einer mittleren Photonenzahl $\lambda$ ist und $P_{det}$ die Wahrscheinlichkeit, das vom einzelnen Atom erzeugte einzelne Photon zu detektieren. Aus den in Abb. 4.7 gezeigten Daten ergibt sich für die $(1.; 2.; 3.)$ folgenden Laserpulse $g^{(2)}(0) = (0{,}41; 0{,}57; 0{,}73)$ (10 Atome/ms) und $g^{(2)}(0) = (0{,}30; 0{,}41; 0{,}52)$ (3,4 Atome/ms).

Die Photonenstatistik des Lichts in diesen Intervallen lässt sich auch direkt bestimmen. Ein in einem Intervall eines Pumplaserpulses detektiertes Photon signalisiert die Anwesenheit eines Atoms. Vom nächsten Pumplaserintervall werden nun alle Detektorereignisse auf dem Detektor 1 zu $E_1(i)$ aufsummiert, entsprechend vom Detektor 2 zu $E_2(i)$, wobei $i$ das $i$. Konditionierungsintervall beschreibt. Insgesamt ergibt sich so ein neuer Datensatz mit insgesamt $N$ Elementen, wenn $N$ die Anzahl der Konditionierungsphotonen ist. Aus diesem neuen

Datensatz lässt sich die Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(\Delta N)$ zwischen den beiden Detektoren berechnen über

$$g^{(2)}(\Delta N) = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_1(i)E_2(i+\Delta N)}{N\bar{E}_1\bar{E}_2}. \tag{4.8}$$

Für $\Delta N \neq 0$ werden so gegebenenfalls Intervalle verglichen, die vorher zeitlich weit voneinander getrennt waren. Insofern sollten diese Korrelationen vollkommen unkorreliert sein und $g^{(2)}(\Delta N \neq 0) = 1$ ergeben. Der eigentlich wichtige Wert ist $g^{(2)}(0)$. Hier wird direkt die gemittelte Intensitätskorrelationsfunktion der konditionierten Intervalle bestimmt. Liegt dieser Wert unter 1, so liegt sub-poissonsches Licht vor. Genauso lässt sich die Analyse statt für die auf das Konditionierungsintervall folgenden Intervalle auch auf die vorhergehenden, usw. , bzw. übernächsten, usw. verallgemeinern. So lässt sich für all diese Intervalle die Intensitätskorrelationsfunktion bestimmen. Dies ergibt für den hohen Atomfluss $g^{(2)}(0) = (0{,}95(18); 0{,}69(11); 0{,}41(6); 0{,}52(6); 0{,}55(10); 0{,}78(16))$ für die $(-3.; -2.; -1.; 1.; 2.; 3.)$ benachbarten Laserpulse und für den niedrigen Atomfluss $g^{(2)}(0) = (0{,}25(11); 0{,}45(15))$ für die $(-1.; 1.)$ Intervalle, vgl. auch Abb 4.9 für den jeweils $-1$. Laserpuls. Dies stimmt gut mit dem oben erklärten Modell überein.

Die Eigenschaften des erzeugten Gemischs an Photonen lassen sich daher folgendermaßen zusammenfassen: Die Statistik ist deutlich sub-poissonsch. Für die benachbarten Laserpulse und den hohen Atomfluss von 10 Atome/ms lässt es sich gut durch einen mit 15% Effizienz erzeugten Einzelphotonenzustand überlagert von einem Poissonzustand mit $\lambda = 0{,}047$ beschreiben.

Für einen perfekten Ein-Photonen-Zustand müsste man $g^{(2)}(0) = 0$ erreichen. Dies ist durch die poissonsche Beimischung zusätzlicher Atome begrenzt. Zudem müsste die Effizienz der Einzelphotonenerzeugung auf deutlich über 15% gesteigert werden. Mit einem bei starker Kopplung gefangenen einzelnen Atom sollte man einem perfekten Ein-Photonen-Zustand deutlich näher kommen.

## 4.3 Kontinuierliche Photonenerzeugung

Lässt man Pump- und Rückpumplaser gleichzeitig auf die Atome wirken, so können die Atome nach erfolgter Photonenemission sofort wieder in den Ausgangszustand zurückgepumpt werden. Die Anzahl emittierter Photonen steigt stark an. Da der Pumplaser nicht langsam eingeschaltet wird, werden die Photonen hier nicht über einen adiabatischen Prozess erzeugt, sondern zu zufälligen Zeiten emittiert. Dieser Aufbau ist einem Ramanlaser sehr ähnlich. Jedoch kann die mittlere Anzahl der zum Lichtfeld beitragenden Atome durch den Fluss an Atomen frei eingestellt werden. Dadurch ergeben sich interessante Effekte.

### 4.3.1 Anregungsspektren mit Rückpumplaser

Durch das gleichzeitige Einstrahlen von Pump- und Rückpumplaser sind neben dem Ramanprozess weitere Möglichkeiten der Photonenerzeugung möglich. Die Anregungsspektren werden deutlich komplizierter als in Kapitel 4.1.1 gezeigt. Mit Hilfe von 3 wesentlichen Mechanismen – vgl. dazu auch die entsprechenden Terme des transformierten Hamiltonoperators



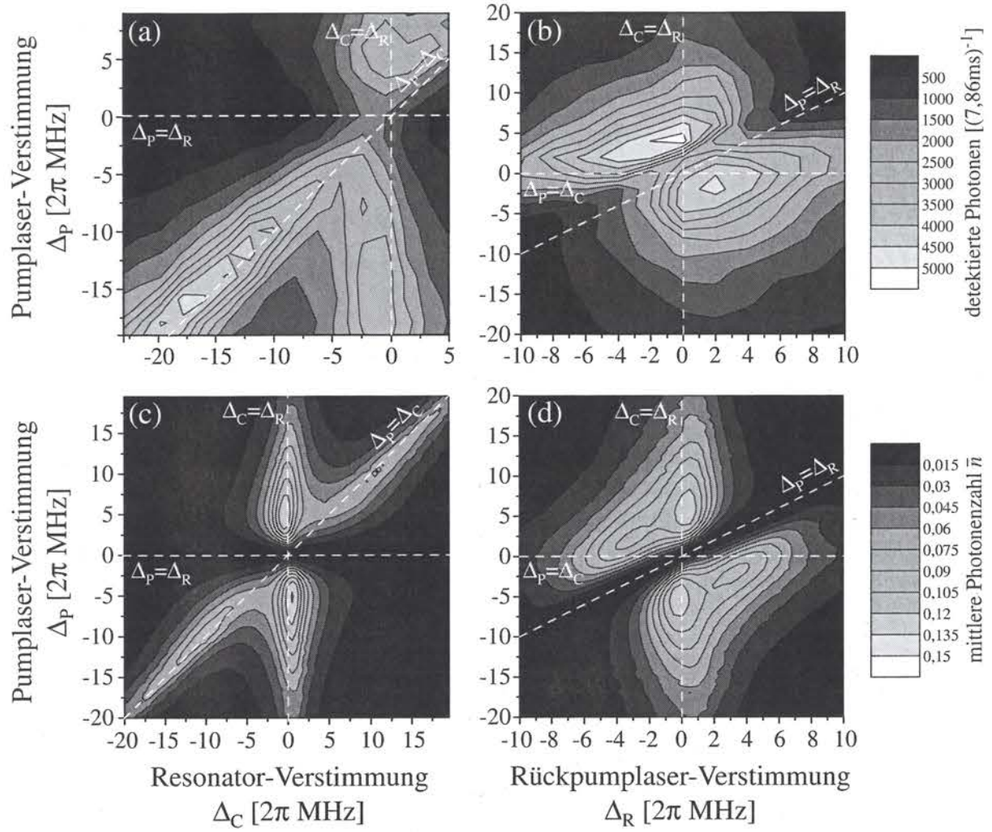



**Abbildung 4.10:** Vergleich der Anregungsspektren in Experiment und Simulation. Die jeweils nicht dargestellte Verstimmung von $(\Delta_P, \Delta_R, \Delta_C)$ ist resonant zum jeweiligen Atomübergang. Für Ramanresonanz, d.h. $\Delta_P = \Delta_C$, werden über den Ramanprozess Photonen erzeugt. Sind Rückpumplaser und optischer Resonator resonant, also $\Delta_R = \Delta_C$, so erhält man Streuung von Photonen in den Resonator. Für $\Delta_P = \Delta_R$ werden die Atome in den durch Pumplaser und Rückpumplaser erzeugten Dunkelzustand der beiden Grundzustände gepumpt (siehe Text), woraufhin keine weiteren Photonen emittiert werden. Die experimentellen Parameter sind $(\Omega_P^{max}; \Omega_R^{max}) = 2\pi\ (44; 33)$ MHz(a) und $= 2\pi\ (13; 33)$ MHz. In der Simulation wurden die Parameter $(\Omega_P; \Omega_R; g) = 2\pi\ (7{,}6; 3{,}3; 2{,}5)$ MHz verwendet.

Gl. (2.116) – lassen sich die in Abb. 4.10 dargestellten Anregungsspektren jedoch einfach verstehen, vgl. Abb. 4.11:

1. Sind Pumplaser und optischer Resonator in Ramanresonanz ($\Delta_P = \Delta_C$), so kann der Ramanprozess Photonen im Resonator erzeugen. Voraussetzung für eine hohe Photonenrate ist, dass der Rückpumplaser die Atome wieder aus $|g\rangle$ in den Ausgangszustand $|u\rangle$ zurückpumpt, damit diese weitere Photonen erzeugen können. Daher sollte der Rückpumplasers möglichst in Resonanz sein, also $\Delta_R \approx 0$.

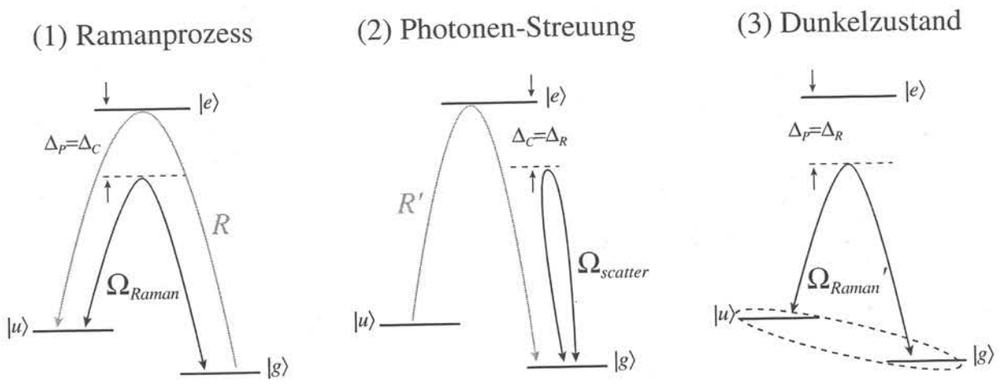



**Abbildung 4.11:** Drei wesentliche Mechanismen zum Verständnis der Anregungsspektren mit Rückpumplaser. **(1)** Pumplaser und Resonator führen für $(\Delta_P = \Delta_C)$ zu einem Ramanprozess zwischen $|u, n-1\rangle$ und $|g, n\rangle$. Der Rückpumplaser pumpt die Atome in den Ausgangszustand $|u\rangle$ zurück. **(2)** Der Rückpumplaser kann für $\Delta_C = \Delta_R$ Photonen in den Resonator streuen. Der Pumplaser pumpt in diesem Fall die Atome in $|g\rangle$ zurück. **(3)** Sind Pumplaser und Rückpumplaser resonant wird ein Dunkelzustand zwischen $|u\rangle$ und $|g\rangle$ gebildet, der die Photonenerzeugung unterdrückt.

2. Die Funktion von Pump- und Rückpumplaser kann jedoch ebenso gut vertauscht werden. Ist der Rückpumplaser resonant zum optischen Resonator ($\Delta_C = \Delta_R$), so können Photonen aus dem Rückpumplaserstrahl in den Resonator gestreut werden. Der Pumplaser pumpt Atome, welche nach $|u\rangle$ fallen für $\Delta_P \approx 0$ wieder in das Zwei-Niveau-System $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ zurück.

3. Kaum Photonen werden emittiert, wenn Pump- und Rückpumplaser resonant sind ($\Delta_P = \Delta_R$). Die beiden Laser erzeugen zusammen den Dunkelzustand $|\phi\rangle$ entsprechend

$$|\phi\rangle = \cos\Theta|u, 0\rangle - \sin\Theta|g, 0\rangle \quad \text{mit} \quad \tan\Theta = \frac{\Omega_P}{\Omega_R}. \tag{4.9}$$

   Atome, welche in diesen Dunkelzustand gelangen, sind vollständig entkoppelt und können keine weiteren Photonen emittieren.

