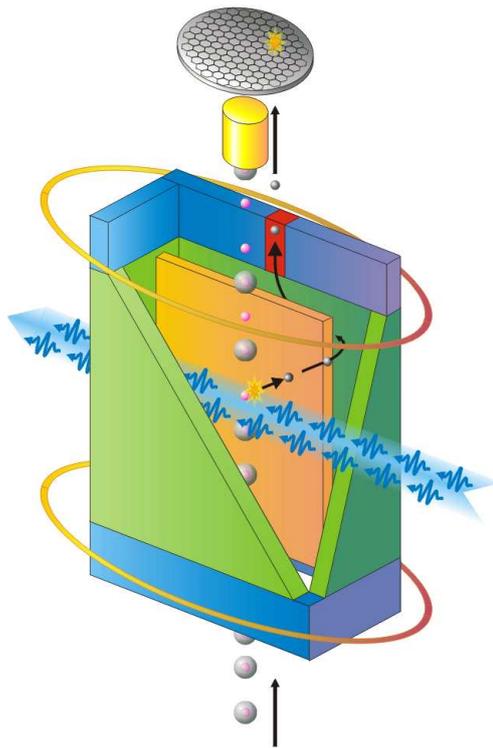


Quantenchaos in offenen Systemen



Gernot Stania

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Ericson-Fluktuationen	12
2.1	Geschichtlicher Hintergrund	12
2.2	Begriffliche Klärung	13
2.3	Universalität	15
2.4	Klassisch chaotische Streuung	15
2.5	Das Experiment	18
2.6	Einheitensysteme und Konstanten	20
3	Alkaliatome in äußeren Feldern	22
3.1	Klassische Beschreibung	22
3.1.1	Lagrange-Funktion	22
3.1.2	Grenzfall unendlicher Kernmasse	24
3.1.3	Relativistische Betrachtungen	25
3.1.4	Hamilton-Funktion	28
3.1.5	Geeignete Einheiten	29
3.1.6	Skalierungseigenschaften	30
3.2	Quantenmechanische Beschreibung	32
3.3	Planung der Experimente	32
3.4	Geometrie des Experimentes	33
3.4.1	Experimentelle Parameter	34
3.4.2	Zeitunabhängige Wechselwirkungen	35
3.4.3	Zeitabhängige Wechselwirkungen	38
3.5	Betrachtungen zur Laser-Mode	43
4	Spektroskopie an Atomstrahlen	46
4.1	Atomstrahlexperimente als Streuvorgänge	46
4.2	Theoretische Beschreibung	48
4.2.1	Streutheorie	49
4.2.2	Störungstheorie	50
4.3	Streuamplituden	50
4.3.1	Direkte Integraldarstellung	50
4.3.2	Diskrete nichtentartete Energieeigenzustände	52
4.4	Fermis Goldene Regel	54
4.4.1	Grenzfall unendlicher Wechselwirkungszeit	54
4.4.2	Verallgemeinerte goldene Regel	55
4.4.3	Herkömmliche Goldene Regel	56

4.4.4	Betrachtungen zur fundamentalen Gauß-Mode	57
4.4.5	Einordnung des Ergebnisses	57
4.5	Formel von Rescigno-McKoy (Verallgemeinerung)	58
4.5.1	Näherung für optische Frequenzen	59
4.5.2	Allgemeine Formel von Rescigno-McKoy	59
4.5.3	Zusammenfassung	61
4.6	Messung der Anregungsfunktion	61
4.7	Resonanzen und Ericson-Fluktuationen	63
5	Vakuuapparatur	66
5.1	Helium-Bad-Kryostat	66
5.2	Atomofen	68
5.3	Atomstrahl- und Felderzeugung	69
5.3.1	Supraleitender Magnet	69
5.4	Elektrodeneinsatz	71
5.4.1	Atomstrahlerzeugung	71
5.4.2	Photoabsorptions- und Feldionisationszone	73
5.4.3	Atomstrahlfänger	75
5.5	Elektronendetektor	75
6	Laser-Aufbau	78
6.1	Optische Pumpstufe	78
6.1.1	Beteiligte Hyperfeinstrukturzustände	80
6.1.2	Driftunterdrückung	83
6.1.3	Neu entwickelte elektronische Regelkreise	89
6.1.4	Frequenzfeinabstimmung	96
6.2	Farbstoff-Laser	97
6.2.1	Grundlagen	98
6.2.2	Änderungen	98
6.2.3	Relative Frequenzmessung	99
6.3	Absolute Frequenzmessung	99
6.3.1	Grundlagen	100
6.3.2	Fehlerquellen	102
6.3.3	Verbesserung der Elektronik	104
6.3.4	Verbesserung des optischen Aufbaus	105
6.3.5	Statistische Meßfehler	105
6.3.6	Auflösung der Frequenzmessung	106
6.3.7	Messung der Stärke der magnetischen Induktion	111
6.3.8	Energieskala für experimentelle Spektren	112
6.3.9	Strukturauflösung in experimentellen Spektren	113
7	Messungen am Atomstrahl	116
7.1	Experimentelle Auflösung	116
7.1.1	Strukturauflösung	116
7.1.2	Absolute Energieauflösung	118
7.2	Stark-Spektren und elektrische Feldeichung	119
7.2.1	Stark-Spektren und Stark-Karten	119
7.2.2	Das neue Eichverfahren	124
7.3	Eichung des supraleitenden Magneteten	134
7.3.1	Zeeman-Effekt der Hyperfeinstruktur von Rubidium	134

7.3.2	Eichmessung	136
7.4	Messung von Ericson-Fluktuationen	139
7.4.1	Auswertung und Darstellung der Ergebnisse	140
7.4.2	Spektren in gekreuzten Feldern	144
7.4.3	Nachweis von Ericson-Fluktuationen	146
7.5	Unterschiedliche Induktionsstärken	150
7.6	Weitere Untersuchungen der Autokorrelation	154
A	Nichtevakuierte Interferometer	160
A.1	Edlen-Formel	160
A.2	Mit Luft gefülltes FPI	160
B	Synchrone Demodulation	163
B.1	Elektronische Demodulation	163
B.2	Synchrone Demodulation	163
B.2.1	Grundlagen	164
B.2.2	Anwendungsbezogene Fragen	164
B.3	Stabilisierung durch synchrone Demodulation	165
B.4	Signalanalyse	166
B.4.1	Signalanalyse durch Fourier-Zerlegung	166
B.4.2	Vorfilterung der synchronen Demodulation	169
B.4.3	Arbeitspunktdriften	170
B.5	Zusammenfassung der Ergebnisse	173
B.5.1	Synchrones Demodulationssignal	173
C	Streutheorie für zeitabhängige Störungen	175
C.1	Streutheoretische Begriffsbildungen	175
C.1.1	Asymptotische Freiheit	176
C.1.2	Møller-Wellenoperatoren	176
C.1.3	Asymptotische Vollständigkeit	177
C.1.4	Überblick	178
C.2	Dyson-Reihe	179
C.2.1	Bewegungsgleichungen in Banach-Räumen	179
C.2.2	Bewegungsgleichungen in Hilbert-Räumen	184
C.3	Schrödinger-Gleichungen	185
C.3.1	Schrödinger- und Dirac-Bild	185
C.3.2	Lösung der Schrödinger-Gleichung	186
C.4	Streutheorie für zeitabhängige Potentiale	189
D	Bezeichnungen	191
D.1	Allgemeine Schreibweisen	191
D.2	Normierte Räume	191
D.3	Abbildungen	192
D.4	Differential- und Integralrechnung	193
D.5	Direkte Integraldarstellung	193

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schema des Experiments	10
2.1	Koch-Schneeflocke	17
3.1	Koordinaten im Laborsystem	35
3.2	Geometrie des Experimentes	43
5.1	Vakuuapparatur im Überblick	67
5.2	Supraleitender Schalter	70
5.3	Photoabsorptions- und Feldionisationszone	72
6.1	Laser-Aufbau	79
6.2	Sättigungsspektrum	88
6.3	Modell für die Regelkreise	92
6.4	Messung des Störverhaltens 1	95
6.5	Messung des Störverhaltens 2	95
6.6	Grenzen der Regelkreisdynamik	96
6.7	Aufbau des Michelson-Interferometers	100
6.8	Eichmessungen mit dem Michelson-Interferometers	106
7.1	Experimentelle Linienbreite und -form im Rydberg-Bereich	117
7.2	Fehler bei der Bestimmung der absoluten Energieskala	118
7.3	Anregungsschema für experimentelle Stark-Karten	121
7.4	Numerische Stark-Karte für ^{85}Rb , $ m_j = 1/2$	122
7.5	Numerische Stark-Karte für ^{85}Rb , $ m_j = 3/2$	122
7.6	Vergrößerte numerische Stark-Karte für ^{85}Rb , $ m_j \leq 3/2$	123
7.7	Analytisches Modell für den Linienabstand	126
7.8	Experimentelle Stark-Karten	128
7.9	Bestimmung der elektrischen Eichparameter	130
7.10	Experimentelle Stark-Spektren und numerische Rechnung	131
7.11	Zeitliche Konstanz der Eichparameter	132
7.12	Zeeman-Struktur (schematisch)	137
7.13	Zeeman-Struktur (berechnet)	138
7.14	Eichung des supraleitenden Magneten	139
7.15	Spektrum in gekreuzten Feldern	144
7.16	Spektrum in gekreuzten Feldern (Abschnitte)	145
7.17	Ericson-Fluktuationen (1)	147
7.18	Ericson-Fluktuationen (2)	150
7.19	Unterschiedlichen magnetischen Induktionsstärken	151

7.20 Autokorrelation bei 1 T 152
 7.21 Autokorrelation bei 1,5 T 153
 7.22 Autokorrelation bei 2 T 153
 7.23 Spektren bei niedriger Strahlleistung 156
 7.24 Autokorrelationen bei niedriger Strahlleistung 156
 7.25 Spektren bei höherer Strahlleistung 157
 7.26 Autokorrelationen bei höherer Strahlleistung 157
 7.27 Spektren bei unterschiedlichen Strahlleistungen 158
 7.28 Autokorrelationen bei unterschiedlicher Strahlleistung 158
 7.29 Verlauf der Autokorrelation niedriger Strahlleistung 159
 7.30 Verlauf der Autokorrelation bei höherer Strahlleistung 159

Tabellenverzeichnis

2.1	Elektrostatische cgs-Einheiten	21
3.1	Natürliche Einheiten des Wasserstoffatoms	29
3.2	Größenordnungen der Kopplungsamplituden	41
6.1	Spezifikationen des Helium-Neon-Lasers	84
6.2	Regelkreise zur Driftunterdrückung	91
7.1	Effektive Eichparameter	130
7.2	Fehler der Digitalmultimeter	133
B.1	Regelungstechnische Einordnung	166

Kapitel 1

Einleitung

Viele Vorgänge in der Natur und Technik werden durch die Erscheinung des deterministischen Chaos bestimmt. Sie sind nach ihrer mathematischen Beschreibung deterministisch, d. h. daß die exakte Kenntnis des Anfangszustandes die genaue Vorhersage der zukünftigen Entwicklung gestattet. Diese Entwicklung hängt allerdings so empfindlich vom Anfangszustand ab, daß schon der geringste Fehler bei dessen Messung eine langfristige Vorhersage unmöglich macht. Solche Vorgänge, die zwar deterministisch aber praktisch unvorhersagbar sind, werden als deterministisch chaotisch bezeichnet. Es handelt sich dabei keineswegs um exotische Einzelfälle. Deterministisches Chaos tritt in vielen nichtlinearen makroskopischen Systemen auf. Beispiele sind Wetter- und Strömungsvorgänge, die Bewegung von Himmelskörpern, der Ablauf chemischer Reaktionen, Schwingungen in elektrischen Schaltkreisen oder das Wachstum von Insektenpopulationen.

Auch mikroskopische Vorgänge können sehr komplex sein. Die Quantenmechanik, nach deren Gesetzen sie ablaufen, schließt allerdings chaotisches Verhalten im eben erläuterten Sinn strikt aus. Dies liegt daran, daß zum Beispiel zur zeitlichen Entwicklung quantenmechanischer Systeme wegen der Unschärfe stets viele benachbarte Anfangszustände beitragen. Bei der Betrachtung des unterschiedlichen Verhaltens von makroskopischer und mikroskopischer Welt stellt sich daher folgende Frage: Was entspricht dem deterministischen Chaos in der Quantenmechanik? Oder kurz: Was ist Quantenchaos? Die Antwort liefert die Untersuchung von quantenmechanischen Systemen, die nach den Regeln der makroskopischen Physik deterministisch chaotisch wären: Obwohl diese Systeme aus ganz unterschiedlichen Bereichen der Quantenphysik stammen, haben sie gemeinsame Eigenschaften, die als quantenmechanische Indikatoren von deterministisch chaotischem Verhalten oder kurz als Quantenchaos bezeichnet werden.

Makroskopische wie mikroskopische Systeme lassen sich in zwei Klassen einteilen: Wenn sich verschiedene Bestandteile des Systems im Laufe seiner zeitlichen Entwicklung beliebig weit voneinander entfernen, heißt das System offen, andernfalls heißt es gebunden. Quantenchaos in offenen Systemen unterscheidet sich von dem in gebundenen. Experimentelle Untersuchungen beschränkten sich bisher im wesentlichen auf gebundene Systeme.