Die Simulationen in Abb. 4.10 stimmen recht gut mit den experimentellen Anregungsspektren überein, vorausgesetzt man verwendet deutlich geringere Rabifrequenzen von Pump- und Rückpumplaser als im Experiment. Für zu hohe Rabifrequenzen in der Simulation wird der Bereich des Dunkelzustandes so breit, dass im beobachteten Bereich fast keine Emission mehr erfolgt. Niedrigere Rabifrequenzen lassen sich jedoch nur durch niedrigere Dipolmatrixelemente erklären. Folglich sind die hier beobachteten Atome diejenigen Atome, welche mit der Zeit in schwächer koppelnde magnetische Unterzustände umgepumpt wurden. Eine komplexere Simulation, welche die magnetische Substruktur einbezieht, sollte die experimentellen Ergebnisse genauer reproduzieren. Diese ist jedoch aufgrund ihrer Komplexität zu zeitaufwändig.



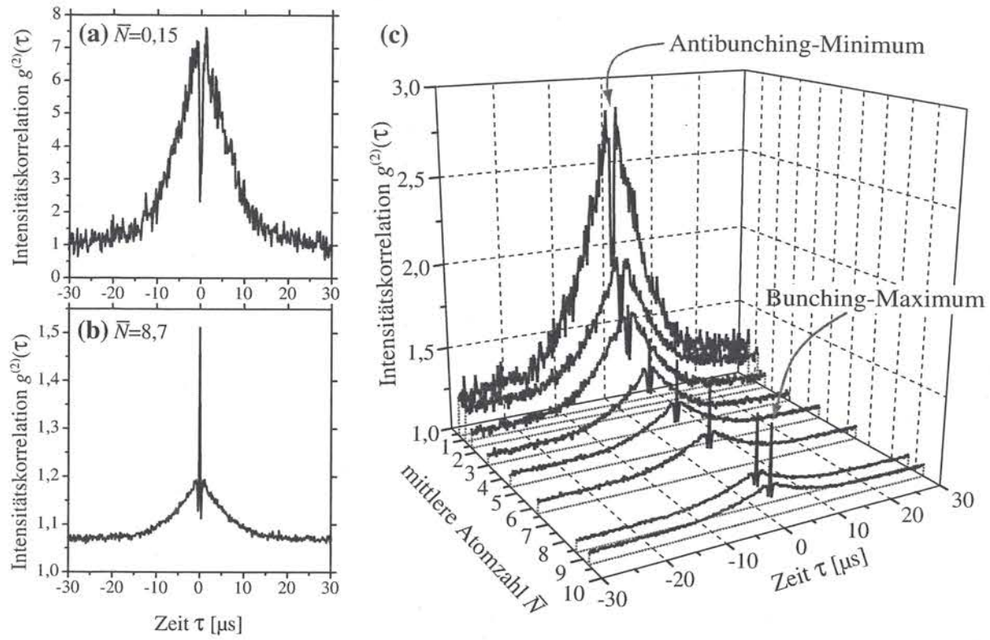



**Abbildung 4.12:** Variation des Atomflusses. Für eine mittlere Atomzahl um 1 im optischen Resonator ergibt sich ein Übergang von Antibunching ($g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$) zu Bunching ($g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$), also der Übergang von einer nicht-klassischen zu einer klassischen Lichtquelle. Durch die Ladezeit der Falle (20 ms bis 2,5 s) und den ersten Spalt in Fallrichtung kann der Atomfluss variiert werden. Für jede der Kurven wurde die magnetooptische Falle 1000 mal geladen, im Messintervall von $\delta t = 7{,}86\,\text{ms}$ Photonen registriert und vom gesamten detektierten Photonenstrom die dargestellte Intensitätskorrelationsfunktion zwischen den beiden Detektoren des Hanbury-Brown & Twiss-Aufbaus berechnet. Die Rabifrequenzen von Pump- und Rückpumplaser sind $\Omega_P = 2\pi\ 7{,}6\,\text{MHz}$ und $\Omega_R = 2\pi\ 3{,}3\,\text{MHz}$, die Raman-Verstimmung ist $\Delta = -2\pi\ 20\,\text{MHz}$.

### 4.3.2 Übergang von nicht-klassischem zu klassischem Licht

Mit Hilfe des Hanbury-Brown & Twiss-Aufbaus soll nun die Intensitätskorrelationsfunktion und damit die Photonenstatistik des emittierten Lichts bei kontinuierlicher Anregung vermessen werden. Wird die magnetooptische Falle nur kurz geladen, so ist der Strom von Atomen, der den Resonator passiert, sehr klein. Für im Mittel $\bar{N} = 0{,}15$ Atome im Resonator beobachtet man die in Abb. 4.12 (a) dargestellte Intensitätskorrelationsfunktion. Sie zeigt deutlich eine erhöhte Korrelation $g^{(2)}(\tau) > 1$ für $\tau < 17\,\mu\text{s}$, entsprechend der Durchflugszeit einzelner Atome, und zudem ein nicht-klassisches Verhalten mit Antibunching ($g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$). Ähnliche Ergebnisse mit einem einzelnen in einem Resonator gefangenen Atom wurden kürzlich in [102, 103] veröffentlicht.

Steigert man den Atomfluss, so dass sich im Mittel mehr als 1 Atom im Resonator aufhält, so beobachtet man in der Intensitätskorrelationsfunktion einen Übergang von Antibunching zu

Bunching, d.h. zu $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$, siehe Abb. 4.12 (b) und (c). Die Photonen werden dann bevorzugt in Paaren aus dem optischen Resonator emittiert. Das Bunching verletzt, im Gegensatz zum Antibunching, nicht die Schwarz'sche Ungleichung (2.87) und ist daher klassisch erklärbar. Man beobachtet folglich einen Übergang von nicht-klassischem Licht für Atomzahlen $\bar{N} < 1$ zu klassischem Licht für Atomzahlen $\bar{N} > 1$.

Dieser Übergang kann unter anderem mit Hilfe der Theorie unabhängiger Emitter erklärt werden. Aus dieser ergibt sich für eine poissonverteilte Atomzahl mit Mittelwert $\bar{N}$, sowie der Korrekturfunktion $f(\tau)$, die die begrenzte Wechselwirkungszeit jedes einzelnen Atoms widerspiegelt

$$\overline{g^{(2)}}(\tau) = f(\tau)\frac{g_A^{(2)}(\tau)}{\bar{N}} + 1 + f(\tau)^2|g_A^{(1)}(\tau)|^2, \tag{4.10}$$

vgl. Kap.2.3.3. Das Signal setzt sich aus 3 verschiedenen Komponenten zusammen. Nochmals kurz zusammengefasst sind die Ursachen dieser Beiträge:

1. Das Antibunching-Signal $f(\tau)\frac{g_A^{(2)}(\tau)}{\bar{N}}$ wird durch das Intensitätskorrelationssignal eines einzelnen Atoms $g_A^{(2)}(\tau)$ hervorgerufen. Jedes einzelne Atom muss nach einer Photonenemission erst in den Ausgangszustand zurückgepumpt werden, bevor es ein weiteres Photon emittieren kann. Deshalb halten die Photonen einen zeitlichen Abstand. Dadurch ergibt sich das Antibunching-Minimum bei $\tau = 0$. Verlustprozesse, wie spontane Emission, führen zu Dekohärenz des Zustands eines einzelnen Atoms, daher sind Photonen zu sehr unterschiedlichen Zeitpunkten vollständig unkorreliert. Die Intensitätskorrelationsfunktion eines einzelnen Atoms $g_A^{(2)}(\tau)$ geht folglich für $\tau \to \infty$ gegen 1. Da jedes einzelne Atom jedoch nur eine begrenzte Zeit mit dem Resonator wechselwirkt, können nur Photonen aus diesem Zeitintervall zur Intensitätskorrelationsfunktion $g_A^{(2)}(\tau)$ beitragen. Daher wird die Korrekturfunktion $f(\tau)$ eingeführt mit $\lim_{\tau\to\infty} f(\tau) = 0$ und $f(0) = 1$. Der gesamte Beitrag skaliert mit dem inversen der mittleren Atomzahl $\bar{N}$ und verschwindet somit für hohe Atomzahlen.

2. Die Bunching-Komponente $f(\tau)^2|g_A^{(1)}(\tau)|^2$ ergibt sich aus dem Heterodyne-Signal zweier Atome. Durch konstruktive und destruktive Interferenz der von zwei Atomen emittierten Photonen (bzw. stimulierte Emission und Absorption, vgl. Kap. 3.7) fluktuiert die Intensität stärker. Wenn ein Photon detektiert wird, ist konstruktive Interferenz wahrscheinlich und mit höherer Wahrscheinlichkeit wird ein zweites Photon gleichzeitig nachgewiesen. Das Gegenteil gilt für destruktive Interferenz. Außerhalb der Kohärenzzeit sind konstruktive und destruktive Interferenz bei $t_0$ und $t_0 + \tau$ unabhängig voneinander. Das zusätzliche Bunching-Signal verschwindet. Der Beitrag fällt mit dem Betragsquadrat der Korrelationsfunktion erster Ordnung $|g_A^{(1)}(\tau)|^2$ ab, deren $1/e^2$-Abfall die Kohärenzzeit $\tau_c$ definiert. Er ist für eine poissonverteilte Anzahl von Atomen unabhängig von $\bar{N}$ und verbleibt daher auch bei hohem Atomfluss im Gegensatz zur Antibunching-Komponente.

3. Ein konstanter Untergrund vom Wert 1 ergibt sich aus Korrelationen zwischen verschiedenen Atomen ohne Interferenz. Die poissonverteilten Atome kommen vollständig unkorreliert am Resonator an. Die Statistik der Atome wird auf das Lichtfeld übertragen, was zum unkorrelierten konstanten Beitrag führt.



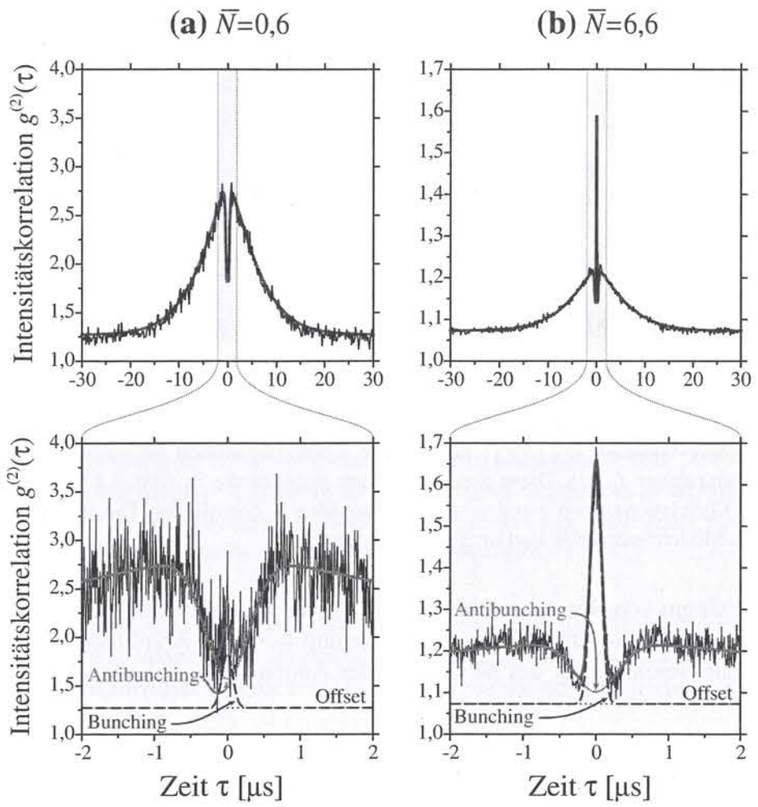



**Abbildung 4.13:** Zerlegung der gemessenen Intensitätskorrelationsfunktion in ihre Komponenten bei niedrigem Atomfluss **((a),** $\bar{N} = 0,6$**)** und hohem Atomfluss **((b),** $\bar{N} = 6,6$**)**. Die Amplitude der Antibunching-Komponente ist proportional $1/\bar{N}$, die der Bunching-Komponente konstant bei 0,56. Die Dichte der Atomwolke und damit die beobachtete Intensität variieren leicht innerhalb des Messintervalls von $\delta t = 7{,}86\,\mathrm{ms}$, wodurch sich ein leichter Offset relativ zum konstanten Untergrund von 1 ergibt. Der relative Wert der mittleren Atomzahl wurde mit Hilfe des Fluoreszenzdetektors gemessen, der Absolutwert durch das $1/\bar{N}$-Verhalten geeicht.

Mit steigender Atomzahl ergibt sich somit für dieses einfache Modell zwanglos der beobachtete Übergang von Antibunching zu Bunching. Durch eine Zerlegung der einzelnen Intensitätskorrelationskurven in die Komponenten lässt sich nun überprüfen, ob die Antibunching-Komponente tatsächlich mit $1/\bar{N}$ abfällt, während die restlichen Beiträge konstant bleiben. In Abbildung 4.13 werden exemplarisch zwei der Kurven mit der Modellfunktion für $\overline{g^{(2)}}(\tau)$

$$\overline{g_m^{(2)}}(\tau, N) = 1 + k(N) + f_m(\tau)\frac{g_{A,m}^{(2)}(\tau)}{\bar{N}} + f_m(\tau)^2|g_{A,m}^{(1)}(\tau)|^2 \tag{4.11}$$

verglichen. Durch die Variation der Atomdichte innerhalb des Messintervalls ergibt sich ein zusätzlicher Offset zum unkorrelierten Beitrag 1, der durch die Funktion $k(N)$ korrigiert wird.

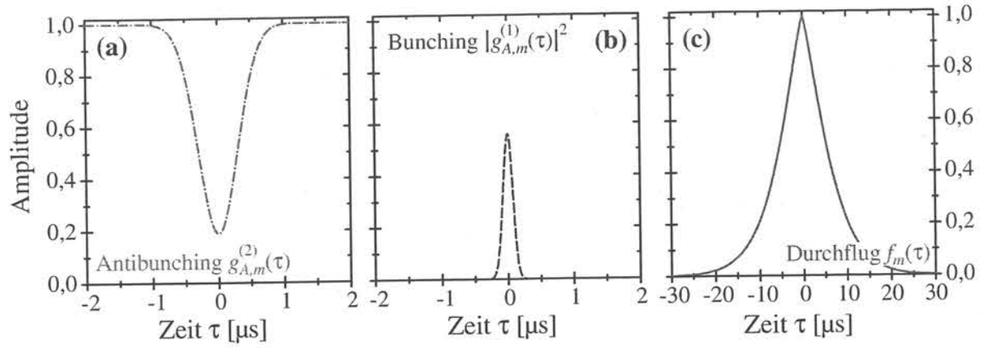



**Abbildung 4.14:** Die drei Komponenten der Modellfunktion: **(a)** die Antibunching-Funktion $g^{(2)}_{A,m}(\tau)$, **(b)** die Bunching-Funktion $|g^{(1)}_{A,m}(\tau)|^2$ und **(c)** die Korrekturfunktion bei endlicher Atom-Resonator Wechselwirkungsdauer $f_m(\tau)$. Diese drei Funktionen genügen die in Abb. 4.12 dargestellte Messung für beliebige Korrelationszeiten $\tau$ und mittlere Atomzahlen $\bar{N}$ darzustellen. Die analytischen Ausdrücke der einzelnen Modellfunktionen sind im Text beschrieben.

$k(N)$ ist abhängig von der Atomzahl, da sich für die unterschiedlichen Ladezeiten der magnetooptischen Falle die Ausdehnung der Wolke und damit die Amplitude der Dichtevariation verändert. Zur Beschreibung des Minimums der Antibunching-Komponente eines einzelnen Atoms bei $\tau = 0$ wird eine Gaußfunktion

$$g^{(2)}_{A,m}(\tau) = 1 - ae^{-2(\tau/\tau_a)^2} \tag{4.12}$$

mit Amplitude von $a = 0{,}81 \pm 0{,}01$ und halber Breite $\tau_a = 602 \pm 10\,\mathrm{ns}$ ($1/e^2$) verwendet, vgl. Abb. 4.14(a). Das Bunching-Maximum lässt sich gut mit einer Gaußfunktion

$$|g^{(1)}_{A,m}(\tau)|^2 = be^{-2(\tau/\tau_b)^2} \tag{4.13}$$

mit Amplitude $b = 0{,}56 \pm 0{,}04$ und halber Breite $\tau_b = 148 \pm 13\,\mathrm{ns}$ ($1/e^2$) beschreiben, siehe Abb. 4.14(b). Die empirische Korrekturfunktion

$$f_m(\tau) = e^{-\left(|\tau|/\tau_f\right)^{1,3}} \tag{4.14}$$

gibt den Abfall der Intensitätskorrelationsfunktion für $\tau \to \infty$ wieder mit $\tau_f = 7{,}1 \pm 0{,}1\,\mu\mathrm{s}$, Abb. 4.14(c).

Zusammengefasst kann die beobachtete Intensitätskorrelationsfunktion tatsächlich in die verschiedene Komponenten zerlegt werden, wobei die Antibunching-Komponente mit $1/\bar{N}$ abfällt, während die Bunching-Komponente konstant bleibt. Über die Amplitude der Antibunching-Komponente wird die absolute Atomzahl geeicht, die relative Atomzahl wurde mit dem Fluoreszenzdetektor gemessen. Die Amplitude des Bunching-Maximums sollte im Modell unabhängig emittierender Atome definitionsgemäß ($g^{(1)}_A(0) = 1$) gleich Eins sein. Mit 0,56 ist sie nur etwa halb so groß. Für unabhängige Emitter könnte eine kleinere Amplitude durch schlechte räumliche Kohärenz erklärt werden. Bei Emittern innerhalb eines optischen Resonators ist es



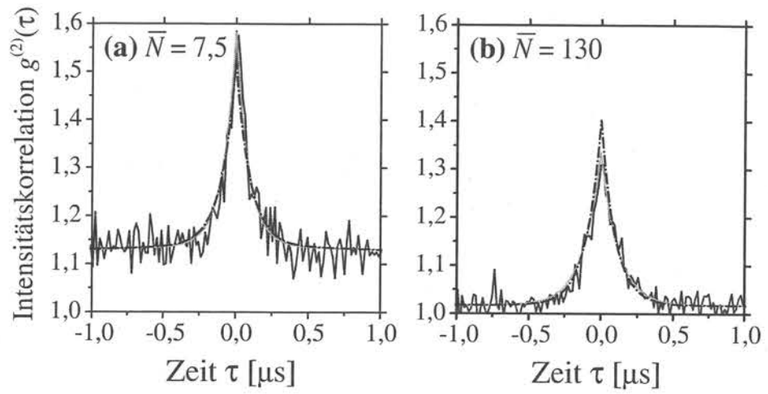



**Abbildung 4.15:** Veränderung der Kohärenzeigenschaften durch kooperative Effekte. Die Amplitude des Bunching-Maximums und damit $g^{(2)}(0)$ nimmt für hohe Atomzahl zunehmend ab **(a)**, gleichzeitig wird die Kohärenzzeit $\tau_c$ größer **(b)**. Die Eigenschaften des Lichts nähern sich somit denen eines kohärenten Zustands, wie u.a. für einen Laser nahe seiner Schwelle erwartet wird.

jedoch wahrscheinlicher, dass durch kollektive Effekte zwischen den Atomen diese nicht mehr vollständig unabhängig voneinander emittieren, vgl. Kap. 2.3.4. Insofern kann die Breite des Bunching-Maximum auch nur eingeschränkt als Kohärenzzeit des emittierten Lichts interpretiert werden.

Im Vergleich zur durch den Resonator vorgegebenen Kohärenzzeit von $\tau_c = 1/\kappa = 127\,\mathrm{ns}$ ($1/e^2$-Abfall) ist das Bunching-Maximum mit $\tau_b = 148\,\mathrm{ns}$ ($1/e^2$) etwas breiter. Das Licht erscheint daher kohärenter, was von einer kollektiven Emission der Atome kommen kann. Experimentell kann die Kohärenzlänge bzw. Kohärenzzeit der emittierten Photonen nur über ein Interferometer gemessen werden. Dazu müsste jedoch ein sehr großes Interferometer mit $> 60\,\mathrm{m}$ Gangunterschied aufgebaut werden.

Die gauß'sche Form des Bunching-Maximums deutet darauf hin, dass das Frequenzspektrum der emittierten Photonen ebenfalls gaußverbreitert ist. Eine inhomogene Linienverbreiterung, z.B. aufgrund der unterschiedlichen Verschiebung der $m_F$-Unterzustände durch das Führungsmagnetfeld, scheint daher wahrscheinlich.

### 4.3.3 Kooperative Emission in den Resonator

Bei schnellerem Rückpumpen der Atome und höherer Atomzahl treten zusätzliche Hinweise auf kollektiven Effekte auf. Diese zeigen sich unter anderem in der Intensitätskorrelationsfunktion. In Abb. 4.15 ist diese für mittlere Atomzahlen von $\bar{N} = 7{,}5$ und $\bar{N} = 130$ dargestellt. Offensichtlich wird aufgrund des stärkeren Rückpumpens kein Antibunching beobachtet. Dies ist konsistent mit der quantenmechanischen Simulation für die verwendeten experimentellen Parameter, siehe Kap. 2.3.6. Als Modellfunktion kann daher, unter der Annahme dass $g^{(2)}_{A,m}(\tau) \approx 1$ gilt,

$$\overline{g^{(2)}_m}(\tau, N) = 1 + k + f_m(\tau)\frac{1}{\bar{N}} + f_m(\tau)^2|g^{(1)}_{A,m}(\tau)|^2 \tag{4.15}$$

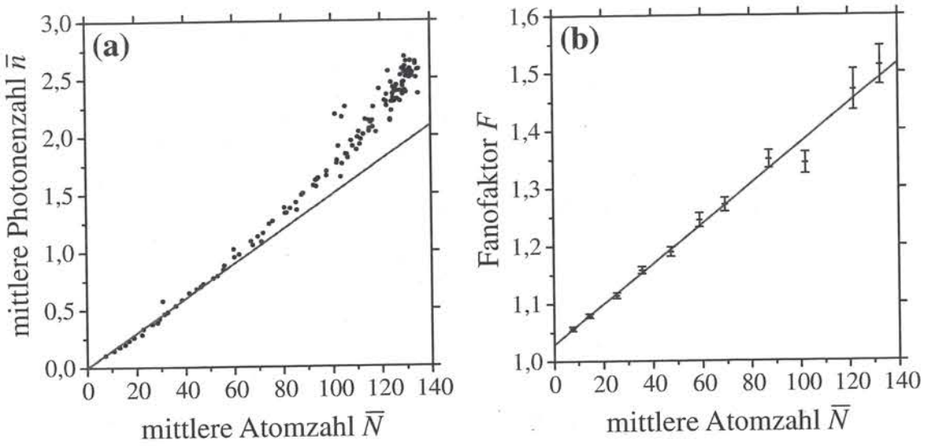



**Abbildung 4.16:** Suche nach einer Laserschwelle. **(a)** Mittlere Photonenzahl in Abhängigkeit der mittleren Atomzahl im Resonator. Der Verlauf weicht vom linearen Verlauf ab, d.h. pro Atom werden für hohe Atomzahl durch kooperative Emission mehr Photonen emittiert. Das umlaufende Licht wird verstärkt. Ein typisches Schwellverhalten in Form eines sprunghaften Anstiegs der Photonenzahl wird jedoch nicht beobachtet. **(b)** Der Fanofaktor des emittierten Lichts steigt weiter an, entfernt sich also zunehmend vom kohärenten Wert $F = 1$. Es wird kein Maximum erreicht, welches die Laserschwelle definieren würde.

verwendet werden. Auch die Modellfunktion für $|g^{(1)}_{A,m}(\tau)|^2$ muss verändert werden. Anstelle einer Gaußfunktion gibt eine exponentiell abfallende Funktion

$$|g^{(1)}_{A,m}(\tau)|^2 = b(\bar{N})e^{-|\tau|/\tau_b(\bar{N})} \tag{4.16}$$

sehr viel besser den beobachteten Verlauf wieder. Diese Modellfunktion entspricht, vorausgesetzt die Bunching-Komponente zeigt tatsächlich $|g^{(1)}_A(\tau)|^2$, einer homogenen Lorentzfunktion im Frequenzraum. Durch das starke Rückpumpen scheint eine inhomogene Verbreiterung verschiedener Atome eine untergeordnete Rolle zu spielen. Sowohl für die Amplitude, wie auch für die Breite der Bunching-Komponente wird eine lineare Veränderung mit $\bar{N}$ zugelassen. Ohne diese zusätzlichen Freiheitsgrade weicht die Modellfunktion deutlich von der beobachteten Intensitätskorrelationsfunktion ab, siehe Abb. 4.15. Die Amplitude ergibt sich zu $b(\bar{N}) = (0{,}455 \pm 0{,}005) - (0{,}00103 \pm 0{,}00006) \times \bar{N}$, d.h. die Amplitude verändert sich im beobachteten Bereich der mittleren Atomzahl von $\bar{N} = [7{,}5; 130]$ um 0,126, bzw. um 27% der Amplitude bei $\bar{N} = 7{,}5$. Die Breite der Komponente ist $\tau_b(\bar{N}) = (87 \pm 2)\,\mathrm{ns} + (0{,}25 \pm 0{,}02)\,\mathrm{ns/Atom} \times \bar{N}$. Sie wird also um 31 ns oder 35% breiter. Das emittierte Licht wird durch kooperative Effekte etwas kohärenter, wie es auch für das einfache Laser-Ratenmodell in Kap. 2.3.4, Abb. 2.14 erwartet wird. Im Vergleich zur Kohärenzzeit des Resonators von $\tau_c = 127\,\mathrm{ns}$ sind die beobachteten Breiten des Bunching-Maximums zu kurz. Es scheint daher, dass die Kohärenz des Lichtfeldes im Resonator schneller zerstört wird, als durch die Dekohärenz des Resonators zu erwarten wäre. Wahrscheinlich wird durch zu starkes Rückpumpen zusätzliche Dekohärenz verursacht.