Die vorliegende Arbeit beschreibt den ersten experimentellen Nachweis von Quantenchaos in einem dreidimensionalen offenen System. Dazu wird der Photoeffekt von einzelnen Rubidiumatomen unter dem zusätzlichen Einfluß star-

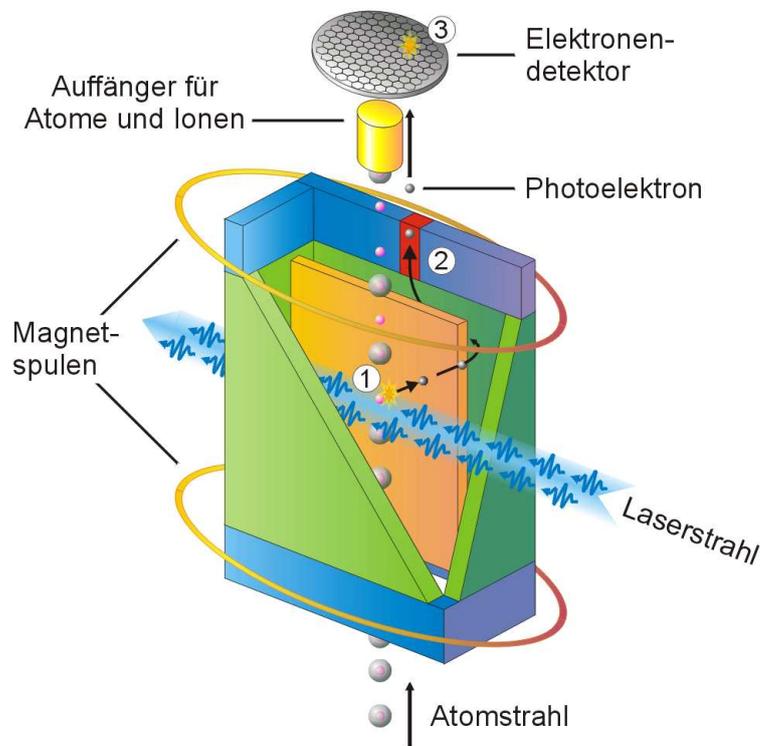


Abbildung 1.1: Aufschnittzeichnung der experimentellen Anordnung: Die einzelnen Atome aus dem Rubidium-Atomstrahl fliegen durch eine quaderförmige Anordnung, in deren Innern sie gleichzeitig dem Einfluß starker magnetischer und elektrischer Felder unterworfen sind: Das Magnetspulenpaar erzeugt ein in Richtung des Atomstrahls weisendes Magnetfeld, und zwischen der inneren Elektrode (orange) und der Mantelelektrode (grün) wird ein elektrisches Feld erzeugt. Das den Photoeffekt auslösende Licht wird von einem Laser geliefert und hat eine einstellbare Frequenz. Die Messung des Photoeffektes geschieht in drei Schritten: (1) Jedes durch den Laserstrahl fliegende Atom absorbiert mit einer von der Lichtfrequenz abhängigen Wahrscheinlichkeit ein Photon aus dem Laserstrahl und zerfällt dabei in ein Elektron (Photoelektron) und ein Rubidiumion. (2) Unter dem Einfluß des Magnetfeldes und des elektrischen Feldes bewegen sich die Photoelektronen um die innere Elektrode. Beim Anlegen geeigneter Potentiale an die rote und an die blauen Elektroden verlassen sie die quaderförmige Anordnung bei der roten Elektrode und werden so räumlich von den Rubidiumionen getrennt. (3) Während Rubidiumionen und nicht zerfallene Rubidiumatome von einem Metallzylinder aufgefangen werden, trifft der aus den Photoelektronen bestehende Photostrom auf einen Detektor und wird dort nachgewiesen.

ker elektrischer und magnetischer Felder untersucht. Als Photoeffekt bezeichnet man die Freisetzung von Elektronen bei der Bestrahlung von Metallen mit Licht. Bei dem historischen Versuch wird eine Spannung an einen Plattenkondensator angelegt, bei dem eine Platte mit einem Alkalimetall überzogen ist. Das Alkalimetall wird dann mit Licht einer festgelegten Frequenz bestrahlt. Die durch den Photoeffekt freigesetzten Elektronen können bei geeigneter Polung der Spannung als Strom durch den Kondensator nachgewiesen werden. Der Photoeffekt setzt allerdings erst ein, wenn die Frequenz einen für das Metall charakteristischen Wert übersteigt. Vor 100 Jahren erklärte Albert Einstein dieses Phänomen und lieferte damit einen entscheidenden Beitrag zur Entwicklung der Quantentheorie. Diese Leistung wurde 1921 mit dem Nobelpreis gewürdigt.

In dem hier durchgeführten Experiment wird das Alkalimetall Rubidium nicht auf eine der Platten aufgetragen, sondern fliegt in einem Strahl aus einzelnen Atomen durch den Plattenkondensator (siehe Abbildung 1.1). Die Atome sind dort einem elektrischen Feld ausgesetzt. Zusätzlich wird in Richtung des Atomstrahls ein starkes Magnetfeld erzeugt. Wie beim historischen Experiment werden die Atome nun mit Licht einer festgelegten Frequenz bestrahlt und der Strom der freigesetzten Elektronen in Abhängigkeit von der Lichtfrequenz gemessen. Unter den im Experiment verwirklichten Bedingungen ist das Rubidium-Atom ein Beispiel für ein offenes quantenmechanisches System, das nach den Regeln der makroskopischen Physik deterministisch chaotisch wäre. Nach theoretischen Vorhersagen äußert sich das Quantenchaos in solchen Systemen in einer ausgeprägten und besondere Eigenschaften aufweisenden Schwankung des Stromes der freigesetzten Teilchen (hier Elektronen) mit der Energie der die Freisetzung auslösenden Teilchen (hier Photonen). Diese Schwankung wird auch als Ericson-Fluktuation bezeichnet und konnte im Experiment nachgewiesen werden. Eine Besonderheit des Experiments besteht darin, daß über die Stärke der äußeren Felder eingestellt werden kann, wie chaotisch sich das System nach den Regeln der makroskopischen Physik verhält. Diese Möglichkeit wird ausgenutzt, um auf eindrucksvolle Weise den theoretisch vorhergesagten Zusammenhang zwischen deterministischem Chaos und den Fluktuationen des Photostromes nachzuweisen: Je chaotischer das System nach den Regeln der makroskopischen Physik war, umso stärker sind die gemessenen Fluktuationen.

Ericson-Fluktuationen wurden ursprünglich unabhängig von ihrer Beziehung zum Quantenchaos bei Anregungsfunktionen von Compound-Kern-Reaktionen vorhergesagt und gemessen. Ihre theoretische Beschreibung benötigt allerdings lediglich den Rahmen der quantenmechanischen Streutheorie und keine weiteren Annahmen, die das Auftreten von Ericson-Fluktuationen bei Streuvorgängen außerhalb der Kernphysik ausschließen würden. In diesem Sinne gelten Ericson-Fluktuationen als universelle quantenmechanische Erscheinung. Trotzdem wurden sie bisher nur in der Kernphysik beobachtet. Die hier vorgestellten Messungen liefern den ersten Nachweis von Ericson-Fluktuationen außerhalb der Kernphysik und damit den lange erwarteten Beweis für deren Universalität.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kapitel 2 wird der Begriff der Ericson-Fluktuation eingeführt und das Konzept des Experiments erläutert, in den Kapiteln 3 und 4 wird die Theorie zu der im Experiment durchgeführten Atomstrahlspektroskopie an Alkaliatomen entwickelt, die Kapitel 5 und 6 liefern eine detaillierte Beschreibung des experimentellen Aufbaus. In Kapitel 7 werden dann die Messungen ausführlich dargestellt und diskutiert. Mathematische Zusatzbetrachtungen sind in Form von Anhängen beigelegt.

Kapitel 2

Ericson-Fluktuationen

Zunächst wird der Begriff der „Ericson-Fluktuation“ auf Grundlage seiner kernphysikalischen Bedeutung kurz erläutert. Seine seit seiner Prägung weit über die Kernphysik hinausgewachsene Bedeutung reicht bis in die noch junge „Quantenchaos“-Forschung, die sich im wesentlichen der Suche nach Spuren von klassischem Chaos in der Quantenmechanik widmet. Eine kurze Darstellung der damit verbundenen Rolle der Ericson-Fluktuationen und der Wichtigkeit ihrer Messung eröffnet den unmittelbaren Zugang zum Kern der vorliegenden Arbeit: Aufbau und Ergebnisse eines Experimentes zur Messung von Ericson-Fluktuationen in einem atomphysikalischen System.

2.1 Geschichtlicher Hintergrund

Der Begriff der „Ericson-Fluktuation“ geht zurück auf zwei Veröffentlichungen von Torleif Ericson aus den Jahren 1960 [Eri60] und 1963 [Eri63]. Er gehört zum Erbe der die theoretische Kernphysik dieser Zeit prägenden Erforschung von Kernreaktionen, bei denen die Vielteilchennatur des Kernes von wesentlicher Bedeutung ist. Im Mittelpunkt stand dabei die Streuung von Neutronen oder leichten Kernen an schwereren Kernen für Einschußenergien im Bereich 100 keV . . . 10 MeV. Zahlreiche Experimente lieferten hierfür die sogenannten Anregungsfunktionen, d. h. die Wirkungsquerschnitte in Abhängigkeit von der Einschußenergie. Diese Anregungsfunktionen bestehen aus Lorentz-förmigen Spitzen. Während diese bei niedrigen Einschußenergien sehr schmal und gut auflösbar sind, nehmen mit steigender Einschußenergie Breite und Dichte zu, bis sie sich schließlich so stark durchdringen, daß sie ihre Auflösbarkeit verlieren. Die Breiten wachsen dabei von unter 1 eV bis zu einigen 10 keV. Wird aus den Breiten mit Hilfe der Energie-Zeit-Unschärfebeziehung auf eine Zeitskala τ für die ablaufenden Kernreaktionen geschlossen, so ergibt sich $\tau \sim \hbar/\Gamma \sim 10^{-14} \dots 10^{-19}$ s. Diese Werte liegen insbesondere bei niedrigen Einschußenergien um einige Größenordnungen über der Zeitspanne τ_0 , die das eingeschossene Teilchen im freien Raum benötigt, um eine Strecke von der Länge des Durchmessers des beschossenen Kernes zurückzulegen. Dies wurde so gedeutet, daß sich erst durch schnelle und vollständige Absorption des eingeschossenen Teilchens ein hoch angeregter zusammengesetzter Kern („compound-Kern“) bildet, bevor sich dessen Energie auf eine sehr verwickelte und daher langwierige Weise solan-

ge unter den Nukleonen umverteilt bis eines oder mehrere von diesen den Kernkräften entfliehen können. Diese Vorstellung trug den betrachteten Vorgängen die Bezeichnung „compound-Kern-Reaktionen“ ein. Die ihnen zugrunde liegende quantenmechanische Dynamik ist zu kompliziert, um eine vollständige, numerisch auswertbare Theorie der Anregungsfunktionen zuzulassen. Deswegen wurden Modelle entwickelt, in deren Rahmen Modellannahmen die streutheoretische Betrachtung soweit vereinfachen, daß zumindest die Beschreibung statistischer Eigenschaften der Anregungsfunktionen möglich wird. Solche Annahmen bilden auch die Grundlage für die Erklärung des Begriffes der „Ericson-Fluktuation“.

2.2 Begriffliche Klärung

Ericson beschränkt sich auf durch Neutronenbeschuß ausgelöste Reaktionen, in deren Verlauf der Compound-Kern unter Emission eines Neutrons zerfällt. In diesem Fall liefert eine quantenmechanische Ausarbeitung der Compound-Kern-Vorstellung für die partiellen (d. h. kanalbezogenen) Anregungsfunktionen im Schwerpunktsystem Ausdrücke der folgenden Form:

$$\sigma(E) \propto \frac{1}{E} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_{\alpha} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{\alpha,k}}{E - E_{\alpha,k} + i \frac{\Gamma_{\alpha,k}}{2}} \right|^2 \quad (2.1)$$

Dabei werden die Größen $\{(a_{\alpha,k}, E_{\alpha,k}, \Gamma_{\alpha,k})\}_{(\alpha,k) \in \mathcal{A} \times \mathbb{Z}}$ lediglich durch eine Existenzaussage geliefert, d. h. es handelt sich um sogenannte freie Parameter der Theorie. Der Hintergrund dieser Formel soll im folgenden kurz beleuchtet werden.