Auch bei anderen Messgrößen lassen sich Hinweise auf kooperative Effekte finden. Abb. 4.16 (a) zeigt die mittleren Photonenzahl $\bar{n}$ im Resonator in Abhängigkeit der mittleren Atomzahl $\bar{N}$. Das Signal des Fluoreszenzdetektors bestimmt auch hier die relative mittlere Atomzahl. Die absolute Anzahl an Atomen wurde wiederum mit Hilfe der Komponente $f_m(\tau)\frac{1}{\bar{N}}$ der Intensitätskorrelationsfunktion geeicht. Für niedrige Atomzahlen erzeugt jedes Atom im Mittel $\bar{n}/_{\mathrm{Atom}} = 0{,}015$ Photonen im Resonator. Bei $\bar{N} = 130$ sind es schon $\bar{n}/_{\mathrm{Atom}} = 0{,}02$. Pro Atom werden also etwa 30% mehr Photonen erzeugt. Das Licht im Resonator wird durch das Medium an Atomen verstärkt, d.h. man beobachtet eine kooperative Emission der Atome. Leider zeigt sich keine klar definierte Laserschwelle. Für quantenmechanische Laser nahe dem Regime starker Kopplung verwendet man üblicherweise das Maximum des Fanofaktors zur Bestimmung der Laserschwelle. Mit Hilfe von Gl. (2.83) kann der Fanofaktor aus $\bar{n}$ und $g^{(2)}(0)$ experimentell bestimmt werden. Abb. 4.16 (b) zeigt den so bestimmten Verlauf des Fanofaktors in Abhängigkeit der mittleren Atomzahl $\bar{N}$. Er steigt im gesamten Messbereich in etwa linear an. Ein Maximum wird nicht erreicht, so dass mit Sicherheit die Laserschwelle nicht überschritten wird.

Insgesamt beobachtet man für sehr hohe Atomraten Abweichungen vom Modell unabhängig strahlender Atome und damit erste Anzeichen kooperativer Effekte. Die Verluste des Resonators scheinen im Verhältnis zur Verstärkung zu groß, so dass die Laserschwelle des Systems trotz hohe mittlere Atomzahlen von $\bar{N} > 100$ nicht erreicht wird. Insofern ist das untersuchte System auf jeden Fall weit entfernt von einem Einatom-Laser [87, 89].

## 4.4 Bunching gepulst emittierter Photonen

Für einen sehr hohen Atomfluss befinden sich mehrere Atome gleichzeitig im optischen Resonator. Pro Atom kann ein Photon in den Resonator abgestrahlt werden, so dass prinzipiell bei hoher Effizienz der Photonenerzeugung ein mehr-Photonen-Fockzustand generiert werden kann, siehe z.B. [104]. In unserem Experiment ist die Emissionseffizienz jedoch deutlich kleiner 1 und die Anzahl der Atome fluktuiert. Der Zustand des erzeugten Lichts ist daher mit Sicherheit kein mehr-Photonen-Fockzustand. Daher bleibt die Erzeugung eines solchen Zustands zukünftigen Experimenten vorbehalten. Trotzdem beobachtet man eine grundlegend andere Photonenstatistik als bei geringem Atomfluss und kann daraus auch hier auf kooperative Effekte der Atome schließen. Außerdem erhält man erste Hinweise auf die Kohärenzeigenschaften der gepulst emittierten Photonen.

Wie Abb. 4.17 (a) zeigt, werden bei hoher mittlerer Atomzahl die Photonen während der Anregung mit dem Pumplaserpuls geringfügig früher emittiert. Gleichzeitig steigt die mittlere detektierte Photonenzahl pro Durchflug eines Atoms von $\langle n/_{Atom}\rangle = 0{,}19$ bei niedrigem Atomfluss (13 Atome/ms) auf $\langle n/_{Atom}\rangle = 0{,}24$ bei hohem Atomfluss (580 Atome/ms) an. Die Effizienz der Photonenerzeugung wird also durch die kooperative Kopplung der Atome an den Resonator erhöht. Anschaulich erklärt, erhöht sich die Kopplungsstärke $g\sqrt{n+1}$ zwischen Atom und Resonator um den Faktor $\sqrt{n+1}$, wenn sich bereits $n$ Photonen im Resonator befinden. Bei hohem Atomfluss werden hier im Mittel $\langle n/_{Puls}\rangle = 1{,}6$ Photonen pro Pumplaserpuls erzeugt. Sind diese Photonen alle gleichzeitig im Resonator, so erwartet man unter Annahme eine Poissonverteilung der Photonenzahl eine im Mittel 1,56 mal stärkere Kopplung als beim Vakuumzustand. Diese höhere Kopplungsstärke sollte, wie bereits in Abb. 4.4 beobachtet, zu

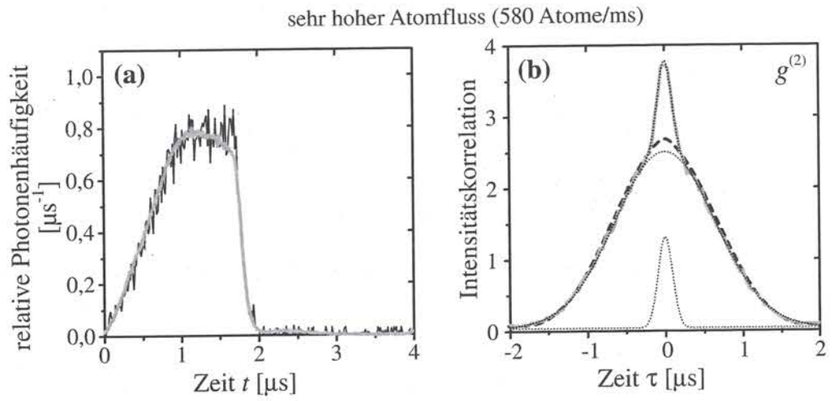



**Abbildung 4.17:** Gepulste Photonenerzeugung bei hohem Atomfluss von 580 Atome/ms. **(a)** Während des Pumplaserpulses von 0 bis 2 µs werden die Photonen bei hohem Atomfluss nur geringfügig früher emittiert als bei niedrigen Atomfluss von 13 Atome/ms. Die kooperativen Effekte zwischen den Atomen scheinen daher gering zu sein. **(b)** Die Intensitätskorrelationsfunktion gemessen mit dem hohen Atomfluss (durchgezogenen Linie) zeigt im Vergleich zum nach $\tau = 0$ periodisch fortgesetzten Signal für lange Verzögerungszeiten (gestrichelte Linie), vgl. Abb. 4.6, ein zusätzliches Bunching-Maximum bei $\tau = 0$. Analog zum Modell unabhängig strahlender Atome in Kapitel 2.3.3 liegt es nahe, den $1/e^2$-Abfall des Bunching-Maximums als Kohärenzzeit $\tau_c$ der Photonen zu interpretieren. Dieses zusätzliche Maximum bei $\tau = 0$ kann durch eine Gaußkurve der Breite $\tau = 109 \pm 3$ ns(HWHM) angenähert werden, entsprechend $\tau_c = \tau/(\sqrt{1/2 \ln 2}) = 185 \pm 5$ ns.

einer früheren Photonenemission, aber auch zu einer höheren Effizienz der Photonenerzeugung bei geringeren Verlusten, vgl. Gl. (2.75), führen. Bei der bisher beobachteten verhältnismäßig geringen Emissionseffizienz $< 20\%$ sollte die Effizienz $P_{emit}$ in guter Näherung proportional zu $g^2(\bar{n}+1)$ sein. Da jedoch die Effizienz nicht mit $P_{emit} \sim g^2(1{,}6+1)$ wächst, strahlen die Atome noch weitgehend unabhängig voneinander.

Wie für kontinuierliche Anregung mit Pumplaser und Rückpumplaser (Kap. 4.3.2) wird auch bei gepulster Anregung bei sehr hoher Atomzahl Photon-Bunching beobachtet, vgl. Abb. 4.17 (b). Für unabhängig strahlende Atome im nicht gepulsten Fall wird dieses Maximum durch den Beitrag $|g^{(1)}(\tau)|^2$ hervorgerufen. Der $1/e^2$-Abfall dieses Beitrags entspricht der Kohärenzzeit des emittierten Lichts. *Es ist bisher nicht klar, ob das Bunching-Maximum auch bei gepulster Anregung in erster Näherung als Komponente proportional $|g^{(1)}(\tau)|^2$ interpretiert werden darf.* Die Atome sollten jedoch, wie oben diskutiert, weitgehend unabhängig voneinander emittieren. Letzendlich lässt sich die Aussage, dass die Breite und Form des Bunching-Maximums durch die Kohärenzeigenschaften der Photonen gegeben ist, experimentell nur mit Hilfe eines sehr großen Interferometers beweisen.

Nimmt man an, dass auch für die gepulste Messung die Breite des Bunching-Maximums als Kohärenzzeit des emittierten Lichts interpretiert werden kann, so ergibt sich aus der Breite des Bunching-Maximums eine Kohärenzzeit $\tau_c = 185 \pm 5$ ns ($1/e^2$-Abfall). Diese Zeit ist länger als die Zerfallskonstante des elektrischen Feldes des optischen Resonators von $\tau_c = 127$ ns,



aber auch erheblich kürzer als die Länge eines adiabatisch erzeugten Photonenwellenpakets von $1-2$ µs. Dies deutet darauf hin, dass die Wellenpakete der einzelnen Photonen sehr kurz sind.

Es stellt sich die Frage, wie groß die Kohärenzzeit von Photonen sein sollte, die nicht in einem perfekt adiabatischen Prozess über den Dunkelzustand erzeugt werden, sondern bei deren Erzeugung durch spontane Emission des angeregten Zustands Phasenfluktuationen auftreten können. Dazu wurde das $\Lambda$-System entsprechend der Beschreibung in Kapitel 2.2.6 simuliert. Ausgehend vom Anfangszustand $|u,0\rangle$ wurde das Atom bei konstanter Kopplungsstärke $g$ einer linear ansteigenden Rabifrequenz des Pumplasers $\Omega_P$ ausgesetzt. Nach 2 µs wird der Pumplaser bei $\Omega_P^{max}$ ausgeschaltet. Mit Hilfe der so berechneten Dichtematrix $\rho(t)$ zum Zeitpunkt $t$ lässt sich der Erwartungswert der nicht normierten Korrelationsfunktion 1.Ordnung[2] $G^{(1)}(t,t+\tau) = \langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle$ berechnen. Die normierte Korrelationsfunktion $g^{(1)}(\tau)$ ergibt sich, wenn man die unnormierte Korrelationsfunktion über die gesamte beobachtete Zeit $t$ mittelt und mit dem Mittelwert der in diesem Intervall detektierten Intensität normiert

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\int_0^{2\,\mu s} dt \langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle}{\int_0^{2\,\mu s} dt \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle}. \tag{4.17}$$

Die Kohärenzzeit $\tau_c$ des emittierten Photons ist über den $1/e^2$-Abfall von $|g^{(1)}(\tau)|^2$ definiert. Das zugehörige Leistungsspektrum des emittierten Photons $S(\Delta)$ lässt sich durch eine Fouriertransformation der Korrelationsfunktion 1.Ordnung berechnen [105, Kap. 4.2]

$$S(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g^{(1)}(\tau) e^{-i\Delta\tau}. \tag{4.18}$$

Die in Abb. 4.18 dargestellten Leistungsspektren sind so normiert, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\Delta) d\Delta = 1. \tag{4.19}$$

Abbildung 4.18(a) zeigt so bestimmte Betragsquadrate der Korrelationsfunktion 1.Ordnung $|g^{(1)}(\tau)|^2$ für zwei verschiedene Kopplungsstärken $g = 2\pi\ (2{,}5; 0{,}5)$ MHz zwischen Atom und Resonator. Aus dieser Simulation ergibt sich, unabhängig von der Kopplungsstärke zwischen Atom und Resonator, für ein einzeln erzeugtes Photon eine mehr als 5 mal längere Kohärenzzeit ($\tau_c \approx 1$ µs) als aus der beobachteten Breite des Bunching-Maximums. Jedes Photon für sich sollte also ein deutlich längeres, annähernd perfekt kohärentes Wellenpaket bilden. Eine kurze Kohärenzzeit des Experiments lässt sich nur über eine inhomogene Verbreiterung der Photonen im Frequenzraum erklären. Da die Form des Bunching-Maximums gaußförmig ist, kann auch in erster Näherung das Frequenzspektrum als gaußförmig angenommen werden. Aus der Breite des Maximums $\tau_c = 185 \pm 5$ ns ergibt sich so eine Linienbreite $\Delta\nu_{\text{FWHM}} = 2{,}9$ MHz. Die Photonen müssten daher durch den Ramanprozess bei stark unterschiedlichen Frequenzen emittiert

[2] Die Methode, den Erwartungswert zu berechnen, wurde in einer Fußnote von Kap. 2.3.6 beschrieben.

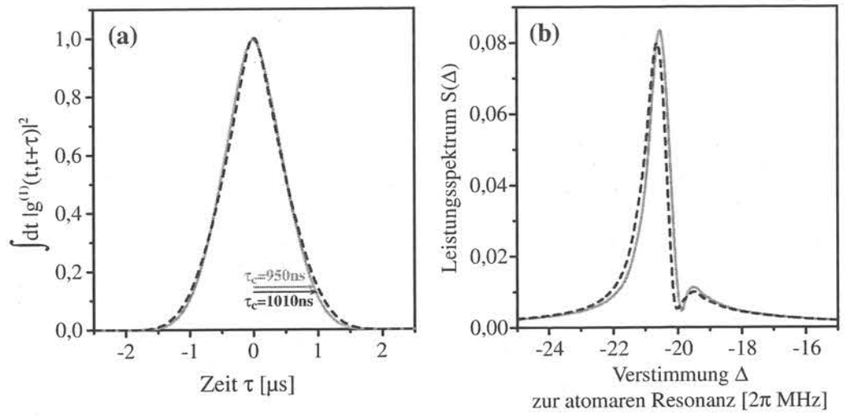



**Abbildung 4.18:** Simulation der Kohärenzeigenschaften der erzeugten Photonen. **(a)** Der $1/e^2$-Abfall des über die Zeit gemittelten Betragsquadrats der Korrelationsfunktion 1.Ordnung $\int dt|g^{(1)}(t,t+\tau)|^2$, hier dargestellt für die Kopplungsstärken $g = 2\pi\ 2.5\,\mathrm{MHz}$ und $g = 2\pi\ 0.5\,\mathrm{MHz}$, definiert die Kohärenzzeit $\tau_c$ bei nicht-stationären Signalen. Die resultierende Kohärenzzeit $\tau_c = 950\,\mathrm{ns}$ für $g = 2\pi\ 2.5\,\mathrm{MHz}$ und $\tau_c = 1010\,\mathrm{ns}$ für $g = 2\pi\ 0.5\,\mathrm{MHz}$ ist deutlich länger als im Experiment beobachtet. Die übrigen zur Simulation verwendeten Parameter sind $(\Delta;\Omega_P^{max};\kappa;\gamma) = 2\pi\ (-20;11{,}3;1{,}25;3)\,\mathrm{MHz}$. **(b)** Das durch eine Fouriertransformation von $g^{(1)}(\tau)$ bestimmte Leistungsspektrum der emittierten Photonen zeigt eine Frequenzverschiebung um $\Delta\omega = 2\pi\ 1\,\mathrm{MHz}$ relativ zum Dunkelzustand, der sich exakt bei $\Delta = -2\pi\ 20\,\mathrm{MHz}$ befinden müsste.

werden, die sogar weiter verteilt sind als es durch die Linienbreite des optischen Resonators von $\Delta\nu = 2{,}5\,\mathrm{MHz}$ vorgegeben ist. Als Ursachen dieser inhomogenen Verbreiterung kommen unterschiedliche Kopplungsstärken bei Emissionsprozess, sowie eine Zeemanverschiebung der verschiedenen $m_F$-Unterzustände in Frage. Für unterschiedliche Kopplungsstärke $g$ variieren die simulierten Frequenzspektren jedoch nur gering, wie Abbildung 4.18(b) zeigt. Es ist daher unwahrscheinlich, dass eine unterschiedliche Kopplung der Atome zur beobachteten Breite des Bunching-Maximums führt. Das Führungsmagnetfeld in x-Richtung von $B_x = 0{,}3\,\mathrm{G}$ führt zu einer Aufspaltung der Ramanübergänge der unterschiedlichen magnetischen Unterzustände von $1{,}4\,\mathrm{MHz}$, wodurch immerhin ein Teil der geringen Breite des Bunching-Maximums erklärt werden kann.

Wie bereits betont, kann aus der Breite des Bunching-Maximums nicht notwendigerweise auf die Kohärenzlänge der Photonen geschlossen werden, es ergeben sich daraus nur erste Hinweise auf die Kohärenzzeit. Diese Betrachtung deutet jedoch an, dass die Kohärenzzeit der erzeugten Photonen 5 mal kürzer als die erwartete Kohärenzzeit ist. Um die Eigenschaften der Photonen besser festzulegen, sollte daher auf jeden Fall das $\Lambda$-System auf ein genau definiertes $m_F$-Untersystem beschränkt werden. Genauere Untersuchungen der Kohärenzeigenschaften der Photonen und deren Ursachen sind Gegenstand weiterführender Experimente. Wichtig ist die Kohärenz der Photonen insbesondere zur Realisierung eines optischen Quantencomputers [5]. Dort werden wechselseitig ununterscheidbare, also kohärente einzelne Photonen benötigt.

# Kapitel 5

# Zusammenfassung und Ausblick

**Erzeugung einzelner Photonen:** Ziel dieser Arbeit war die kontrollierte Erzeugung einzelner Photonen durch einen vom Vakuumfeld eines Resonators stimulierten adiabatischen Ramantransfer (STIRAP). Dazu wird folgender experimenteller Aufbau verwendet: Rubidium-Atome werden in einer magnetooptischen Falle gefangen und in einer optischen Melasse bis auf wenige Mikrokelvin abgekühlt. Nach Ausschalten der Falle werden die Atome durch das Schwerefeld beschleunigt und fallen durch einen optischen Resonator hoher Finesse. Dort werden sie von der Seite mit einem Pumplaser angeregt, der einen Zweig eines Ramanübergangs treibt, während das Vakuumfeld des Resonators eine Emission auf dem anderen Zweig stimuliert. Das vom Atom in den Resonator abgestrahlte Licht verlässt diesen durch dessen Auskoppelspiegel. Das emittierte Licht wird mit Avalanche-Photodetektoren nachgewiesen und dessen Photonenstatistik mit einem Hanbury-Brown & Twiss-Aufbau gemessen.

Als erster Schritt wurde nachgewiesen, dass Photonen durch einen adiabatisch getriebenen Ramantransfer erzeugt werden. Dazu wurde verifiziert, dass:

- Photonen nur in den Resonator emittiert werden, wenn der leere optische Resonator und der Pumplaser in Ramanresonanz sind. Die Linienbreite des Anregungsspektrums ist dabei mit 3 MHz deutlich schmäler als die natürliche Linienbreite des angeregten Zustands von 6 MHz. Dies bedeutet, dass dieser beim Emissionsprozess nicht besetzt wird, da er spontan zerfallen und somit die Linie verbreitern würde. *Somit zeigt diese Beobachtung, dass die Photonen in einem einstufigen Ramanprozess erzeugt werden.* Dabei absorbiert das Atom gleichzeitig ein Photon aus dem Pumplaser und emittiert ein Photon in den Resonator. Da zu Beginn kein Photon im Resonator vorhanden war, stimuliert dessen Vakuumfeld die Emission des Ramanübergangs.

- Die Effizienz des Prozesses charakteristisch von der Position des Pumplasers in Fallrichtung der Atome abhängt. Diese Position bestimmt die Abfolge der Kopplungen an Pumplaser und Vakuumfeld des Resonators. Man beobachtet nur dann eine effiziente Photonenerzeugung, wenn das Atom bereits mit dem Vakuumfeld des Resonators wechselwirkt, während die Intensität des Pumplasers anwächst. *Diese anti-intuitive Pulssequenz ist für einen adiabatischen Ramantransfer über den Dunkelzustand des Systems erforderlich.* Da im „strong-coupling"-Regime der Beitrag des angeregten Zustands zum Dunkelzustand gering ist, lassen sich so Verluste durch spontane Emission unterdrücken.

Im zweiten Schritt wurde die getriggerte Erzeugung einzelner Photonen demonstriert: Da eine fallende Wolke thermischen Atome verwendet wurde, ist die Ankunftszeit der Atome und somit der Zeitpunkt der Photonenerzeugung unbestimmt. Befindet sich ein Atom im Resonator, so kann der Emissionszeitpunkt der Photonen jedoch durch eine alternierende Folge von Pump- und Rückpumplaserpulsen festgelegt werden. Während eines Pumplaserpulses kann ein einzelnes Photon emittiert werden, im anschließenden Rückpumplaserpuls wird das Atom wieder in den Ausgangszustand zurückbefördert. Photonen werden vorwiegend während der Pumplaserpulse detektiert. Die Pumplaserpulse haben eine Repetitionsrate von 250 kHz. Daher kann ein Atom während seines Durchflugs durch den Resonator *eine getriggerte Sequenz von bis zu 7 Photonen* in etwa 30 µs emittieren.

Trotzdem ist auch bei getriggerte Anregung nicht gewährleistet, dass einzelne Photonen erzeugt werden. Die Anzahl der Atome im Resonator ist stets poissonverteilt, so dass beim Ramantransfer die Statistik der Atome direkt auf das Lichtfeld übertragen wird. Daher können nur einzelne Photonen erzeugt werden, wenn zuvor die Anwesenheit eines einzelnen Atoms detektiert wurde. Bei niedrigem Atomfluss kann dies durch eine erste Photonendetektion erfolgen. Im Anschluss daran können in den folgenden Pumplaserintervallen kontrolliert einzelne Photonen erzeugt werden. Dies zeigt sich direkt in einer *sub-poissonschen Photonenstatistik* des emittierten Lichts während dieser Intervalle.

Für eine kontinuierliche Sequenz von Einzelphotonen müsste ein einzelnes Atom im Resonator festgehalten werden [41, 42, 43, 44, 45, 46]. Das Atom-Resonator-System sollte sich dabei weit im Regime starker Kopplung befinden, um eine effiziente Photonenemission zu gewährleisten.

Ein großer Vorteil des adiabatischen Ramantransfers ist, dass die Eigenschaften der erzeugten Photonen gezielt kontrolliert werden können. Zum einen wird die Trägerfrequenz der Photonen durch die Verstimmung des Ramanprozesses definiert. Zum anderen ist der adiabatische Transfer ein unitärer Prozess, der es erlaubt, über die Geschwindigkeit des Transfers die Form des Photonenwellenpakets zu verändern. Infolgedessen sollte es möglich sein, mit verschiedenen Emittern wechselseitig kohärente ununterscheidbare Photonen zu erzeugen, wie sie für einen rein optischen Quantencomputer nach KLM benötigt werden [5]. Die Ununterscheidbarkeit der Photonen könnte über eine Hong-Ou-Mandel-Interferenz nachgewiesen werden [70]. Darüber hinaus bietet ein solcher Aufbau die Möglichkeit, eine Schnittstelle zwischen stationären und fliegenden Qubits eines Quantennetzwerks [8] aufzubauen.