Für Streuungen der Art $a + A \rightarrow B + b$, bei denen alle Teilchen eigendrehimpulslos sind und in Eingangs- und Ausgangskanal jeweils mindestens ein Teilchen neutral ist, kann aufgrund der Energieerhaltung eine allgemeine Darstellung der Wirkungsquerschnitte durch die sog. T -Matrix angegeben werden. Sie lautet im Schwerpunktsystem:

$$\sigma(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2mE} \sum_{l_{Bb}, m_{Bb}, l_{Aa}} (2l_{Aa} + 1) |T_{(l_{Bb}, m_{Bb}) \leftarrow l_{Aa}}(E)|^2 \quad (2.2)$$

Dabei ist E die Gesamtenergie, m die reduzierte Masse und l_{aA} , l_{bB} , m_{bB} Bahndrehimpulsquantenzahlen der Relativbewegung im Eingangs- bzw. Ausgangskanal.¹ Die T -Matrix unterscheidet sich von der S -Matrix nur bei elastischer Streuung $a + A \rightarrow A + a$, und es gilt:

$$|T_{(l_{Bb}, m_{Bb}) \leftarrow l_{Aa}}(E)|^2 = |S_{(l_{Bb}, m_{Bb}) \leftarrow l_{Aa}}(E) - \delta_{Bb, Aa} \delta_{l_{Bb}; l_{Aa}} \delta_{m_{Bb}; 0}|^2 \quad (2.3)$$

Dabei ist $\delta_{Bb, Aa}$ bei elastischer Streuung Eins und sonst Null. Falls die Elemente der T -Matrix eine Darstellung durch einfache in der unteren Halbebene gelegene Pole besitzen, ist (2.2) von der Form (2.1). Nichtverschwindende Eigendrehimpulse stellen keine grundsätzliche Schwierigkeit dar. Dazu werden die Eigendrehimpulse im Eingangs- und Ausgangskanal zu den entsprechenden Kanaleigendrehimpulsen gekoppelt. Bei festgelegten Quantenzahlen für die Eigendrehimpulse

¹Diese Formel wird in [KK68] im Rahmen der sog. Kapur-Peierls-Theorie abgeleitet. Sie kann aber auch allgemein über eine Rechnung in „Impulsdarstellung“ erreicht werden.

in Eingangs- und Ausgangskanal bleibt (2.2) gültig. Es müssen lediglich neue Indizes hinzugefügt werden. Um die Gesamtdrehimpulserhaltung ausnutzen zu können, müssen dann in Eingangs- und Ausgangskanal drei Drehimpulse gekoppelt werden („Bahndrehimpuls+Kanaleigendrehimpuls“). Der Gesamtdrehimpuls kann mit dem Drehimpuls des Compound-Kernes identifiziert werden. Die Koppelung und Entkoppelung der Drehimpulse kann in einer recht umfangreichen Rechnung [KK68] durchgeführt werden und bestätigt die Gültigkeit der Darstellung (2.1).

Auch ohne Rechnung läßt sich leicht erkennen, daß die Darstellung (2.1) mit den experimentell beobachteten qualitativen Eigenschaften von Compound-Kern-Anregungsfunktionen im Einklang steht: Für jedes Paar $(\alpha, k) \in \mathcal{A} \times \mathbb{Z}$ ist das Betragsquadrat des zugehörigen Summanden der inneren Summe ein Lorentz-Term (auch „Breit-Wigner-Resonanzterm“) mit Energieschwerpunkt $E_{\alpha,k}$, Breite $\Gamma_{\alpha,k}$ und (i. allg. komplexwertiger) Amplitude $a_{\alpha,k}$, d. h. sein Betragsquadrat liefert eine Lorentz-Kurve mit diesen Eigenschaften und der Höhe $|a_{\alpha,k}|^2$. Daher ist die Anregungsfunktion (bis auf einen zu $1/E$ proportionalen Vorfaktor) als Betragsquadrat einer kohärenten Überlagerung von Lorentz-Termen eine Interferenzerscheinung. Wie prägend diese Interferenz in einem gegebenen Energiebereich für die Gestalt der Anregungsfunktion ist, hängt davon ab wie nah die Energieschwerpunkte der für diesen Bereich wesentlichen Lorentz-Terme auf der Skala ihrer Breiten beieinanderliegen. Als Maß dafür gilt das für diese Lorentz-Terme bestimmte Verhältnis zwischen ihrem mittleren Abstand Δ und ihrer mittleren Breite Γ . Für $\Delta \gg \Gamma$ sind Interferenzerscheinungen vernachlässigbar, und die Anregungsfunktion wird durch klar aufgelöste Lorentzspitzen bestimmt. Die mit der Einschußenergie zunehmende Durchdringung dieser Lorentzspitzen kennzeichnet den Übergang in den Bereich mit $\Delta \ll \Gamma$, in dem Interferenzerscheinungen die bestimmende Rolle spielen. Die damals verbreitete Meinung war, daß die Interferenz einer großen Zahl von Lorentz-Termen zu einem „glatten“ Verlauf der Anregungsfunktion führen sollte. Es blieb Ericson vorbehalten, dies zu widerlegen. Dabei setzt er für die unbekanntenen freien Parameter in (2.1) Zufallswerte an und macht folgende Annahmen:

1. Amplituden, Energieschwerpunkten und Breiten haben statistisch unabhängige Verteilungen.
2. Die Verteilung der Breiten ist so schmal, daß die Zufallsbreiten durch eine Konstante Γ ersetzt werden können.²
3. Die einzelnen Lorentz-Terme durchdringen sich stark, d. h. $\Delta \ll \Gamma$.

Ein Maß für die statistische Verteilung der Schwankungen der Anregungsfunktion um ihren Mittelwert ist die Autokorrelation \mathcal{C} der Fluktuation $\sigma - \langle \sigma \rangle$:

$$\mathcal{C}(\varepsilon) = \langle (\sigma(\cdot + \varepsilon) - \langle \sigma \rangle) \cdot (\sigma - \langle \sigma \rangle) \rangle \quad (2.4)$$

Dabei bezeichnet $\langle \cdot \rangle$ das über den untersuchten Energiebereich erstreckte Integralmittel. Nach einer recht aufwendigen Rechnung ergibt sich dann für $\Delta \ll \Gamma$ in guter Näherung:

$$\mathcal{C}(\varepsilon) \propto \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2} \quad (2.5)$$

² Γ kann als mittlere Zerfallsbreite des compound-Kernes aufgefaßt werden.

also eine Fluktuation auf der Skala der Zerfallsbreite des compound-Kernes und daher i. allg. kein „glatter“ Verlauf der Anregungsfunktion. Wichtig ist, daß die Bedeutung dieses Ergebnisses nicht darin besteht, daß es überhaupt Einschubenergiebereiche gibt, in denen die Autokorrelation der Schwankung Lorentz-förmig ist, sondern daß dies insbesondere dort der Fall ist, wo die Annahmen (1) bis (3) statthaft sind.

Ein experimenteller Nachweis, der diesem Umstand Rechnung trägt, ist schwierig, da die Annahmen (1) bis (3) ihre Bestätigung im Rahmen von Messungen in Form der Annahme (3) ausschließen. Daher kann für eine gemessene Anregungsfunktion nur festgestellt werden, ob sie mit Ericsons Beschreibung insofern verträglich ist, als ihr die Eigenschaft (2.5) zukommt und ihre Gestalt nicht im Widerspruch zu (3) steht. Infolgedessen hat sich ein uneinheitlicher Gebrauch des Begriffs des „Ericson-Fluktuation“ eingebürgert. Während er in theoretischen Überlegungen meist dann Anwendung findet, wenn die Statthaftigkeit einer Darstellung der Form (2.1) sowie der Annahmen (1) bis (3) hinreichend erhärtet worden ist, bezieht er sich in experimentellen Untersuchungen stets auf den Nachweis, daß einer gemessenen Anregungsfunktion die Eigenschaft (2.5) zukommt, und ihre Gestalt nicht im Widerspruch zu (3) steht. In diesem Sinne wurden Ericson-Fluktuationen 1964 gemessen [vBEH⁺64]³.

2.3 Universalität

Ericsons Arbeiten sind insofern von universeller Bedeutung, als das Ergebnis (2.5) lediglich eine Darstellung der Form (2.1) für die Anregungsfunktion und die Gültigkeit der Annahmen (1) bis (3) erfordert. Diese Voraussetzungen bestehen in guter Näherung auch bei gewissen Streuvorgängen außerhalb der Kernphysik. Auf diese Weise fand der Begriff der „Ericson-Fluktuation“ Eingang in die Festkörper- und Teilchenphysik.

In der jüngeren Vergangenheit wurden von Blümel und Smilansky Ericson-Fluktuationen auch für solche quantenmechanischen Streuvorgänge vorhergesagt, für die es ein klassisches Modell gibt, das chaotisches Verhalten aufweist [BS88]. Damit rücken die Ericson-Fluktuationen in den Brennpunkt der gegenwärtigen Suche nach quantenmechanischen Entsprechungen von „klassisch chaotischer Streuung“.

2.4 Klassisch chaotische Streuung

Stabilität und Chaos gehören zu den bis heute fruchtbarsten Begriffsbildungen der klassischen Mechanik. Sie gingen aus der Untersuchung langfristiger Auswirkungen geringfügiger Störungen hervor. Solche Überlegungen sind von grundsätzlicher Bedeutung bei der Einschätzung der Vorhersagekraft physikalischer Modelle. Geschichtlich spielten sie seit den Anfängen der klassischen Mechanik eine wichtige Rolle bei der philosophisch und religiös bedeutsamen Frage nach der Stabilität des Sonnensystems [AM67].

Es gibt unterschiedliche Stabilitätsbegriffe. Oft folgt die Einführung dem folgenden Weg: Der Zustand eines Systems wird durch einen Punkt eines ge-

³Streng genommen erfüllen diese Versuche Ericsons Voraussetzungen nicht, da keine neutralen Geschosse sondern Protonen verwandt wurden.

eignet gewählten Phasenraumes \mathcal{X} beschrieben. Die Bewegung des Systems ist dann ein durch die Zeit parametrisierter Weg im Phasenraum. Befindet sich das System zum Zeitpunkt t_0 im Zustand ξ (Anfangszustand), so kann für einen Zeitpunkt $t > t_0$ die Antwort auf Störungen des Anfangszustandes untersucht werden. Beim Übergang zu infinitesimalen Störungen wird diese Störungsantwort zu einer Eigenschaft des Punktes ξ . Um die langfristigen Auswirkungen von Störungen zu klassifizieren, wird die zeitliche Asymptotik ($t \rightarrow \infty$) der Störungsantwort betrachtet. Dabei gilt ein Punkt des Phasenraumes als instabil, wenn seine Störungsantwort asymptotisch sehr empfindlich ist, andernfalls wird er als stabil bezeichnet. Obwohl verschiedene Stabilitätsbegriffe benutzt werden [AM67], vermitteln sie i. allg. für jeden Punkt des Phasenraumes eine Einordnung in instabil oder stabil. Als chaotisch gelten dann Systeme, deren Phasenraum vollständig oder überwiegend aus instabilen Punkten besteht.

Viele klassische Streuvorgängen können durch die klassische \mathcal{S} -Abbildung vollständig beschrieben werden. In diesem Fall ordnet die \mathcal{S} -Abbildung jedem einlaufenden Zustand ξ_- denjenigen auslaufenden Zustand ξ_+ zu, in den der Streuvorgang ξ_- überführt. Werden einlaufende und auslaufende Zustände zu Teilmengen \mathcal{X}_- bzw. \mathcal{X}_+ des Phasenraumes zusammengefaßt, so ist die \mathcal{S} -Abbildung eine Funktion $\mathcal{S}: \mathcal{X}_- \rightarrow \mathcal{X}_+$. Für Streuvorgänge, die auf diese Weise durch klassische \mathcal{S} -Abbildungen beschrieben werden, läßt sich ein Stabilitätsbegriff auf folgende Weise einführen: Die zeitlich asymptotische Antwort des Streuvorgangs auf eine Störung eines einlaufenden Zustandes ξ_- besteht in der Änderung des Funktionswertes $\mathcal{S}(\xi_-)$. Entsprechend gilt ein einlaufender Zustand als instabil, wenn \mathcal{S} bei ξ_- sehr starken Schwankungen unterworfen ist. Damit ist die Einführung eines Instabilitätsbegriffs auf die Klassifizierung des lokalen Schwankungsverhaltens einer Funktion zurückgeführt.

Ein Beispiel für ein bis zum Äußersten ausgebildetes Schwankungsverhalten liefern Funktionen, deren Graphen⁴ Fraktale sind. Ein Fraktal ist - grob gesprochen - dadurch gekennzeichnet, daß es Punkte besitzt, in deren Nähe seine Struktur nicht aufgelöst werden kann: Ganz gleich wie klein die Umgebung eines solchen Punktes auch gewählt und wie stark sie vergrößert wird, es ergibt sich nie eine glatte „strukturarme“ Gestalt. Ist die Funktion die \mathcal{S} -Abbildung eines Streuvorgangs und $(\xi_-, \mathcal{S}(\xi_-)) \in \text{graph}(\mathcal{S})$ ein Punkt mit dieser Eigenschaft, dann wird ξ_- als instabil bezeichnet, andernfalls ist ξ_- stabil. Falls es instabile Punkte gibt, wird der Streuvorgang als chaotisch bezeichnet. Für diese Arbeit ist eine genauere Erklärung des Begriffs des Fraktals nicht notwendig. Eine anschauliche Vorstellung von der Gestalt fraktaler Mengen liefern geometrische Iterationsverfahren, die sicherstellen, daß es beliebig kleine Teile der erzeugten Mengen gibt, die bei Vergrößerung der Menge selbst ähnlich sind („Selbstähnlichkeit“). Die damit verbundene „erfaßbare Unendlichkeit“ verleiht diesen Fraktalen eine merkwürdige Schönheit. Abbildung 2.1 zeigt ein Beispiel für ein solches Fraktal. Weitere Abbildungen finden sich z. B. in [Man87].

Trotz der großen Bedeutung von Stabilität und Chaos in der klassischen Mechanik, gibt es bisher keine allgemein anerkannte quantenmechanische Deutung dieser Begriffe. Im Mittelpunkt der Forschung in Theorie und Experiment steht daher die Suche nach quantenmechanischen Spuren klassisch chaotischen Verhaltens. Eine Schlüsselrolle kommt dabei der Untersuchung von Alkali-Atomen

⁴Für eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist der Graph von f die Menge $\text{graph}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)); x \in X\}$.