**Kontinuierliche Photonenerzeugung:** Wird ein Atom im Resonator durch Pump- und Rückpumplaser kontinuierlich angeregt, so entsteht ein Ramanlaser-ähnliches System. Da der Pumplaser kontinuierlich auf das Atom wirkt und nicht adiabatisch eingeschaltet wird, erfolgt die Photonenemission zu zufälligen Zeitpunkten. Im Anschluss können die Atome sofort vom Rückpumplaser in den Ausgangszustand zurückbefördert werden und so während ihres Durchflugs durch den Resonator mehrere Photonen emittieren. Für eine geringe mittlere Atomzahl im Resonator $\bar{N} < 1$ beobachtet man nicht-klassisches Licht mit Antibunching, für hohe Atomzahl $\bar{N} > 1$ hingegen klassisches Bunching, wie bei einem Laser unterhalb der Schwelle.

Insgesamt lässt sich diese Beobachtung gut durch ein Modell unabhängig strahlender Emitter erklären. Einzelne Emitter müssen nach einer Photonenemission zuerst in den Ausgangszustand zurückbefördert werden, bevor sie ein weiteres Photon emittieren können. Folglich emittieren sie Photonen mit zeitlichem Abstand. Daher zeigt das emittierte Licht eines einzelnen



Atoms Antibunching. Das emittierte Licht mehrerer Atome kann im freien Raum konstruktiv oder destruktiv interferieren. Bei Resonanzfluoreszenz führt diese Interferenz zu erhöhten Intensitätsfluktuationen und somit zu Bunching. Innerhalb eines Resonator ersetzen stimulierte Emission und Absorption diese Interferenzprozesse. Die Absorption entspricht der destruktiven Interferenz, die stimulierte Emission der konstruktiven Interferenz.

Darüber hinaus können die Atome im Resonator durch Absorption und stimulierte Emission über die gemeinsame Resonatormode Photonen austauschen und so miteinander in Wechselwirkung treten. Dadurch werden kollektive Effekte möglich. Unser System befindet sich jedoch in einem Parameterregime, in dem diese Wechselwirkung noch gering ist. Über die Intensität des Pumplasers lässt sich die Ramankopplung zwischen Atom und Resonator einstellen. Auch bei starker Intensität bleibt die Rate, mit der die beiden Grundzustände gekoppelt sind immer kleiner als die Verlustrate des Resonators. Daher verlassen Photonen, die in den Resonator emittiert wurden, diesen mit großer Wahrscheinlichkeit, bevor sie von einem anderen Atom absorbiert werden oder dieses zu stimulierter Emission anregen. Außerdem ist die Rückpumprate so gering, dass das System nur schwach invertiert werden kann. Daher wird das im Resonator umlaufende Licht durch die Atome kaum verstärkt. Trotzdem sind erste Anzeichen kollektiver Effekte bei einer großen Zahl von Atomen, in Verbindung mit einer starken Rückpumprate zu sehen: ein Anstieg der mittleren Photonenzahl pro Atom um 30%, sowie einer Zunahme der Kohärenz mit steigender Atomzahl. Da als Funktion der Atomzahl im experimentell zugänglichen Bereich jedoch kein Maximum des Fanofaktors beobachtet wird, befindet sich das System immer unterhalb der Laserschwelle. Vermutlich ist die Rückpumprate und damit die Besetzungsinversion zu klein, um diese zu erreichen.

Das System ist sehr gut geeignet, um unabhängige Emitter zu untersuchen und scheint weit vom Regime eines Ein-Atom-Ramanlasers entfernt. Für diesen müsste sowohl ein sehr viel effizienterer Rückpumpmechanismus verwendet, als auch die Kopplung zwischen Atom und Resonator deutlich erhöht werden.

# Anhang A

# Mittlere Kopplungsstärke an den optischen Resonator

Die Übergangswahrscheinlichkeit bei spontaner Emission von Zustand $|e\rangle$ nach Zustand $|g\rangle$ ist

$$W_{e\to g} = \frac{\omega^3 \mu^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} \sim \mu^2. \tag{A.1}$$

Ist nicht nur ein Ausgangszustand, sondern $g$ verschiedene Zustände mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $1/g$ besetzt, und erfolgt der Übergang in $g'$ verschiedene Zielzustände, so muss über die Ausgangszustände gemittelt und über die Zielzustände aufsummiert werden, um die gemittelte Übergangswahrscheinlichkeit $\overline{W}$ zu erhalten

$$\overline{W}_{e\to g} = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g'} W_{e_i\to g_j} \sim \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g'} \mu_{ij}^2 \equiv \overline{\mu^2}. \tag{A.2}$$

Für Rubidium $^{85}$Rb sind die Quadrate der Dipolmatrixelemente zu dem im Experiment verwendeten Zustand $5\mathrm{P}_{3/2}, \mathrm{F} = 3$ in Abb. A.1(obere Hälfte) dargestellt. In Absorption und Emission ergeben sich daraus die in Abb. A.1(untere Hälfte) gezeigten gemittelten Dipolmatrixelemente. Das Verzweigungsverhältnis der Emission aus dem Zustand $5\mathrm{P}_{3/2}, \mathrm{F} = 3$ lässt sich daraus zu $4/9$ in den Zustand $5\mathrm{S}_{1/2}, \mathrm{F} = 2$ zu $5/9$ in den Zustand $5\mathrm{S}_{1/2}, \mathrm{F} = 3$ berechnen.

Entsprechend lässt sich die Kopplungsstärke $g$ an den optischen Resonator über die unterschiedlichen $m_F$-Unterzustände mitteln. Eine sinnvolle Mittelungsgröße ist die Emissionswahrscheinlichkeit einzelner Photonen aus dem Resonator $P_{emit}$. Für schwache Kopplung, d.h. kleine $g$, ergibt sie sich aus Gl. (2.75)

$$P_{emit} \approx \frac{g^2}{\kappa\gamma_{eg}}. \tag{A.3}$$

Dabei ändert sich $g^2 \sim \mu^2$, vgl. Gl. (2.9), entsprechend den Dipolmatrixelementen der unterschiedlichen $m_F$-Unterzustände und muss über diese gemittelt werden. In den Resonator können 2 verschiedene Polarisationen abgestrahlt werden. Das gemittelte Dipolmatrixelement ergibt sich daher zu $\overline{\mu^2} = 2 \times 560 \times 1{,}67 \cdot 10^{-61}\,\mathrm{C^2m^2}$ und somit $\overline{g} = 2\pi\ 2{,}5\,\mathrm{MHz}$. Im





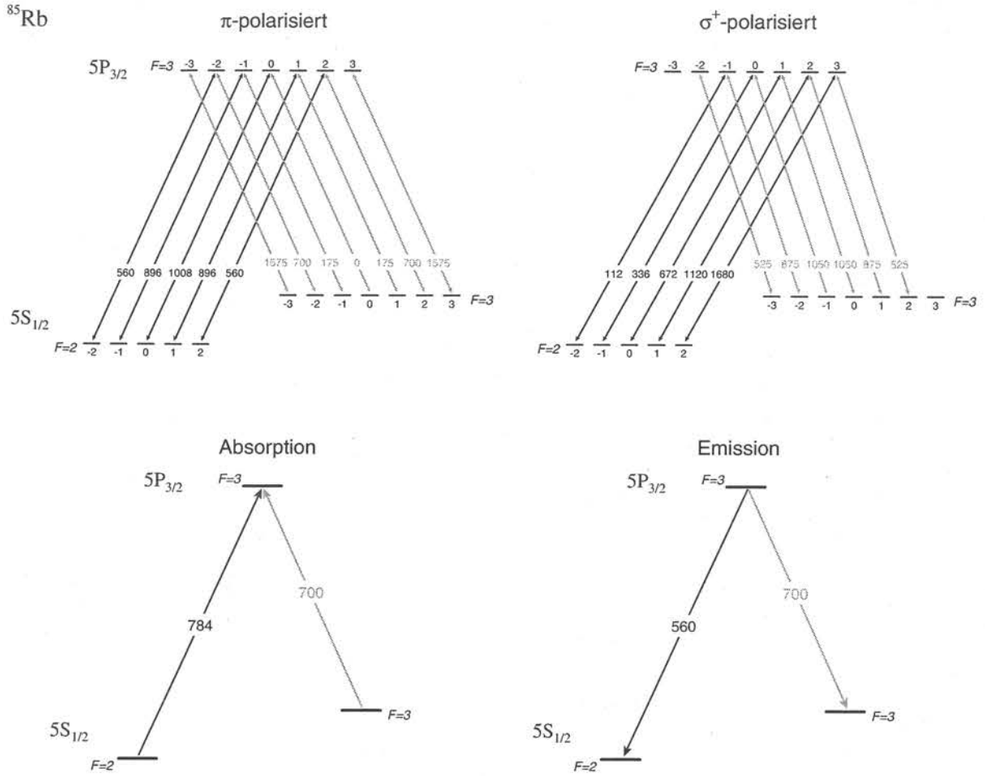



**Abbildung A.1:** Obere Hälfte: Magnetische Unterstruktur der Hyperfeinniveaus $5\mathrm{S}_{1/2}, \mathrm{F} = 2, 3$ und $5\mathrm{P}_{3/2}, \mathrm{F} = 3$ von $^{85}$Rb, sowie die Kopplungsstärken $x$ von $\pi$- und $\sigma^+$-Übergängen [106, 107]. Die Kopplungsstärken $x$ sind so skaliert, dass alle Zahlen ganzzahlig sind. Die Dipolmatrixelemente $\mu$ der jeweiligen Übergänge ergeben sich aus $\mu^2 = x \times 1{,}67 \cdot 10^{-61}\,\mathrm{C^2m^2}$. Untere Hälfte: Im Experiment relevante gemittelte Kopplungsstärken $\bar{x}$ für Emission und Absorption für jeweils eine Polarisation. Bei spontaner Emission wird, im Gegensatz zur induzierten Emission, sowohl $\pi$-, als auch $\sigma^+$- und $\sigma^-$- Licht emittiert. Die gesamte Kopplungsstärke ist somit um einen Faktor 3 größer.

Vergleich dazu ergibt der Übergang mit maximalem Dipolmatrixelement, $\mathrm{F} = 3, m_F = 3 \to \mathrm{F} = 2, m_F = 2$ mit $\mu^2 = 1680 \times 1{,}67 \cdot 10^{-61}\,\mathrm{C^2m^2}$, eine etwas höhere Kopplungsstärke von $g = 2\pi\ 3{,}1\,\mathrm{MHz}$.

Der spontane Zerfall $\gamma_{eg}$ erfolgt jeweils in die 3 möglichen Polarisationen. Die Summe dieser Übergänge ergibt für alle $m_F$-Unterzustände das gleiche Dipolmatrixelement von $\mu^2 = 1680 \times 1{,}67 \cdot 10^{-61}\,\mathrm{C^2m^2}$ , d.h. $\gamma_{eg} = 4/9\ \gamma$ ist unabhängig vom $m_F$-Unterzustand.

Im „strong-coupling"-Regime ist Gl. (A.3) keine gute Näherung für die Emissionswahrscheinlichkeit. Im Experiment ist jedoch nur ein Bruchteil der Atome bei maximaler Kopplung, also im Bauch der Stehwelle des Resonators. Für Atome weiter außerhalb ist $g(\mathbf{r}) = g\ \psi(\mathbf{r})$ sehr viel kleiner, und somit Gl. (A.3) gut erfüllt. In erster Näherung lässt sich daher analog zu

früheren Experimenten [108] eine effektive Atomzahl $N_{eff}$ innerhalb des Resonators definieren

$$N_{eff} \equiv \sum_i |\psi(\mathbf{r_i})|^2, \tag{A.4}$$

wodurch sich nun die gemittelte Emissionswahrscheinlichkeit $\overline{P}_{emit}$ für effektive Atomzahlen $N_{eff} \ll 1$ zu

$$\overline{P}_{emit} \approx \frac{\overline{g^2} N_{eff}}{\kappa \gamma_{eg}} \tag{A.5}$$

ergibt. Die effektive Atomzahl legt nahe, eine statistische Verteilung der Atome innerhalb der Mode anzunehmen. Im zeitlichen Mittel ist dies sicherlich gut erfüllt. Detektiert man jedoch die Anwesenheit eines einzelnen Atoms bei starker Kopplung durch die Detektion eines einzelnen Photons, wie in Kapitel 4.2.2, so können die übrigen Atome bei schwacher Kopplung in guter Näherung vernachlässigt werden. Die Emissionswahrscheinlichkeit kann daher nicht mehr als einfaches Mittel über alle möglichen Zustände und Positionen der Atome betrachtet werden. Atome näher bei einem Bauch der Stehwelle und mit größeren Dipolmatrixelementen werden verstärkt zum Messsignal beitragen – in diesem Fall verliert die oben definierte mittlere Kopplungsstärke ihren Sinn.