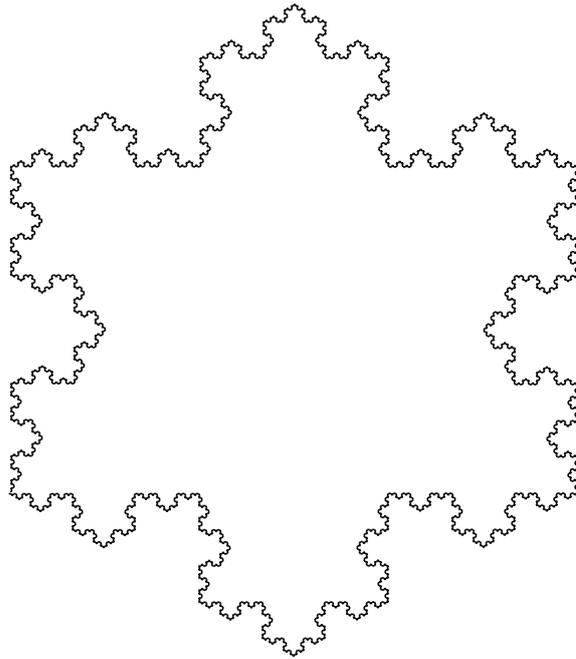


Abbildung 2.1: Beispiel für eine fraktale Menge: Die „Koch-Schneeflocke“ entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck durch folgendes Iterationsverfahren: Einer der drei Eckpunkte wird als Ausgangspunkt ausgezeichnet und ein Umlaufsinn festgelegt. Dann werden im Umlaufsinn die Strecken durchlaufen. Dabei wird bei jeder Strecke folgende Änderung vorgenommen: Zuerst wird die Strecke in drei gleich lange Teilstrecken aufgeteilt. Dann wird auf die mittlere Teilstrecke ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt, dessen Spitze nach außen weist und dessen Seitenlängen gleich der Länge der Teilstrecke ist. Schließlich werden diejenigen Bestandteile von Strecke und Dreieck, die sich überlappen, mit Ausnahme der Randpunkte der Teilstrecke entfernt. Die Ankunft beim Ausgangspunkt bildet das Ende eines Iterationsschrittes und liefert einen geschlossenen Streckenzug. Dieser wird dann vom nächsten Iterationsschritt auf die eben beschriebene Weise durchlaufen. Die unendliche Fortführung dieses Iterationsverfahrens liefert die „Koch-Schneeflocke“.

unter dem Einfluß gekreuzter statischer elektrischer und magnetischer Felder zu. Werden diese im Rahmen einer quantenmechanischen Einteilchentheorie für das Valenzelektron beschrieben, so läßt sich in dem entsprechenden klassischen Modell in Abhängigkeit dreier Größen, nämlich der Energie des Elektrons und der beiden Feldstärken, jedes gewünschte Stabilitätsverhalten zwischen fast regulär und vollkommen chaotisch verwirklichen, und dies gilt sowohl für den Energiebereich, in denen quantenmechanisch (quasi-)stationäre Zustände vorherrschen, als auch jenseits der quantenmechanischen Ionisationsschwelle.

2.5 Das Experiment

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind Aufbau und Ergebnisse eines Experimentes, mit dem das Alkali-Atom Rubidium (Rb) für einen Wertebereich der drei Bestimmungsgrößen untersucht werden kann, der die vielfältigen Stabilitätseigenschaften unter- und oberhalb der Ionisationsschwelle zugänglich macht. Es liefert Abschnitte der Anregungsfunktion für die Photoabsorption („Photoabsorptionsquerschnittsspektren“) von Rubidium in gekreuzten Feldern. Dazu wird in einer Hochvakuumapparatur mit Hilfe eines mit Rb im natürlichen Isotopengemisch befüllten Atomofens und Blenden ein gut kollimierter Rb-Atomstrahl erzeugt. Ein darin enthaltenes Rb-Atom fliegt durch einen Bereich, in dem eine supraleitende Spulen in Helmholtz-Anordnung eine magnetische Induktion parallel zur Flugrichtung und ein Plattenkondensator ein elektrisches Feld senkrecht dazu erzeugt. Als Photonenquelle dient linear polarisiertes Licht eines kontinuierlich betriebenen schmalbandigen Farbstoff-Lasers. Dessen Strahl durchquert das Atom in einem Bereich, in dem die äußeren Felder ihre größte Homogenität aufweisen. Dabei bilden die Richtungen dieser Felder und die Strahlachse des Lasers ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Anschließend wird gemessen, ob das Leuchtelektron des Atoms angeregt wurde. Zur Aufzeichnung wird der Farbstoff-Laser mit Hilfe eines Fabry-Perot-Interferometers frequenzstabilisiert. Dafür wird die Leistung des Lasers vor („Ausgangsleistung“, P_a) und hinter dem Fabry-Perot-Interferometer („Transmissionsleistung“, P_t) gemessen. Der Quotient $Q = P_t/P_a$ ist die von der Frequenz abhängige Transmissionsfunktion des Fabry-Perot-Interferometers. Ein elektronischer Regelkreis vergleicht Q mit einem Sollwert Q_0 und steuert mit einer zum Fehler $Q - Q_0$ proportionalen Spannung optische Elemente im Laser-Resonator nach, die dessen optische Weglänge so ändern, daß $Q - Q_0$ minimiert wird. Um die Laser-Frequenz bei geschlossenem Regelkreis ändern zu können, kann die optische Weglänge des Fabry-Perot-Interferometers mit Hilfe einer zwischen den Spiegeln des Interferometers befindlichen galvanometrisch drehbaren Glasplatte geändert werden. Das Spektrum wird nun wie folgt aufgezeichnet: Zunächst wird die absolute Wellenlänge des stabilisierten Farbstoff-Lasers gemessen. Dann werden während einer festen Zeitspanne τ_D die detektierten angeregten Atome gezählt. Danach wiederholt sich folgender Schritt: Erhöhung der Laser-Frequenz um ungefähr 10 MHz durch Änderung der optischen Weglänge des Fabry-Perot-Interferometers bei geschlossenem Regelkreis und anschließende Zählung der detektierten angeregten Atome während der Zeitspanne τ_D . Insgesamt wird dieser Schritt einige tausend Mal durchgeführt. Für jede Laser-Frequenz wird das Transmissionssignal eines weiteren Fabry-Perot-Interferometers ausgewertet. Da dieses längenstabilisiert wird, ergibt sich ein Histogramm, das wohlbekannten Laser-Frequenzen die für

sie während einer Zeitspanne τ_D ermittelte Zahl von Anregungsereignissen zuordnet. Dieses Histogramm liefert bis auf eine Proportionalitätskonstante die Anregungsfunktion an den abgeschrittenen Frequenzwerten.

Eine so ermittelte Anregungsfunktion hängt von den statistischen Eigenschaften des Atomstrahls ab. Der Zustand eines einzelnen Atoms ist durch die folgenden drei Daten gegeben: Isotopennummer, Schwerpunktschwindigkeit und Wellenfunktion der Relativbewegung vom Valenzelektron zum Kern. Der Atomstrahl ist dann als statistische Mischung der so zusammengesetzten Zustände aufzufassen. Das beschriebene Experiment nutzt den Atomstrahl allerdings in einer Weise, die in sehr guter Näherung die Anregungsfunktion eines reinen Zustandes liefert. Wie dies gelingt und welche unerwünschten Folgen damit vermieden werden, wird ausführlich in Kapitel 3 beschrieben. Hier sollen nur die wichtigsten Punkte genannt werden.

Bei der Beschreibung der hier wesentlichen Atom-Feld-Wechselwirkungen lassen sich Schwerpunktsbewegung und Relativbewegung entkoppeln. Allerdings sind dann für jedes einzelne Atom die Werte von statischen und veränderlichen Feldern maßgeblich, die im Schwerpunktsbezugssystem herrschen. Nach der speziellen Relativitätstheorie weichen diese von denen im Laborsystem ab („Doppler-Effekt“, „bewegungsvermittelter Stark-Effekt“ usw.) und die Abweichungen können in Form von Potenzreihen nach dem Verhältnis \mathbf{V}/c zwischen der Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme und der Lichtgeschwindigkeit entwickelt werden. Die Größenordnung für v ist hier $10^2 \dots 10^3$ m/s. Die oben beschriebene Anordnung gewährleistet bei sehr guter Kollimation des Atomstrahls, daß die Abweichungen trotz der breiten Geschwindigkeitsverteilung der Atome im thermisch erzeugten Atomstrahl sehr gering sind. Die fundamentalen Eigenschaften der Atom-Feld-Wechselwirkungen im Schwerpunktsystem mit festgelegten äußeren Feldern werden so in den Messungen bestmöglich aufgelöst.

Die geringe Energieaufspaltung der Hyperfeinstrukturzustände des Grundzustandes (hier $5s$) führt zu einer statistischen Mischung dieser atomaren Zustände. Während für die im Experiment verwandten Feldstärken der Stark-Effekt der Hyperfeinstrukturzustände mit der Hauptquantenzahl 5 vernachlässigt werden kann, spielt der Zeeman-Effekt dieser Zustände eine wichtige Rolle. Er hebt ihre Drehimpulsentartung auf und koppelt jeweils nur Zustände mit denselben Haupt- und Bahndrehimpulsquantenzahlen (n, l) . Durch optisches Pumpen mit einer Frequenz, die auf den Übergang zwischen genau einem der statistisch besetzten Hyperfeinstrukturzustände mit $n = 5, l = 0$ des Rubidiumisotops ^{85}Rb und einem Hyperfeinstrukturzustand mit $n = 5, l = 1$ abgestimmt ist, läßt sich ein nichtentarteter Zustand bevölkern, dessen Besetzung ohne optisches Pumpen vernachlässigbar ist. Dazu wird ein Dioden-Laser mit einer Wellenlänge um 780 nm benutzt. Von dem so erreichten Zustand wird dann die eigentliche Anregung vorgenommen. Dazu wird der Farbstoff-Laser mit dem Farbstoff Coumarin 102 betrieben, so daß ein Durchstimmbarkeitsbereich von 467 bis 515 nm zur Verfügung steht. Während Licht dieser Wellenlängen keine Elektronenzustände mit $n = 5, l = 0$ anregt, haben bei einer Wellenlänge von 479 nm die Photonen die Energie, die notwendig ist, um bei Abwesenheit externer Felder von dem durch optisches Pumpen bevölkerten Zustand die Ionisationsschwelle zu erreichen. Damit kann ein großen Bereich unter- und oberhalb der feldfreien Ionisationsschwelle spektroskopisch untersucht werden, und die gemessene Anregungsfunktion ist in sehr guter Näherung die für die Photoabsorption eines

reinen Zustandes der Relativbewegung von Leuchtelektron und Kern.

Knapp unterhalb der feldfreien Ionisationsschwelle kann beim Anlegen gekreuzter Felder mit geeigneten Werten für die elektrische Feldstärke und die magnetische Induktionsstärke im klassischen Modell mit chaotischer Streuung gerechnet werden. Hier sollte das Photoabsorptionsquerschnittsspektrum daher Ericson-Fluktuationen aufweisen. Dies konnte mit den durchgeführten Messungen bestätigt werden. Die vorliegende Arbeit liefert damit nach Kenntnis des Autors nicht nur die erste experimentelle Bestätigung der Vorhersage von Blümel und Smilansky, sondern auch die erste Beobachtung von Ericson-Fluktuationen für ein atomphysikalisches System überhaupt.

Hervorzuheben ist neben den soeben beschriebenen Besonderheiten die im Rahmen dieser Arbeit erreichte hohe Stabilität der drei Bestimmungsgrößen. Dazu mußten konstante und veränderliche elektrische und magnetische Streufelder in der Felderzeugungszone deutlich vermindert werden. Bei den optischen Bestandteilen wurde ein höchstmögliche passive Stabilität gewährleistender Aufbau verwirklicht. Auf dieser Grundlage kam ein eigens entwickeltes neuartiges aktives Stabilisationsverfahren zur Anwendung. Dieses bewirkt bei Regelkreisen, deren Fehlersignal durch synchrone Demodulation („Lock-In-Technologie“) erzeugt wird, eine Verminderung des Rauschens und eine Verbesserung der Regelungsdynamik. Der stabile optische Aufbau bildet auch die Grundlage für die genaue Bestimmung der tatsächlichen Werte der Bestimmungsgrößen Photonenenergie, elektrische Feldstärke und magnetische Induktion. Dies gelingt durch die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwirklichte Vereinigung von hochauflösenden spektroskopischen Messungen, höchstauflösenden interferometrischen Verfahren zur absoluten und relativen Wellenlängenmessung und der numerischen Berechnung von Stark- und Zeeman-Effekt. Bei den Messungen in gekreuzten Feldern betragen die Stärken der statischen Felder etwa 22 kV/m und 1...2 T. Ihr tatsächlicher Wert wird mit hoher Genauigkeit bestimmt. Die relativen Fehler betragen etwa $2,5 \cdot 10^{-3}$ für die elektrische Feldstärke und $5 \cdot 10^{-4}$ für die magnetische Induktionsstärke.

2.6 Einheitensysteme und Konstanten

Es werden drei Einheitensysteme verwandt:

1. SI
2. Elektrostatisches cgs-System: Die in dieser Arbeit benötigten Einheiten dieses Systems sind gemäß Tabelle 2.1 festgelegt. Die Feinstrukturkonstante α ist dann $\alpha = e^2/\hbar c$.
3. „Natürliches“ Einheitensystem des Wasserstoffatoms: Dieses Einheitensystem wird in 3.1.5 eingeführt und entspricht im wesentlichen dem atomaren Einheitensystem.