# Anhang B

# Nicht-hermitesche spektrale Zerlegung der Dichtematrix

Man beachte, dass die Eigenvektoren des nicht-hermiteschen Hamiltonoperators $\hat{H}'$ aus Gl. (2.46) kein Orthonormalsystem bilden. Es existieren linksseitige und rechtsseitige Eigenvektoren des Hamiltonoperators

$$\begin{aligned} \hat{H}'|\phi_i\rangle &= \hbar\omega_i|\phi_i\rangle \\ \langle\psi_i|\hat{H}' &= \hbar\omega_i\langle\psi_i|, \end{aligned} \tag{B.1}$$

deren Normierung so gewählt werden kann, das

$$\langle\psi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij} \tag{B.2}$$

erfüllt ist. Die Projektoren auf die Eigenzustände lauten

$$\hat{P}_i = |\phi_i\rangle\langle\psi_i|, \tag{B.3}$$

mit deren Hilfe sich jeder Operator, wie auch die Dichtematrix spektral zerlegen lässt

$$\rho_i = Sp(\hat{\rho}\hat{P}_i). \tag{B.4}$$

Solange die Projektoren vollständig sind, also

$$\sum_i \hat{P}_i = \hat{1} \tag{B.5}$$

lässt sich die Dichtematrix umgekehrt auch wieder durch ihre Komponenten ausdrücken

$$\hat{\rho} = \sum_i \rho_i \hat{P}_i. \tag{B.6}$$

Für die Darstellung einer Dichtematrix bezüglich einer Orthonormalbasis gilt $Sp(\rho) = 1$. Entsprechend gilt auch für die Darstellung der Dichtematrix in der nicht-orthonormalen Basis

$$\sum_i \rho_i = 1, \tag{B.7}$$

jedoch lassen sich die $\rho_i$ nicht mehr als Besetzungswahrscheinlichkeiten der unterschiedlichen Eigenzustände interpretieren, da die Koeffizienten $\rho_i$ im allgemeinen komplex sein können. Trotzdem bedeutet eine Amplitude $\rho_i$ nahe 1, wobei die restlichen Amplituden verschwindend klein sind, dass die Dichtematrix weitgehend nur die Komponente $\hat{P}_i$ enthält. Bleibt dies für die gesamte Zeitentwicklung erhalten, so kann man von einem adiabatischen Folgen sprechen. Da die Dichtematrix ein hermitescher Operator ist, kann dies nur erfüllt sein, wenn auch $\hat{P}_i$ in guter Näherung hermitesch ist, also $|\psi_i\rangle \approx |\phi_i\rangle$.

# Literaturverzeichnis


[1] R. Feynman. Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys.*, 21(6/7):467–488, 1982.

[2] D. Deutsch. Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 400:97–117, 1985.

[3] D. Deutsch. Quantum computational networks. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 425:73–90, 1989.

[4] D. P. DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschr. Phys.*, 48:771, 2000.

[5] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn. A scheme for efficient quantum computing with linear optics. *Nature*, 409:46–52, 2001.

[6] T.B. Pittman, B.C. Jacobs, and J.D. Franson. Demonstration of non-deterministic quantum logic operations using linear optical elements. *Phys. Rev. Lett.*, 88:257902, 2002, quant-ph/0109128.

[7] F. De Martini, V. Bužek, F. Sciarrino, and C. Sias. Experimental realization of the quantum universal not gate. *Nature*, 419:815–818, 2002.

[8] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi. Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network. *Phys. Rev. Lett.*, 78:3221–3224, 1997.

[9] C. K. Hong and L. Mandel. Experimental realization of a localized one-photon state. *Phys. Rev. Lett.*, 56:58–60, 1986.

[10] A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek, and S. Schiller. Quantum state reconstruction of the single-photon fock state. *Phys. Rev. Lett.*, 87:050402, 2001.

[11] T. B. Pittman and J. D. Franson. Cyclical quantum memory for photonic qubits. *Phys. Rev. A*, 66:062302, 2002.

[12] J. Kim, O. Benson, H. Kan, and Y. Yamamoto. A single photon turnstile device. *Nature*, 397:500–503, 1999.

[13] P. Michler, A. Kiraz, C. Becher, W. V. Schoenfeld, P. M. Petroff, L. Zhang, E. Hu, and A. Imamoglu. A quantum dot single photon turnstile device. *Science*, 290:2282–2285, 2000.

[14] C. Santori, M. Pelton, G. Solomon, Y. Dale, and Y. Yamamoto. Triggered single photons from a quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, 86:1502–1505, 2001.

[15] E. Moreau, I. Robert, J. M. Gérard, I. Abram, L. Maniv, and V. Thierry-Mieg. Single-mode solid-state single photon source based on isolated quantum dots in pillar microcavities. *Appl. Phys. Lett.*, 79:2865–2867, 2001.

[16] R. M. Thompson, R. M. Stevenson, A. J. Shields, I. Farrer, C. J. Lobo, D. A. Ritchie, M. L. Leadbeater, and M. Pepper. Single-photon emission from exciton complexes in individual quantum dots. *Phys. Rev. B*, 64:201302, 2001.

[17] V. Zwiller, H. Blom, P. Jonsson, N. Panev, S. Jeppesen, T. Tsegaye, E. Goobar, M.-E. Pistol, L. Samuelson, and G. Björk. Single quantum dots emit single photons at a time: Antibunching experiments. *Appl. Phys. Lett.*, 78:2476–2478, 2001.

[18] Z. Yuan, B. E. Kardynal, R. M. Stevenson, A. J. Shields, C. J. Lobo, K. Cooper, N. S. Beattie, D. A. Ritchie, and M. Pepper. Electrically driven single-photon source. *Science*, 295:102–105, 2002.

[19] M. Pelton, C. Santori, J. Vučković, B. Zhang, G. S. Solomon, J. Plant, and Y. Yamamoto. An efficient source of single photons: A single quantum dot in a micropost microcavity. *Phys. Rev. Lett.*, 89:233602, 2002, quant-ph/0208054.

[20] C. Kurtsiefer, S. Mayer, P. Zarda, and H. Weinfurter. Stable solid-state source of single photons. *Phys. Rev. Lett.*, 85:290–293, 2000.

[21] R. Brouri, A. Beveratos, J.-P. Poizat, and P. Grangier. Photon antibunching in the fluorescence of individual color centers in diamond. *Opt. Lett.*, 25:1294–1296, 2000.

[22] A. Beveratos, S. Kühn, R. Brouri, T. Gacoin, J.-P. Poizat, and P. Grangier. Room temperature stable single-photon source. *Eur. Phys. J. D*, 18:191–196, 2002.

[23] F. Jelezko, A. Volkmer, I. Popa, K. K. Rebane, and J. Wrachtrup. Coherence length of photons from a single quantum system. *Phys. Rev. A*, 67:041802, 2003.

[24] F. de Martini, G. Di Giuseppe, and M. Marrocco. Single-mode generation of quantum photon states by excited single molecules in a microcavity trap. *Phys. Rev. Lett.*, 76:900–903, 1996.

[25] C. Brunel, B. Lounis, P. Tamarat, and M. Orrit. Triggered source of single photons based on controlled single molecule fluorescence. *Phys. Rev. Lett.*, 83:2722–2725, 1999.

[26] B. Lounis and W. E. Moerner. Single photons on demand from a single molecule at room temperature. *Nature*, 407:491–493, 2000.

[27] F. Treussart, R. Alléaume, V. Le Floc'h, L.T. Xiao, J.-M. Courty, and J.-F. Roch. Direct measurement of the photon statistics of a triggered single photon source. *Phys. Rev. Lett.*, 89:093601, 2002, quant-ph/0202130.



[28] M. Hennrich, T. Legero, A. Kuhn, and G. Rempe. Vacuum-stimulated raman scattering based on adiabatic passage in a high-finesse optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4872–4875, 2000.

[29] A. Kuhn, M. Hennrich, and G. Rempe. Deterministc single-photon source for distributed quantum networking. *Phys. Rev. Lett.*, 89:067901, 2002.

[30] A. Kuhn and G. Rempe. Optical cavity QED: Fundamentals and application as a single-photon light source. In F. De Martini and C. Monroe, editors, *Experimental Quantum Computation and Information*, volume CXLVIII, pages 37–66, Amsterdam, 2002. Int. School of Physics Enrico Fermi, IOS Press.

[31] A. Kuhn, M. Hennrich, and G. Rempe. Strongly coupled atom-cavity systems. In G. Leuchs and T. Beth, editors, *Quantum Information Processing*, pages 182–195, Berlin, 2002. Wiley-VCH Verlag.

[32] M. Hennrich, T. Legero, A. Kuhn, and G. Rempe. Counter-intuitive vacuum-stimulated raman scattering. *J. Mod. Opt.*, 50(6–7):935–942, 2003.

[33] C. K. Law and H. J. Kimble. Deterministic generation of a bit-stream of single-photon pulses. *J. Mod. Opt.*, 44:2067–2074, 1997.

[34] A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller, and H. J. Kimble. Synthesis of arbitrary quantum states via adiabatic transfer of Zeeman coherence. *Phys. Rev. Lett.*, 71:3095, 1993.

[35] A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller, O. Carnal, and H. J. Kimble. Quantum state mapping between multilevel atoms and cavity light fields. *Phys. Rev. A*, 51:1578–1596, 1995.

[36] C. K. Law and J. H. Eberly. Arbitrary control of a quantum electromagnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1055, 1996.

[37] A. Kuhn, M. Hennrich, T. Bondo, and G. Rempe. Controlled generation of single photons from a strongly coupled atom-cavity system. *Appl. Phys. B*, 69:373–377, 1999.

[38] C. Reese, C. Becher, A. Imamoğlu, E. Hu, B. D. Gerardot, and P. M. Petroff. Photonic crystal microcavities with self-assembled inas quantum dots as active emitters. *Appl. Phys. Lett.*, 78:2279–2281, 2001.

[39] T. D. Happ, I. I. Tartakovskii, V. D. Kulakovskii, J.-P. Reithmaier, M. Kamp, and A. Forchel. Enhanced light emission of $In_xGa_{1-x}As$ quantum dots in a two-dimensional photonic-crystal defect microcavity. *Phys. Rev. B*, 66:041303(R), 2002.

[40] J. Vučković and Y. Yamamoto. Photonic crystal microcavities for cavity quantum electrodynamics with a single quantum dot. *Appl. Phys. Lett.*, 82(15):2374–2376, 2003.

[41] J. Ye, D. W. Vernooy, and H. J. Kimble. Trapping of single atoms in cavity qed. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4987–4990, 1999.

[42] C. J. Hood, T.W. Lynn, A.C. Doherty, A.S. Parkins, and H.J. Kimble. The atom-cavity microscope: Single atoms bound in orbit by single photons. *Science*, 287:1447–1453, 2000.

[43] P. W. H. Pinkse, T. Fischer, P. Maunz, and G. Rempe. Trapping an atom with single photons. *Nature*, 404:365–368, 2000.

[44] J. A. Sauer, K. M. Fortier, M. S. Chang, C. D. Hamley, and M. S. Chapman. Cavity qed with optically transported atoms. quant-ph/0309052.

[45] G. R. Guthörlein, M. Keller, K. Hayasaka, W. Lange, and H. Walther. A single ion as a nanoscopic probe of an optical field. *Nature*, 414:49–51, 2001.

[46] A. B. Mundt, A. Kreuter, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt. Coupling a single atomic quantum bit to a high finesse optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 89(10):103001, 2002, quant-ph/0202112.

[47] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 51:89–109, 1963.

[48] B. W. Shore and P. L. Knight. The Jaynes-Cummings model. *J. Mod. Opt.*, 40:1195, 1993.

[49] M. M. T. Loy. Observation of population inversion by optical adiabatic rapid passage. *Phys. Rev. Lett.*, 32:814–817, 1974.

[50] M. M. T. Loy. Two-photon adiabatic inversion. *Phys. Rev. Lett.*, 41:473–475, 1978.

[51] L. P. Yatsenko, B. W. Shore, T. Halfmann, and K. Bergmann. Source of metastable H(2s) atoms using the stark chirped rapid-adiabatic-passage technique. *Phys. Rev. A*, 60:R4237–R4240, 1999.

[52] A. Kuhn, H. Perrin, W. Hänsel, and C. Salomon. Three dimensional Raman cooling using velocity selective rapid adiabatic passage. In K. Burnett, editor, *OSA TOPS on Ultracold Atoms and BEC*, volume 7, pages 58–65. OSA, 1996.