Die theoretischen Überlegungen werden i. allg. in cgs-Einheiten durchgeführt. Die „natürlichen“ Einheiten werden lediglich als Bindeglied bei der Umrechnung von cgs- in SI-Einheiten benutzt. Dies erweist sich bei der Abschätzung atomphysikalischer Effekte (besonders Kapitel 3) als sehr hilfreich. Schließlich ein wichtiger Hinweis zur Vorzeichenkonvention der Elementarladung: In dieser

Einheit	festgelegt durch
Grundeinheiten	cm, g, s
Kraft	Newton-Gesetz $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$
Ladung	Coulomb-Gesetz $\mathbf{F}_2 = q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 ^3}$ (im Vakuum)
Elektrische Feldstärke, Magnetische Induktionsstärke	Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$ (im Vakuum)

Tabelle 2.1: Einführung der elektrostatischen cgs-Einheiten

Arbeit ist die Elementarladung e in allen Einheitensystemen dem Wert nach *positiv*. Die Ladung des Elektrons ist also

$$q_{\text{Elektron}} = -e \quad (2.6)$$

Bei sämtlichen experimentellen Auswertungen und numerischen Berechnungen wurden als Werte der Naturkonstanten die „CODATA 2002“-Empfehlungen⁵ zugrunde gelegt.

⁵Die volle Bezeichnung lautet „The CODATA recommended values of the fundamental constants of physics and chemistry based on the 2002 adjustment“. Die Werte finden sich z. B. in[Lid04].

Kapitel 3

Alkaliatome in äußeren Feldern

Dieses Kapitel liefert die Grundlage für die theoretische Beschreibung des Experimentes. Es wird ein effektives Ein-Teilchen-Modell für das Valenzelektron des Alkaliatoms entwickelt, das die Schwerpunktsbewegung des Atoms nur noch in Form von Parametern enthält. Aufbauend darauf wird die Geometrie des Experimentes erklärt und die Wahl der experimentellen Parameter begründet. In diesem Zusammenhang werden die Größenordnungen der unterschiedlichen Wechselwirkungen angegeben, denen das Valenzelektron ausgesetzt ist.

Da im Experiment die Atome in Form eines thermisch erzeugten Atomstrahls bereitgestellt werden, wird die Frage untersucht, inwiefern quantenmechanische Messungen durch die statistische Verteilung der Parameter der Schwerpunktsbewegung beeinflusst werden. Es wird gezeigt, wie dieser Einfluß durch eine geschickte Wahl der Geometrie des Experimentes soweit unterdrückt werden kann, daß er vernachlässigbar wird. Auf diese Weise können die fundamentalen Eigenschaften der Wechselwirkung eines ruhenden Atoms mit äußeren Feldern im Experiment aufgelöst werden.

In diesem Kapitel werden - soweit nichts Gegenteiliges gesagt wird - cgs-Einheiten benutzt (siehe Tabelle 2.1).

3.1 Klassische Beschreibung

Die klassische Beschreibung wird zunächst in Lagrange-Darstellung entwickelt. Dieser Rahmen eignet sich besonders für relativistische Betrachtungen, die im Zusammenhang mit den äußeren Feldern notwendig werden. Anschließend wird zur Hamilton-Darstellung übergegangen, deren kanonische Quantisierung das quantenmechanische Modell liefert.

3.1.1 Lagrange-Funktion

In der klassischen Theorie eines Atoms werden Kern und Hüllenelektronen als elektrisch geladene Punktmassen angenommen, die sich nur auf elektromagnetischem Wege beeinflussen. In nichtrelativistischer Näherung wird diese Wechselwirkung elektrostatisch. Jede Punktmasse erfährt dann zu jedem Zeitpunkt

lediglich die elektrostatische Kraft, die durch das Feld der übrigen Ladungen vermittelt wird. Werden zusätzliche äußere elektromagnetische Felder im Laborsystem durch ein zweimal stetig differenzierbares Viererpotential (ϕ, \mathbf{A}) gemäß

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.2)$$

erzeugt, ergibt sich für die nichtrelativistische Lagrange-Funktion \mathcal{L} des Wasserstoffatoms im Laborsystem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{r}_K, \mathbf{r}_e; \mathbf{v}_K, \mathbf{v}_e; t) &= \frac{1}{2} m_K \mathbf{v}_K^2 + \frac{1}{2} m_e \mathbf{v}_e^2 + e\phi_K(|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_K|) \\ &\quad - q_K \phi(t, \mathbf{r}_K) + e\phi(t, \mathbf{r}_e) \\ &\quad + q_K \mathbf{A}(t, \mathbf{r}_K) \cdot \frac{\mathbf{v}_K}{c} - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}_e) \cdot \frac{\mathbf{v}_e}{c} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Der Index „e“ bzw. „K“ kennzeichnet die Zugehörigkeit einer Größe zum Elektron bzw. zum Kern. Also $m_K = m_p$, $q_K = +e$ und ϕ_K ist das vom Kern erzeugte Coulomb-Feld:

$$\phi_K(|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_K|) = \frac{e}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_K|} \quad (3.4)$$

Die erste Zeile von (3.3) beschreibt das Wasserstoffatom ohne äußere Felder. Die übrigen Zeilen enthalten den Einfluß der äußeren Felder. Sie stammen aus der relativistischen Theorie und erfahren bei der nichtrelativistischen Näherung keinerlei Änderung [LL77]. Dieser Umstand wird später eine wichtige Rolle spielen. Es wird sich nämlich als zweckmäßig erweisen, die Betrachtungen in einem Bezugssystem durchzuführen, das sich gegenüber dem Laborsystem gradlinig und gleichförmig bewegt. Bei der Beschreibung von Wechselwirkungen des Atoms mit Laser-Licht enthalten die äußeren Felder elektromagnetische Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Dies führt zu Schwierigkeiten, wenn der Übergang in das andere Bezugssystem auch für diese Felder durch eine Galilei-Transformation beschrieben wird. Der Ausweg besteht darin, den Einfluß der äußeren Felder (Zeilen zwei und drei von (3.3)) mit Hilfe von Poincaré-Transformationen zu behandeln, während Zeile eins von (3.3) den entsprechenden Galilei-Transformationen unterworfen wird.

Die Lagrange-Funktion kann auch für Atome mit höherer Ordnungszahl Z aufgestellt werden. Dazu müssen lediglich alle Terme, die m_e oder q_e enthalten, durch Summen mit Z Summanden ersetzt werden, von denen sich jeder auf eines der Z Elektronen bezieht. Zusätzlich wird ein Term benötigt, der die elektrostatische Abstoßung der Elektronen untereinander beschreibt. Dieses $(Z + 1)$ -Teilchen-System gestattet allerdings keine weitreichende analytische oder numerische Untersuchung.

Bei Alkaliatomen besteht die Elektronenhülle aus einer stabilen Edelgaskonfiguration und einem verhältnismäßig schwach gebundenen Valenzelektron. Die erfolgreichste Beschreibung solcher Elektronenkonfigurationen besteht in einer Ein-Elektronen-Theorie für das Valenzelektron, bei der der Einfluß der Elektronen der Edelgaskonfiguration lediglich in einer Abschirmung der Kernladung besteht. Dazu wird die Edelgaskonfiguration durch eine zeitlich unveränderliche kugelsymmetrische Ladungsdichte ρ um den Kern beschrieben, deren Gesamtladung natürlich $\int \rho = -(Z - 1)e$ sein muß. Entsprechend wird die klassische

Bewegung des Valenzelektrons durch die Lagrange-Funktion (3.3) beschrieben, wobei nun ϕ_K durch

$$\phi_K(|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_K|) = \frac{Ze}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_K|} + \int \frac{\rho(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_K)}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (3.5)$$

gegeben ist.¹ Für einen Kern mit A Nukleonen ist $m_K = Zm_p + (A - Z)m_n$. Die nachfolgenden Überlegungen sind daher für alle Alkaliatome gültig.

3.1.2 Grenzfall unendlicher Kernmasse

Bei Alkaliatomen liegt die Kernmasse um drei (Wasserstoff) bis fünf Größenordnungen (Kalium, Rubidium, Caesium) über der Elektronenmasse. Im Grenzfall unendlicher Kernmasse vollzieht sich ein stetiger Übergang zu einer Entkopplung von Schwerpunktsbewegung und Relativbewegung. Die Schwerpunktsbewegung wird gradlinig und gleichförmig und definiert so ein Inertialsystem.

Durch die Koordinatentransformation

$$(\mathbf{r}_K, \mathbf{r}_e) \mapsto (\mathbf{R}, \mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{m_K \mathbf{r}_K + m_e \mathbf{r}_e}{m_K + m_e}, \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_K \right) \quad (3.6)$$

ergibt sich mit der Bezeichnung $M \stackrel{\text{def}}{=} m_K + m_e$ für die Gesamtmasse und $m \stackrel{\text{def}}{=} m_K m_e / (m_K + m_e)$ für die reduzierte Masse die zu (3.3) äquivalente Lagrange-Funktion²

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; \mathbf{V}, \mathbf{v}; t) &= \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + e \phi_K(r) \\ &\quad - W_\phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t) \\ &\quad + \boldsymbol{\Pi}_A^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t) \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\Pi}_A^{(2)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t) \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.7)$$

mit

$$W_\phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t) = Ze\phi\left(t, \mathbf{R} - \frac{m_e}{M}\mathbf{r}\right) - e\phi\left(t, \mathbf{R} + \frac{m_K}{M}\mathbf{r}\right) \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\Pi}_A^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t) = \frac{Ze}{c}\mathbf{A}\left(t, \mathbf{R} - \frac{m_e}{M}\mathbf{r}\right) - \frac{e}{c}\mathbf{A}\left(t, \mathbf{R} + \frac{m_K}{M}\mathbf{r}\right) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_A^{(2)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; t) &= -\frac{m_e}{M} \frac{Ze}{c} \mathbf{A}\left(t, \mathbf{R} - \frac{m_e}{M}\mathbf{r}\right) \\ &\quad - \frac{m_K}{M} \frac{e}{c} \mathbf{A}\left(t, \mathbf{R} + \frac{m_K}{M}\mathbf{r}\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

und die Euler-Lagrange-Gleichungen nehmen nach kurzer Rechnung folgende

¹Es kann aus der Kugelsymmetrie von ρ gefolgert werden, daß auch die rechte Seite von (3.5) nur vom Abstand $|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_K|$ zwischen Elektron und Kern abhängt und damit ϕ_K wohldefiniert ist.

²Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind forminvariant unter umkehrbaren linearen Koordinatentransformationen.

Form an:

$$\begin{aligned}
M\dot{\mathbf{V}} &= -\frac{\partial W_\phi}{\partial \mathbf{R}} + \left\{ \left[\frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{(1)}}{\partial \mathbf{R}} \right]^\top - \frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{(1)}}{\partial \mathbf{R}} \right\} \cdot \mathbf{v} \\
&+ \left\{ \left[\frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{(2)}}{\partial \mathbf{R}} \right]^\top - \frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} \right\} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{(1)}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
m\dot{\mathbf{v}} &= e \frac{\partial \phi_K(r)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial W_\phi}{\partial \mathbf{r}} + \left\{ \left[\frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} \right]^\top - \frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{(2)}}{\partial \mathbf{R}} \right\} \cdot \mathbf{V} \\
&+ \left\{ \left[\frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{(2)}}{\partial \mathbf{r}} \right]^\top - \frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{(2)}}{\partial \mathbf{r}} \right\} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{(2)}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Für ein Alkali-Metall mit Ordnungszahl A gilt $m_K = Zm_p + (A - Z)m_n \sim 1,8 \cdot 10^3 Am_e \gg m_e$ und die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen hängen stetig von $1/m_K$ ab, wobei der Wert $1/m_K = 0$ zugelassen ist.³ Für $m_K \rightarrow \infty$ streben sie daher gegen die Lösungen von

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{V}} &= 0 \\
m\dot{\mathbf{v}} &= e \frac{\partial \phi_K(r)}{\partial \mathbf{r}} + e \frac{\partial \phi(t, \mathbf{R} + \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(t, \mathbf{R} + \mathbf{r})}{\partial t} \\
&- \frac{e}{c} \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{A}(t, \mathbf{R} + \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right]^\top - \frac{\partial \mathbf{A}(t, \mathbf{R} + \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right\} \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Die Schwerpunktsbewegung wird also gradlinig und gleichförmig. Da wegen (3.6) mit $m_k \rightarrow \infty$ auch $\mathbf{r}_K \rightarrow \mathbf{R}$ gilt, fällt sie mit der Bewegung des Kernes zusammen. Es gibt daher ein \mathbf{R}_0 mit

$$\mathbf{r}_K(t) = \mathbf{R}(t) = \mathbf{V}t + \mathbf{R}_0 \tag{3.15}$$

Damit können die sechs Euler-Lagrange-Gleichungen, die durch (3.3) erzeugt werden, auf drei für die elektronischen Freiheitsgrade reduziert werden. Dazu muß lediglich die Darstellung (3.15) für die Kernbewegung in die drei Gleichungen für $\dot{\mathbf{v}}_e$ eingesetzt wird. Nach einiger Rechnung ergibt sich unter Ausnutzung von (3.1) und (3.2):

$$m_e \dot{\mathbf{v}}_e = e \frac{\partial \phi_K(|\mathbf{r}_e - \mathbf{V}t - \mathbf{R}_0|)}{\partial \mathbf{r}_e} - e \left[\mathbf{E}(t, \mathbf{r}_e) + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}_e) \right] \tag{3.16}$$

Diese Gleichungen lassen sich vereinfachen, wenn in das Schwerpunktsbezugs-system übergegangen wird. Wie bereits bemerkt, müssen in diesem Zusammenhang relativistische Betrachtungen angestellt werden.

3.1.3 Relativistische Betrachtungen

Galilei-Transformationen führen wegen ihrer nichtrelativistischen Natur zu fehlerhaften Ergebnissen, wenn die äußeren Felder elektromagnetische Wellen enthalten, die sich mit relativistischer Geschwindigkeit ausbreiten. Daher werden

³Die stetige Abhängigkeit ergibt sich wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeitseigenschaften des Viererpotentials aus allgemeinen Sätzen über Differentialgleichungssysteme (siehe z. B. in [Wal93], §12).

die äußeren Felder den entsprechenden Poincaré-Transformationen unterworfen.

In diesem Unterabschnitt werden die Bestimmungsgrößen der äußeren Felder im Laborsystem mit einem tiefgestellten „L“ gekennzeichnet. Die Schwierigkeiten einer Galilei-Transformation der Bewegungsgleichung (3.16) betreffen lediglich die Lorentz-Kraft

$$-e \left(\mathbf{E}_L + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B}_L \right) \quad (3.17)$$

Sie muß relativistisch behandelt werden. Dies geschieht am einfachsten auf folgende Weise: Der Ausdruck (3.17) ist die nichtrelativistische Näherung erster Ordnung des räumlichen Bestandteils der Viererkraft für die Bewegung eines Elektrons in äußeren Feldern. Der nicht genäherte Ausdruck lautet:

$$\frac{-e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} \left(\mathbf{E}_L \cdot \frac{\mathbf{v}_e}{c}, \mathbf{E}_L + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B}_L \right) = -\frac{e}{c} F^\alpha{}_\beta \dot{x}^\beta \quad (3.18)$$

Dabei wird auf der rechten Seite, wie in der relativistischen Mechanik üblich, nach der Eigenzeit differenziert, und F ist der Feldstärketensor.⁴ Diese Viererkraft ist forminvariant unter Poincaré-Transformationen. Der Übergang in das sich mit dem Schwerpunkt bewegende Bezugssystem liefert daher den Ausdruck:

$$\frac{-e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.19)$$

wobei sich nun alle Größen auf das bewegte Bezugssystem beziehen. Für die räumlichen Komponenten lautet die nichtrelativistische Näherung erster Ordnung in \mathbf{v}/c :

$$-e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.20)$$

Beim Übergang in das Schwerpunktsbezugssystem sind daher in der Lorentz-Kraft lediglich die Felder durch die transformierten Felder zu ersetzen. Diese werden nun angegeben. Zur Vereinfachung werden die Bestimmungsgrößen der Schwerpunktsbewegung gemäß

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{V}, \mathbf{R}_0) \quad (3.21)$$

zusammengefaßt. Für statische homogene Felder gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E}_\mathbf{V} &= \left(\mathbf{E}_L \cdot \frac{\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \left[\mathbf{E}_L - \left(\mathbf{E}_L \cdot \frac{\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}_L \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\Sigma = \mathbf{B}_\mathbf{V} &= \left(\mathbf{B}_L \cdot \frac{\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \left[\mathbf{B}_L - \left(\mathbf{B}_L \cdot \frac{\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}_L \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

⁴Die Darstellung durch Vierervektoren und Vierertensoren hängt von den verwandten Konventionen ab. Hier ist die Signatur der Metrik $+\dots$, $x^\beta = (ct, \mathbf{x})$, Eigenzeitdifferential $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$, Viererpotential $A^\alpha = (\phi, \mathbf{A})$, Feldstärketensor $F_{\alpha\beta} = \partial A_\beta / \partial x^\alpha - \partial A_\alpha / \partial x^\beta$.

Bilden die äußeren Felder im Laborsystem eine linear polarisierte monochromatische ebene Welle, so lassen sich die zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Anteile wie folgt darstellen [BW86]:

$$\mathbf{E}_L(t, \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}}_L \cos(\omega_L t - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} + \varphi_L) \quad (3.24)$$

$$\mathbf{B}_L(t, \mathbf{r}) = \frac{c}{\omega_L} \mathbf{k}_L \times \hat{\mathbf{E}}_L \cos(\omega_L t - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} + \varphi_L) \quad (3.25)$$

Die bewegungsvermittelte Mischung der elektrischen und magnetischen Felder gemäß (3.22,3.23) führt insbesondere dazu, daß bei einem rein elektrischen (magnetischen) Feld im Laborsystem, im bewegten Bezugssystem nichtverschwindende magnetische (elektrische) Felder herrschen können. Diese Felder werden als „bewegungsvermittelt“ bezeichnet. In der quantenmechanischen Beschreibung führen sie zu bewegungsvermittelten Stark- und Zeeman-Effekten.

Die Beschreibungsgrößen der Phase der linear polarisierten monochromatischen ebenen Welle im Schwerpunktsbezugssystem lauten:

$$\omega_\Sigma = \omega_{\mathbf{V}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} (\omega_L - \mathbf{V} \cdot \mathbf{k}_L) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\Sigma = \mathbf{k}_{\mathbf{V}} = \mathbf{k}_L - \left(\mathbf{k}_L \cdot \frac{\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V} \\ + \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} \left[\left(\mathbf{k}_L \cdot \frac{\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V} - \frac{\omega_L}{c} \frac{\mathbf{V}}{c} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\varphi_\Sigma = \varphi_{\mathbf{R}_0} = \varphi_L - \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{k}_L \quad (3.28)$$

Die Amplituden transformieren sich wie statische homogene Felder. Die Darstellung (3.25) der magnetischen Komponente gilt dann auch für die transformierten Größen. Die Gleichung (3.26) beschreibt den relativistischen Doppler-Effekt, die Gleichung (3.27) die relativistische Aberration.

Die Überlagerung statischer homogener Felder und einer linear polarisierten monochromatischen ebenen Welle stellt den allgemeinsten Fall dar, der im Rahmen dieser Arbeit von Bedeutung ist.

Werden die übrigen Bestandteile der Bewegungsgleichung (3.16) der entsprechenden Galilei-Transformation unterworfen, so lautet das Endergebnis:

$$m_e \dot{\mathbf{v}} = e \frac{\partial \phi_K(r)}{\partial \mathbf{r}} - e \left[\mathbf{E}_\Sigma(t, \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_\Sigma(t, \mathbf{r}) \right] \quad (3.29)$$

Eine bloße Galilei-Transformation der Bewegungsgleichung (3.16) weicht davon in den folgenden zwei Punkten ab:

1. Für statische homogene Felder entspricht ihr Ergebnis der nichtrelativistischen Näherung erster Ordnung in \mathbf{v}/c und \mathbf{V}/c .
2. Für monochromatische ebene Wellen ergibt sich der Doppler-Effekt in erster Ordnung in \mathbf{V}/c während der Wellenvektor unverändert bleibt („klassischer Doppler-Effekt“). Dies führt dazu, daß die transformierten Felder i. allg. keine Lösung der Wellengleichung mehr sind. Ferner hat die klassische Addition der Geschwindigkeiten für $\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}_L < 0$ überlichtschnelle Ausbreitungsgeschwindigkeiten zur Folge.

3.1.4 Hamilton-Funktion

Die unterschiedlichen Wechselwirkungen, denen das Valenzelektron eines Alkaliatoms bei Gegenwart äußerer Felder ausgesetzt ist, werden durch verschiedenen Summanden seiner Hamilton-Funktion beschrieben. Darüber hinaus erlaubt die enge Verbindung der Hamilton-Funktion zur quantenmechanischen Beschreibung im Zusammenspiel mit dem Bohrschen Atommodell eine formale, aber anschauliche Abschätzungen der Bedeutung der unterschiedlichen Wechselwirkungen.

Um die Hamilton-Funktion anzugeben, die die Bewegungsgleichung (3.29) liefert, sei $(\phi_{\Sigma}, \mathbf{A}_{\Sigma})$ ein Viererpotential, das die Felder im Schwerpunktssystem erzeugt. Dann ergibt sich die Bewegungsgleichung im Schwerpunktssystem aus folgender Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}_{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \frac{1}{2}m_e \mathbf{v}^2 + e\phi_K(r) + e\phi_{\Sigma}(t, \mathbf{r}) - e\mathbf{A}_{\Sigma}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (3.30)$$

Die entsprechende Hamilton-Funktion lautet:

$$\mathcal{H}_{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = \frac{1}{2m_e} \left[\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_{\Sigma}(t, \mathbf{r}) \right]^2 - e\phi_K(r) - e\phi_{\Sigma}(t, \mathbf{r}) \quad (3.31)$$

Nun wird in \mathcal{H}_{Σ} das Vektorpotential durch die Felder ausgedrückt. Die äußeren Felder sind im Laborsystem eine Überlagerung von statischen homogenen Feldern $(\mathbf{E}_{0,L}, \mathbf{B}_{0,L})$ und einer monochromatischen ebenen Welle (3.24). Das Vektorpotential (ϕ_L, \mathbf{A}_L) mit

$$\phi_L(t, \mathbf{r}) = -\mathbf{E}_{0,L} \cdot \mathbf{r} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{A}_L(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{0,L} \times \mathbf{r} - \frac{c}{\omega_L} \hat{\mathbf{E}}_L \sin(\omega_L t - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} + \varphi_L) \quad (3.33)$$

erzeugt diese Überlagerung. In dem durch Σ bestimmten Schwerpunktsbezugs-system werden die Felder durch das Vektorpotential $(\phi_{\Sigma}, \mathbf{A}_{\Sigma})$ erzeugt, das sich ergibt, wenn in den Gleichungen (3.32) und (3.33) überall L durch Σ ersetzt wird. In den jeweiligen Bezugssystemen erfüllen die Viererpotentiale darüber hinaus die Bedingung der Coulomb-Eichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_L = \nabla \cdot \mathbf{A}_{\Sigma} = 0 \quad (3.34)$$

Einsetzen des Viererpotentials $(\phi_{\Sigma}, \mathbf{A}_{\Sigma})$ in die Hamilton-Funktion \mathcal{H}_{Σ} (3.31) liefert nach kurzer Rechnung:

$$\mathcal{H}_{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = \frac{1}{2m_e} \mathbf{p}^2 - e\phi_K(r) \quad (3.35)$$

$$+ e\mathbf{E}_{0,\Sigma} \cdot \mathbf{r} \quad (3.36)$$

$$+ \frac{e}{2m_e c} \mathbf{B}_{0,\Sigma} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \frac{e^2}{8m_e c^2} |\mathbf{B}_{0,\Sigma} \times \mathbf{r}|^2 \quad (3.37)$$

$$- \frac{e}{m_e \omega_{\Sigma}} \hat{\mathbf{E}}_{\Sigma} \cdot \mathbf{p} \sin(\omega_{\Sigma} t - \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\Sigma}) \quad (3.38)$$

$$- \frac{e^2}{2m_e c \omega_{\Sigma}} (\mathbf{B}_{0,\Sigma} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\Sigma} \sin(\omega_{\Sigma} t - \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\Sigma}) \quad (3.39)$$

$$+ \frac{e^2}{2m_e \omega_{\Sigma}^2} \hat{\mathbf{E}}_{\Sigma}^2 \sin^2(\omega_{\Sigma} t - \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\Sigma}) \quad (3.40)$$

Wichtig ist, daß \mathcal{H}_Σ durch den Parametersatz

$$\left(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0; \mathbf{k}, \hat{\mathbf{E}}\right) = \left(\mathbf{E}_{0,\Sigma}, \mathbf{B}_{0,\Sigma}; \mathbf{k}_\Sigma, \hat{\mathbf{E}}_\Sigma\right) \quad (3.41)$$

eindeutig bestimmt ist und in diesem Sinne nur implizit von Σ abhängt. Daher wird im folgenden der Index Σ weggelassen, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind. Die zeitunabhängige Hamilton-Funktion, die sich bei Abwesenheit des Laser-Feldes und für verschwindende Schwerpunktschwindigkeit \mathbf{V} ergibt, wird noch eine wichtige Rolle spielen. Sie lautet:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathcal{H}_\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)|_{\hat{\mathbf{E}}_L=0; \mathbf{V}=0} \quad (3.42)$$

$$= \frac{1}{2m_e} \mathbf{p}^2 - e\phi_K(r) + e\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{e}{2m_e c} \mathbf{B}_0 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \frac{e^2}{8m_e c^2} |\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}|^2 \quad (3.43)$$

Ist ϕ_K das Wasserstoff-Kernpotential (3.4), so werden die entsprechenden Hamilton-Gleichungen auch als diamagnetisches Kepler-Problem bezeichnet.

3.1.5 Geeignete Einheiten

Weitere Untersuchung der Hamilton-Funktion \mathcal{H}_Σ , insbesondere die Abschätzung der Größenordnungen der Wechselwirkungsenergien (3.36)-(3.40), werden sehr viel übersichtlicher, wenn sie unter Verwendung geeigneter Einheiten durchgeführt werden. Zur Einführung dieser Einheiten wird vom Bohrschen Atommodell für Wasserstoff im Grenzfall unendlich großer Kernmasse ausgegangen.

Bezeichnung	Darstellung (cgs)	Wert (SI)
r_B	$m_e^{-1} \hbar^2 e^{-2}$	$5,2917725 \cdot 10^{-11}$ m
v_B	$\hbar^{-1} e^2$	$2,18769142 \cdot 10^6$ m s ⁻¹
p_B	$m_e \hbar^{-1} e^2$	$1,9928534 \cdot 10^{-24}$ kg m s ⁻¹
l_B	\hbar	$1,05457266 \cdot 10^{-34}$ m ⁻² kg s ⁻¹
Ry	$\frac{1}{2} m_e \hbar^{-2} e^4$	$2,1798741 \cdot 10^{-18}$ J
t_B	$m_e^{-1} \hbar^3 e^{-4}$	$2,4188843 \cdot 10^{-17}$ s
E_B	$m_e^2 \hbar^{-4} e^5$	$5,1422083 \cdot 10^{11}$ V m ⁻¹
B_B	$m_e^2 c \hbar^{-3} e^3$	$2,3505181 \cdot 10^5$ T

Tabelle 3.1: Die natürlichen Einheiten des Wasserstoffatoms. Bis auf die Energieeinheit Ry handelt es sich um die sog. atomaren Einheiten. Die atomare Energieeinheit ist das Hartree und gleich 2 Ry. (Die numerischen Werte wurden auf Grundlage der „CODATA recommended values“ von 1986 [Lid90] berechnet.)