[53] H. Perrin, A. Kuhn, I. Bouchoule, and C. Salomon. Sideband cooling of neutral atoms in a far-detuned optical lattice. *Europhys. Lett.*, 42:395–400, 1998.

[54] S. E. Harris. Electromagnetically induced transparency with matched pulses. *Phys. Rev. Lett.*, 70:552–555, 1993.

[55] S. E. Harris. Electromagnetically induced transparency. *Phys. Today*, 50(7):36, 1997.

[56] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, 397:594–598, 1999.

[57] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth, and M. D. Lukin. Storage of light in atomic vapor. *Phys. Rev. Lett.*, 86:783–786, 2001.



[58] N. V. Vitanov, M. Fleischhauer, B. W. Shore, and K. Bergmann. Coherent manipulation of atoms and molecules by sequential laser pulses. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 46:55–190, 2001.

[59] A. Messiah. *Quantum Mechanics*, volume 2. J. Wiley & Sons, NY, 1958.

[60] E. M. Purcell. Spontaneous emission probabilities at radio frequencies. *Phys. Rev.*, 69:681, 1946.

[61] P. Goy, J. M. Raimond, M. Gross, and S. Haroche. Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1903–1906, 1983.

[62] D. J. Heinzen, J. J. Childs, J. E. Thomas, and M. S. Feld. Enhanced and inhibited spontaneous emission by atoms in a confocal resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1320–1323, 1987.

[63] P. Michler, A. Imamoglu, M. D. Mason, P. J. Carson, G. F. Strouse, and S. K. Buratto. Quantum correlation among photons from a single quantum dot at room temperature. *Nature*, 406:968–970, 2000.

[64] L. A. Lugiato. Theory of optical bistability. In E. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume XXI, pages 71–216, B. V., 1984. Elsevier Science Publishers.

[65] M. Fleischhauer, S.F. Yelin, and M.D. Lukin. How to trap photons? Storing single-photon quantum states in collective atomic excitations. *Opt. Comm.*, 179:395–410, 2000.

[66] L.-M. Duan, A. Kuzmich, and H. J. Kimble. Cavity QED and quantum information processing with "hot" trapped atoms. *Phys. Rev. A*, 67:032305, 2003.

[67] P. Meystre and M. Sargent III. *Elements of quantum optics*. Springer-Verlag, 3rd edition, 1998.

[68] E. Haiver, S.P. Novsett, and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations*, volume I of *Springer Series in Computational Mathematics 8*. Springer Verlag, 1987.

[69] N. V. Vitanov. Complete population return in a two-state system driven by a smooth asymmetric pulse. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 28:L19–L22, 1995.

[70] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2044–2046, 1987.

[71] L. Mandel and E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambidge University Press, Cambridge, USA, 1995.

[72] M. Teich and B. Saleh. Photon bunching and antibunching. In E. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume XXVI, pages 1–104, Amsterdam, 1988. North-Holland.

[73] H. J. Carmichael, P. Drummond, P. Meystre, and D. F. Walls. Intensity correlations in resonance fluorescence with atomic number fluctuations. *J. Phys. A*, 11:L121–L126, 1978.

[74] E. Jakeman, E. R. Pike, P. N. Pusey, and J. M. Vaughan. The effect of atomic number fluctuations on photon antibunching in resonance fluorescence. *J. Phys. A.*, 10:L257–L259, 1977.

[75] H. J. Kimble, M. Degenais, and L. Mandel. Multiatom and transit-time effects on photon-correlation measurements in resonance fluorescence. *Phys. Rev. A*, 18(1):201–207, 1978.

[76] F. Diedrich and H. Walther. Nonclassical radiation of a single stored ion. *Phys. Rev. Lett.*, 58(3):203–206, 1987.

[77] H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel. Photon antibunching in resonance fluorescence. *Phys. Rev. Lett.*, 39(11):691–695, 1977.

[78] S. Bali, D. Hoffmann, J. Simán, and T. Walker. Measurements of intensity correlations of scattered light from laser-cooled atoms. *Phys. Rev. A*, 53:3469–3472, 1996.

[79] C. Jurczak, K. Sengstock, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, C.I. Westbrook, and A. Aspect. Observation of intensity correlations in the fluorescence from laser cooled atoms. *Opt. Comm.*, 115:480–484, 1995.

[80] F. A. Narducci. *Photon Correlation effects in single and multi-atom systems*. PhD thesis, University of Rochester, Prof. L. Mandel, Rochester, New York, 1996.

[81] M.O. Scully and M.S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1997.

[82] H. J. Carmichael and D. F. Walls. A quantum-mechanical master equation treatment of the dynamical stark effect. *J. Phys. B*, 9:1199–1219, 1976.

[83] P. R. Rice and H. J. Carmichael. Photon statistics of a cavity-QED laser: A comment on the laser-phase-transition analogy. *Phys. Rev. A*, 50:4318–4329, 1994.

[84] A. B. Klimov, J. L. Romero, J. Delgado, and L. L. Sánchez-Soto. Master equations for effective hamiltonians. *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.*, 5:34–39, 2003.

[85] A.S. Parkins and H.J. Kimble. Quantum state transfer between motion and light. *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.*, 1:496–504, 1999.

[86] S. Clark and S. Parkins. Coupling of effective one-dimensional two-level atoms to squeezed light. *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.*, 5:145–154, 2003.

[87] Y. Mu and C. M. Savage. One-atom lasers. *Phys. Rev. A*, 46:5944–5954, 1992.

[88] U. Martini. *Cavity QED with many atoms*. PhD thesis, Ludwig-Maximilians-Universität, München, February 2000.

[89] K. An, J.J. Childs, R. R. Dasari, and M. S. Feld. Microlaser: A laser with one atom in an optical resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 73(25):3375–3378, 1994.



[90] P.W.H. Pinkse and G. Rempe. Single atoms moving in a high finesse cavity. In R. D. van Zee and J. P. Looney, editors, *Cavity-Enhanced Spectroscopies*, chapter 8, pages 255–295. Academic Press, Amsterdam, 2002.

[91] P. Münstermann, T. Fischer, P. W. H. Pinkse, and G. Rempe. Single slow atoms from an atomic fountain observed in a high-finesse optical cavity. *Opt. Comm.*, 159:63–67, 1999.

[92] C. J. Hood and H. J. Kimble. Characterization of high-finesse mirrors: Loss, phase shifts, and mode structure in an optical cavity. *Phys. Rev. A*, 64:033804, 2001.

[93] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. Interferometry of the intensity fluctuations in light ii. an experimental test of the theory for partially coherent light. *Proc. Roy. Soc.*, A242:300–319, 1957.

[94] S. Dürr, T. Nonn, and G. Rempe. Origin of quantum-mechanical complementarity probed by a 'which-way' experiment in an atom interferometer. *Nature*, 395:33–37, 1998.

[95] S. Kunze, S. Dürr, K. Dieckmann, M. Elbs, U. Ernst, A. Hardell, S. Wolf, and G. Rempe. Standing wave diffraction with a beam of slow atoms. *J. Mod. Opt.*, 44:1863–1881, 1997.

[96] S. Kunze. *Langsame Atome in stehenden Lichtwellen*. PhD thesis, Universität Konstanz, Tectum Verlag, Marburg, Mai 1996.

[97] S. Dürr. *Complementary in an Atom Interferometer*. PhD thesis, Universität Konstanz, UFO Atelier, Allensbach, Jan. 1999.

[98] T. Bondo. Laser induced fluorescence detection of single atoms. Master's thesis, Københavns Universiet, Niels Bohr Institute, H.C. Ørsted Laboratoriet, København, August 1999.

[99] M. Prevedelli, T. Freegrade, and T.W. Hänsch. Phase locking of grating-tuned diode lasers. *Appl. Phys. B*, 60:S241–S248, 1995.

[100] S. Nußmann. Realisierung, Charakterisierung und Anwendung eines phasenstabilisierten Diodenlasersystems. Diplomarbeit, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, Prof. Helm, Juni 2000.

[101] A. Kuhn, M. Hennrich, and G. Rempe. Kuhn, Hennrich, and Rempe reply. *Phys. Rev. Lett.*, 90(24):249802, 2003.

[102] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, J. R. Buck, and H. J. Kimble. Experimental realization of a one-atom laser in the regime of strong coupling. *Nature*, 425:268–271, 2003.

[103] A. D. Boozer, A. Boca, J. R. Buck, J. McKeever, and H. J. Kimble. Comparison of theory and experiment for a one-atom laser in a regime of strong coupling. quant-ph/0309133.

[104] K.R. Brown, K.M. Dani, D.M. Stamper-Kurn, and K.B. Whaley. Determinisitic optical fock state generation. *Phys. Rev. A*, 67:043818, 2003, quant-ph/0211134.

[105] M. Löffler. *Korrelationen und Bewegungsquantisierung in Ein-Atom-Maser und -Laser*. PhD thesis, Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Juli 1998.

[106] H.J. Metcalf and P. van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.

[107] I.I. Sobelman. *Atomic Spectra and Radiative Transitions*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2nd edition, 1992.

[108] P. Münstermann, T. Fischer, P. Maunz, P. W. H. Pinkse, and G. Rempe. Observation of cavity-mediated long-range light forces between strongly coupled atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4068–4071, 2000.

# Danksagung

Zum Schluss möchte ich die Gelegenheit nutzen, denjenigen zu danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

- Ein besonderer Dank gilt Prof. Gerhard Rempe und Axel Kuhn für die schöne Idee zu diesem Experiment. Ihre Begeisterung für das Thema haben mich fortwährend motiviert und mir Spaß beim Forschen bereitet. Zudem haben sie mir mit vielen hilfreichen Diskussionen und Ideen immer geholfen, auf einfachem Weg zum Ziel zu gelangen.

- Thomas Legero danke ich insbesondere für die große Hilfe beim Umzug der Apparatur, sowie für die immer spannenden Diskussionen und das Ertragen meines Chaos. Auch Torsten Bondo, Stefan Kudera, Tatjana Wilk und Patrizia Krok sei hier vielmals gedankt. Ich habe die angenehme und stimulierende Atmosphäre im Labor immer genossen.

- Zwei Altmeister der AGRempe möchte ich hier ebenfalls hervorheben: Stefan Dürr hat mich zu Beginn meiner Arbeit in die Tricks und Tücken des vorigen Atominterferometers eingeführt und Peter Münstermann hat mir beim fortwährend durchbrennenden Hochspannungsverstärker sehr geholfen.

- Den Cavies Pepijn Pinkse, Peter Maunz, Thomas Fischer, Thomas Puppe und Ingrid Schuster sei gedankt für die vielen hilfreichen Tipps zum Experiment. Ohne ihre Erfahrung mit optischen Resonatoren wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Niels Syassen und Markus Hijlkema danke ich außerdem für den sportlichen Ausgleich beim wöchentlichen Lauftreff.

- Stefan Nußmann, Bernhard Weber und Felix Rohde am QGate-Experiment danke ich für den spannenden Ausblick in die Zukunft des Experiments. Ich wünsche ihnen, dass sie in naher Zukunft ebenfalls einzelne Photonen erzeugen können.

- Andreas Marte bleibt mir besonders in Erinnerung durch die faszinierenden Einblicke in die Welt des Kletterns. Seinen Mitstreitern am BEC-Experiment Johannes Schuster, Urban Ernst, Stefan Wößner, Sebastian Amtage, Bernhard Sang, Sebastian Ernst und Sven Teichmann danke ich für die spontane Hilfsbereitschaft, die angenehme Nachbarschaft und fürs Ertragen meines Musikgeschmacks.

- Sadiq Rangwala, Tobias Junglen, Thomas Rieger sei hier insbesondere gedankt für die spannenden Experimente mit Hochspannung und geruchsintensiven Substanzen.

- Bruce Shore danke ich für die äußerst hilfreichen Diskussionen zu klassischem und nichtklassischem Licht, konventionellen und cavity-QED Lasern.

- Ein besonderer Dank gilt auch den Technikern Josef Bayerl, Franz Denk, Helmut Stehbeck, Peter Sachsenmaier und Thomas Wiesmaier. Ihr Konstruktionstalent und Fachwissen beim Aufbau der Apparaturen und ihre schnelle Hilfe bei allen technischen Problemen sind von unschätzbarem Wert.

- Allen Mitarbeitern der Gruppe danke ich jedoch insbesondere für den tollen Zusammenhalt und die schönen Stunden bei Skitagen, Festen und Grillabenden.

- Vor allem danke ich jedoch meiner Familie und Susanne für ihre Unterstützung, ihre Liebe und fürs Mutsprechen und Begleiten während aller Höhen und Tiefen dieser Arbeit.