Die Bewegung des Elektrons auf der untersten Bohrschen Bahn weist eine ganze Reihe von Erhaltungsgrößen auf, deren Werte auf natürliche Wei-

se die Größenordnungen atomphysikalischer Vorgänge widerspiegeln und daher als Einheiten besonders geeignet sind. So wird der Kernabstand r_B die Längeneinheit, und die Beträge v_B , p_B , l_B und Ry („Rydberg“) von Geschwindigkeit, Impuls, Drehimpuls und Energie liefern die meisten übrigen mechanischen Einheiten. Als Zeiteinheit wird r_B/v_B vereinbart. Die Stärke des vom Kern ausgehenden Coulomb-Feldes auf der untersten Bohrschen Bahn bestimmt die Einheit E_B für die elektrische Feldstärke. Und die Einheit für die magnetische Induktion B_B wird so gewählt, daß bei einer magnetische Induktion dieser Stärke die Zyklotronfrequenz des Elektrons gerade gleich seiner Umlauffrequenz auf der untersten Bohrschen Bahn ist. Die Darstellung dieser Größen in cgs-Einheiten und ihr Wert in SI-Einheiten ist der Tabelle 3.1.5 zu entnehmen.

Im folgenden ordnet ein hochgestellter Strich „/“ einer physikalischen Größe ihren zahlenmäßigen Wert bezüglich der eben eingeführten Einheiten zu. Für die Lichtgeschwindigkeit c bedeutet also c' die Zahl $c/v_B = c\hbar/e^2 = 1/\alpha$ mit der Feinstrukturkonstante α .

3.1.6 Skalierungseigenschaften

Im Falle des Wasserstoffatoms weist die Abhängigkeit der Hamilton-Gleichungen von den Parametern der äußeren Felder eine Besonderheit auf. Die Menge aller möglichen Parameter zerfällt in Untermengen, die folgende Eigenschaft haben: Je zwei Parametersätzen aus einer solchen Untermenge ist eine Skalentransformation zugeordnet, die die Lösungsmannigfaltigkeiten der zu den Parametersätzen gehörenden Hamilton-Gleichungen ineinander überführt. Die daraus gezogenen Folgerungen über das Stabilitätsverhalten von Wasserstoff und Rubidium bei unterschiedlichen Parametersätzen bilden den Ausgangspunkt für die Planung des Experimentes.

In der Literatur wird das paramagnetische Kepler-Problem (3.42) behandelt. Hier wird das Ergebnis dahingehend verallgemeinert, daß es die Anwesenheit eines Laser-Feldes zuläßt. Dazu wird von dem allgemeinen Transformationsverhalten von Hamilton-Gleichungen unter Skalentransformationen ausgegangen.

Sei $D_r \times D_p \times D_t \ni (\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) \mapsto \mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ eine Hamilton-Funktion (D_r , D_p und D_t können einheitenbehaftet sein). Ein Paar linearer Abbildungen

$$D_r \times D_p \ni (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \mapsto \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{r}, \frac{1}{\pi} \mathbf{p} \right) \quad (3.44)$$

$$D_t \ni t \mapsto \frac{1}{\tau} t \quad (3.45)$$

mit von Null verschiedenen u. U. einheitenbehafteten Konstanten ρ , π und τ heißt Skalentransformation. Wird eine skalierte Hamilton-Funktion $\mathcal{H}^{(\text{scal})}$ gemäß

$$\mathcal{H}^{(\text{scal})}(\mathbf{s}, \mathbf{q}; u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\eta} \mathcal{H}(\rho \mathbf{s}, \pi \mathbf{q}; \tau u) \quad (3.46)$$

mit $\eta = \rho\pi/\tau$ eingeführt, dann sind die durch \mathcal{H} erzeugten Hamilton-Gleichungen und die durch $\mathcal{H}^{(\text{scal})}$ erzeugten skalierten Hamilton-Gleichungen in folgendem Sinne äquivalent: Ein stetig differenzierbarer Weg

$$D_t \supset I \ni t \mapsto (\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) \quad (3.47)$$

ist genau dann Lösung der durch \mathcal{H} erzeugten Hamilton-Gleichungen, wenn der skalierte Weg

$$\frac{1}{\tau} D_t \supset \frac{1}{\tau} I \ni u \mapsto (\mathbf{s}(u), \mathbf{q}(u)) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{r}(\tau u), \frac{1}{\pi} \mathbf{p}(\tau u) \right) \quad (3.48)$$

Lösung der durch $\mathcal{H}^{(\text{scal})}$ erzeugten Hamilton-Gleichungen ist. Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen der Definitionen.

Wird beim Wasserstoffatom in externen Feldern eine von der Stärke der magnetischen Induktion B_0 abhängige Skalentransformation mit

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} r_B (B'_0)^{-\frac{2}{3}} \quad (3.49)$$

$$\pi \stackrel{\text{def}}{=} p_B (B'_0)^{\frac{1}{3}} \quad (3.50)$$

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} t_B (B'_0)^{-1} \quad (3.51)$$

$$\eta = 2 R_y (B'_0)^{\frac{2}{3}} \quad (3.52)$$

durchgeführt, dann lautet die skalierte Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(\text{scal})}(\mathbf{s}, \mathbf{q}; u) &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^2 - \frac{1}{s} + \mathbf{E}_0^{(\text{scal})} \cdot \mathbf{s} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{q}) + \frac{1}{8} \left| \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \times \mathbf{s} \right|^2 \\ &\quad - \frac{\hat{\mathbf{E}}^{(\text{scal})}}{\omega^{(\text{scal})}} \cdot \mathbf{q} \sin(\omega^{(\text{scal})} u - \mathbf{k}^{(\text{scal})} \cdot \mathbf{s} + \varphi) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \times \mathbf{s} \right) \cdot \frac{\hat{\mathbf{E}}^{(\text{scal})}}{\omega^{(\text{scal})}} \sin(\omega^{(\text{scal})} u - \mathbf{k}^{(\text{scal})} \cdot \mathbf{s} + \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\mathbf{E}}^{(\text{scal})}}{\omega^{(\text{scal})}} \right)^2 \sin^2(\omega^{(\text{scal})} u - \mathbf{k}^{(\text{scal})} \cdot \mathbf{s} + \varphi) \end{aligned} \quad (3.53)$$

mit den skalierten Feldparametern

$$\mathbf{E}_0^{(\text{scal})} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}'_0 (B'_0)^{-\frac{4}{3}} \quad (3.54)$$

$$\hat{\mathbf{E}}^{(\text{scal})} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{E}}' (B'_0)^{-\frac{4}{3}} \quad (3.55)$$

$$\omega^{(\text{scal})} \stackrel{\text{def}}{=} \tau \omega \quad (3.56)$$

$$\mathbf{k}^{(\text{scal})} \stackrel{\text{def}}{=} \rho \mathbf{k} \quad (3.57)$$

Die skalierte Hamilton-Funktion, ihre Argumente und alle skalierten Parameter sind dann dimensionslos und die magnetische Induktion tritt nur noch in Form des in ihre Richtung weisenden Einheitsvektors auf. Damit ist ein Parameter aus der Gleichung eliminiert. Wegen ihrer Linearität läßt die Skalentransformation das Stabilitätsverhalten einer Anfangsbedingung invariant. Als Beispiel für die Anwendung dieser Eigenschaft sei der Fall des Wasserstoffatoms ohne Laser-Feld angeführt. Hier ist die Gesamtenergie \mathcal{E} des Systems eine Erhaltungsgröße und die Bewegung verläuft auf den Energiehyperebenen $\mathcal{H} = \mathcal{E} = \text{const}$. Jede solche Hyperebene ist durch einen Parametersatz $\mathcal{P} = (\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0; \mathcal{E})$ eindeutig bestimmt. Die Skalentransformation bildet die durch den Parametersatz $\mathcal{P} = (\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0; \mathcal{E})$ bestimmte Hyperebene bijektiv auf die Hyperebene des skalierten Systems ab, die für die skalierte magnetische Induktion $\mathbf{B}^{\text{scal}} = \mathbf{B}_0/B_0$ und das skalierte elektrische Feld $\mathbf{E}^{(\text{scal})}$ durch die Bedingung $\mathcal{H}^{(\text{scal})} = \mathcal{E}^{(\text{scal})} = \mathcal{E}/\eta$ gegeben

ist. Deswegen wird \mathcal{E}/η skalierte Energie genannt und mit $\mathcal{E}^{(\text{scal})}$ bezeichnet. Werden unskalierte und skalierte Hyperebenen mit den sie bestimmenden Parametersätzen identifiziert, vermittelt die Skalentransformation eine Abbildung \mathcal{S} von der Menge aller nicht skalierten Parametersätze mit $\mathbf{B}_0 \neq 0$ auf die Menge $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ der skalierten Parametersätze (\mathbb{S}_2 ist die Einheitssphäre im dreidimensionalen Raum und geometrischer Ort der skalierten magnetischen Induktionen).

Gibt es auf einer nicht skalierten Hyperebene $\mathcal{P} = (\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0; \mathcal{E})$ chaotisches Verhalten, so überträgt sich dies auf die skalierte Hyperebene $\mathcal{P}^{(\text{scal})} = \mathcal{S}(\mathcal{P})$. Da die Umkehrung der Skalentransformation wieder eine Skalentransformation ist, weisen dann auch alle Hyperebenen \mathcal{Q} chaotisches Verhalten auf, für die $\mathcal{S}(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}^{(\text{scal})}$ ist. Die Menge aller Hyperebenen mit $\mathcal{S}(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}^{(\text{scal})}$ ist $(\beta\mathbf{B}_0, \beta^{4/3}\mathbf{E}_0; \beta^{2/3}\mathcal{E})$ mit $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\tilde{\mathbf{B}}_0, \tilde{\mathbf{E}}_0; \tilde{\mathcal{E}}) &= \mathcal{S}(\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0; \mathcal{E}) \\ \iff \exists \beta > 0 : (\tilde{\mathbf{B}}_0, \tilde{\mathbf{E}}_0; \tilde{\mathcal{E}}) &= (\beta\mathbf{B}_0, \beta^{4/3}\mathbf{E}_0; \beta^{2/3}\mathcal{E}) \end{aligned} \quad (3.58)$$

3.2 Quantenmechanische Beschreibung

Das quantenmechanische Modell für die Beschreibung von Alkali-Atomen in äußeren Feldern beruht auf der klassischen Beschreibung im Grenzfall $m_K \rightarrow \infty$. Im Einklang damit wird die Schwerpunktsbewegung nicht quantisiert sondern klassisch gemäß (3.15) durch die Größe $\Sigma = (\mathbf{V}, \mathbf{R}_0)$ beschrieben.

Die elektromagnetischen Felder sind im Laborsystem durch den Parametersatz $(\mathbf{E}_{0,L}, \mathbf{B}_{0,L}; \mathbf{k}_L, \hat{\mathbf{E}}_L)$ gegeben und werden ebenfalls klassisch behandelt. Zur Beschreibung des Zustandes eines Atoms dient daher ein Satz $(\Sigma; \Psi)$ aus den Bestimmungsgrößen Σ der gradlinigen und gleichförmigen Schwerpunktsbewegung und der elektronischen Wellenfunktion Ψ im Schwerpunktssystem.

Die kanonische Quantisierung der klassischen Hamilton-Funktion \mathcal{H}_Σ (3.31) liefert den Hamilton-Operator H_Σ , der in Form der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung die quantenmechanische Bewegungsgleichung für die elektronischen Freiheitsgrade im Schwerpunktssystem liefert.

3.3 Planung der Experimente

Die Wahl der experimentellen Parameter stützt sich auf die numerischen Untersuchungen von Main und Wunner [MW92, MW94] zum Wasserstoffatom in gekreuzten statischen homogenen elektrischen und magnetischen Feldern:

$$\boxed{\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{E}_0} \quad (3.59)$$

Diese Arbeiten behandeln also eine besondere Form des diamagnetischen Kepler-Problems (3.42). Hier wie im folgenden werden Forderungen an die Geometrie des Experimentes mit einem Rahmen versehen.

Sie widmen sich dem Energiebereich $I_\mathcal{E} = [-280 \text{ cm}^{-1}; -220 \text{ cm}^{-1}]$ bei einer elektrischen Feldstärke von $E_0 = 5,14 \cdot 10^5 \text{ V/m}$. Für verschiedene Stärken der magnetischen Induktion (6 T, 10,5 T und 21 T) wird die quantenmechanische Anregungsfunktion für Laser-Anregung in den Energiebereich $I_\mathcal{E}$

durch störungstheoretische Behandlung der Atom-Laser-Wechselwirkung berechnet und auf Ericson-Fluktuationen überprüft. Bei $B_0 = 21$ T weist die Anregungsfunktion ausgeprägte Ericson-Fluktuationen auf. Darüber hinaus wurde das klassische Ionisationsverhalten des diamagnetischen Kepler-Problems für einen Parametersatz nahe bei $(B_0, E_0; \mathcal{E} = -260 \text{ cm}^{-1})$ untersucht und chaotische Streuung nachgewiesen.

Für Rubidium liegen bislang keine derartigen Berechnung vor. Trotzdem kann bei den genannten Parametern mit ähnlichen Verhältnissen gerechnet werden. Rubidium und Wasserstoff unterscheiden sich in der theoretischen Beschreibung lediglich im Kernpotential ϕ_K . Für Wasserstoff ist das Kernpotential ein reines Kepler-Potential, das unter den kugelsymmetrischen Potentialen eine Sonderstellung einnimmt: Mit dem Runge-Lenz-Vektor gibt es für die dreidimensionale Bewegung im Kern-Feld eine weitere Erhaltungsgröße, die dazu führt, daß jede gebundene Bewegung periodisch ist⁵. Diese „dynamische“ Symmetrie wird bei Rubidium infolge der Abschirmung der Kernladung durch die Edelgaskonfiguration gebrochen. Bei denselben Feldstärken E_0 , B_0 und derselben Energie \mathcal{E} sollte daher Rubidium eher zu chaotischem Verhalten neigen als Wasserstoff. Insbesondere sollte Rubidium bei solchen Parameterwerten $(E_0, B_0; \mathcal{E})$ chaotisches Verhalten aufweisen, bei denen sich schon Wasserstoff chaotisch verhält. Falls die Vorhersage von Blümel und Smilansky [BS88] über den Zusammenhang zwischen klassisch chaotischer Streuung und Ericson-Fluktuationen richtig ist, sollte also bei Rubidium der experimentelle Nachweis von Ericson-Fluktuationen bei den Parameterwerten $(B_0, E_0; \mathcal{E})$ gelingen, bei denen Main und Wunner bei Wasserstoff klassisch chaotische Streuung gefunden haben. Eine Stärke der magnetischen Induktion von 21 T kann allerdings mit dem im Experiment zur Verfügung stehenden supraleitenden Magneten nicht erzeugt werden. Den Ausweg weist die Skalierungseigenschaft des diamagnetischen Kepler-Problems (siehe 3.1.6). Mit $\beta = 2/21$ liefert (3.58):

$$\tilde{B}_0 = 2,0 \text{ T} \quad (3.60)$$

$$\tilde{E}_0 = 2,23 \cdot 10^4 \text{ V/m} \quad (3.61)$$

$$\tilde{I}_{\mathcal{E}} = [-58,4 \text{ cm}^{-1}; -45,9 \text{ cm}^{-1}] \quad (3.62)$$

Im Experiment weichen die tatsächlichen Laborfeldstärken um weniger als 1% von \tilde{B}_0 bzw. \tilde{E}_0 ab, und das untersuchte Energieintervall ist in $\tilde{I}_{\mathcal{E}}$ enthalten. Den Arbeiten von Main und Wunner folgend werden auch Messungen bei einer magnetischen Induktion geringerer Stärke ($\sim 1,0$ T und $\sim 1,5$ T) durchgeführt. Einer elektrischen Feldstärke von \tilde{E}_0 entspricht ein Stark-Sattel bei $-91,4 \text{ cm}^{-1}$, also deutlich unterhalb des Energieintervalls $\tilde{I}_{\mathcal{E}}$. Damit ist klar, daß bei der Elektronendynamik mit Ionisation zu rechnen ist.

3.4 Geometrie des Experimentes

Die fundamentalen Eigenschaften der Wechselwirkung eines ruhenden Atoms mit statischen homogenen Feldern und monochromatischem Laser-Licht werden durch H_{Σ} mit $\Sigma = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ beschrieben. Entsprechend gehen die in Abschnitt 3.3

⁵Tatsächlich haben unter den dreidimensionalen kugelsymmetrischen Potentialen nur das anziehenden Kepler-Potential und das harmonische Oszillatorpotential diese Eigenschaft [Arn97].

ausgeführten Überlegungen von $\Sigma = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ aus. Diese Bedingung ist im Rahmen experimenteller Untersuchungen nur schwer zu erfüllen. Stattdessen muß meist von einer statistischen Verteilung für Σ ausgegangen werden. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn die Atome wie hier in Form eines thermisch erzeugten Atomstrahls bereitgestellt werden. Durch eine geeignete Geometrie des Experimentes kann allerdings verhindert werden, daß die fundamentalen quantenmechanischen Eigenschaften in den Meßergebnissen infolge der Mittelung über die klassische Verteilung für Σ nur unzureichend aufgelöst werden. Dazu muß für die gewählten Parameter $(\mathbf{E}_{0,L}, \mathbf{B}_{0,L}; \mathbf{k}_L, \hat{\mathbf{E}}_L)$ die durch die Schwerpunktschwindigkeiten \mathbf{V} verursachte Abweichung $\mathcal{H}_{\mathbf{V}, \mathbf{R}_0} - \mathcal{H}_{0, \mathbf{R}_0}$ möglichst klein werden.

3.4.1 Experimentelle Parameter

Der Wellenvektor \mathbf{k}_L weist in Ausbreitungsrichtung des Laser-Lichtes. Sein Betrag ist wegen $k_L = \omega_L/c = 2\pi/\lambda_L$ durch die Wellenlänge des Laser-Lichtes bestimmt. Diese beträgt für den Dioden-Laser etwa 780 nm und für den Farbstoff-Laser etwa 480 nm. Die elektrische Komponente $\hat{\mathbf{E}}_L$ ist für lineare Polarisation kollinear zur Polarisationsrichtung und ihr Betrag kann aus der Lichtleistung abgeschätzt werden. Wird mit einem Detektor, dessen empfindliche Fläche A senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht eine Lichtleistung P gemessen, so ergibt sich in SI-Einheiten:

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{2P}{c\epsilon_0 A}} \quad (3.63)$$

Diese Beziehung gilt für eine ebene Welle im Vakuum. Das Laser-Licht im Experiment wird besser durch fundamentale Gauß-Strahlen beschrieben, die in den Atomstrahl fokussiert werden. Obwohl die Beziehung (3.63) in diesem Falle nicht mehr streng gültig ist, sollte sie die richtige Größenordnung von \hat{E} im Fokus liefern, wenn für P die i. allg. außerhalb des Fokus gemessene Strahlleistung und $A = \pi r_G^2$ eingesetzt wird, wobei r_G der Radius der Strahltaile ist. Die experimentellen Leistungswerte liegen bei 50 μW für den Dioden-Laser und weniger als 10 mW für den Farbstoff-Laser. Wird für r_G die typische Größenordnung $r_G \sim 100 \mu\text{m}$ angesetzt, so ergibt sich:

$$\hat{E} \sim 1 \text{ kV/m} \quad \text{Dioden-Laser} \quad (3.64)$$

$$\hat{E} \lesssim 20 \text{ kV/m} \quad \text{Farbstoff-Laser} \quad (3.65)$$

Zwei experimentelle Parameter gestatten eine Abschätzung der statistischen Verteilung der Schwerpunktschwindigkeiten im Atomstrahl: Die Temperatur des Atomofens T und die durch die Kollimationsblenden gerade noch gestattete Winkeldivergenz α . Vor der Kollimation wird für die Geschwindigkeiten der Rubidiumatome die durch T bestimmten Maxwell-Boltzmann-Verteilung angenommen. Die Kollimation filtert dann aus dieser isotropen Verteilung die Geschwindigkeiten heraus, deren Richtung mit der Kollimationsachse einen Winkel von weniger als α bilden. Für α ergibt sich aus der Geometrie der Kollimationsanordnung $\alpha \leq 5 \text{ mrad}$. Die Beträge der Geschwindigkeiten haben die Dichtefunktion

$$f(V) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} V^2 \exp\left(-\frac{MV^2}{2kT}\right) \quad (3.66)$$

wobei M die atomare Masse und k die Boltzmann-Konstante ist. Für Mittelwert $\langle V \rangle$ und Varianz ΔV der Geschwindigkeit ergibt sich dann:

$$\langle V \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{M}} \quad (3.67)$$

$$\Delta V = \sqrt{\langle (V - \langle V \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \frac{kT}{M}} = \sqrt{\frac{3}{8}\pi - 1} \langle V \rangle \quad (3.68)$$

Im Experiment wird das Rubidiumisotop ^{85}Rb verwendet, und die Ofentemperatur beträgt ungefähr 440 K. Dementsprechend ergibt sich:

$$\langle V \rangle \sim 330 \text{ m/s} \quad (3.69)$$

$$\Delta V \sim 140 \text{ m/s} \quad (3.70)$$

3.4.2 Zeitunabhängige Wechselwirkungen

Für die folgenden Abschätzungen erweist es sich als günstig, ein rechtshändiges Koordinatensystem zu wählen, in dem $\mathbf{E}_{0,L}$ in Richtung der y -Achse und $\mathbf{B}_{0,L}$ in Richtung der z -Achse weist. Polar- und Azimutalwinkel bezüglich dieses Koordinatensystems werden mit ϑ bzw. χ bezeichnet (siehe Abbildung 3.1).

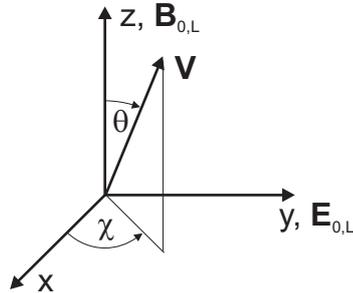


Abbildung 3.1: Einführung kartesischer und polarer Koordinaten im Laborsystem.

\mathbf{V} besitzt eine Darstellung der Gestalt

$$\mathbf{V} = V \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \chi \\ \sin \vartheta \sin \chi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Um die Bedeutung einer Wechselwirkung und den Einfluß einer nichtverschwindenden Schwerpunktgeschwindigkeit \mathbf{V} einzuschätzen, wird der entsprechende Wechselwirkungsterm zunächst in nichtrelativistischer Näherung bis zur ersten Ordnung in \mathbf{V}/c angegeben. Dann werden nullte und erste Ordnung dem Betrag nach abgeschätzt, um einen Ausdruck zu erhalten, der die dynamischen Größen \mathbf{r} , \mathbf{p} und $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ nur noch in Form ihrer Beträge enthält. Dies gelingt mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Nach dem Bohrschen Atommodell gilt

auf der n -ten Bohrschen Bahn:

$$\frac{r}{r_B} = n^2 \quad (3.72)$$

$$\frac{p}{p_B} = n^{-1} \quad (3.73)$$

$$\frac{l}{l_B} = n \quad (3.74)$$

$$\frac{\mathcal{E}}{Ry} = n^{-2} \quad (3.75)$$

Werden dem Energiebereich $I_{\mathcal{E}}$ mit (3.75) Bohrsche Bahnen zugeordnet, so ergibt sich $n \sim 43 \dots 49$. Bei den Messungen ist $n \sim 44$. Wird dieser Wert zugrundegelegt, so können mit (3.72), (3.73) und (3.74) r , p und l abgeschätzt werden. Dabei werden die folgenden Vereinbarungen vorausgesetzt:

1. Ein hochgestellter Strich „ \prime “ ordnet wieder einer physikalischen Größe ihren zahlenmäßigen Wert bezüglich der natürlichen Einheiten des Wasserstoffatoms zu (siehe Tabelle 3.1.5).
2. Das Zeichen „ \doteq “ bedeutet, daß linke und rechte Seite in erster Ordnung in \mathbf{V}/c gleich sind.
3. Bei Feldparametern, die sich auf das Laborsystem beziehen, wird das tiefgestellte „ L “ weggelassen.

Statische homogene Felder

Für die statischen homogenen Felder gilt nach (3.22) und (3.23)

$$\mathbf{E}'_{0,\Sigma} \doteq \mathbf{E}'_0 + \frac{1}{\alpha} \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}'_0 \quad (3.76)$$

$$\mathbf{B}'_{0,\Sigma} \doteq \mathbf{B}'_0 - \alpha \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}'_0 \quad (3.77)$$

Daraus folgt für die relativen Feldänderungen infolge der nichtverschwindenden Schwerpunktsgeschwindigkeit:

$$\frac{|\mathbf{E}'_{0,\Sigma} - \mathbf{E}'_{0,L}|}{E'_{0,L}} \doteq \frac{1}{\alpha} \frac{V}{c} \frac{B'_{0,L}}{E'_{0,L}} \sin \vartheta \quad (3.78)$$

$$\lesssim 3 \cdot 10^{-2} \sin \vartheta \quad (3.79)$$

$$\frac{|\mathbf{B}'_{0,\Sigma} - \mathbf{B}'_{0,L}|}{B'_{0,L}} \doteq \alpha \frac{V}{c} \frac{E'_{0,L}}{B'_{0,L}} \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \chi} \quad (3.80)$$

$$\lesssim 8 \cdot 10^{-11} \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \chi} \quad (3.81)$$

Stark- und Zeeman-Effekt

1. Stark-Effekt

$$e\mathbf{E}_{0,\Sigma} \cdot \mathbf{r} = 2\mathbf{E}'_{0,\Sigma} \cdot \mathbf{r}'_{Ry} \doteq \left\{ 2\mathbf{E}'_0 + \frac{2}{\alpha} \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}'_0 \right\} \cdot \mathbf{r}'_{Ry} \quad (3.82)$$

Größenordnungen:

$$2 |\mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{r}'| \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{ Ry} \quad (3.83)$$

$$\frac{2}{\alpha} \left| \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}'_0 \right) \cdot \mathbf{r}' \right| \lesssim 5 \cdot 10^{-6} \sin \vartheta \text{ Ry} \quad (3.84)$$

2. Paramagnetischer Zeeman-Effekt

$$\frac{e}{2m_e c} \mathbf{B}_{0,\Sigma} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{B}'_{0,\Sigma} \cdot \mathbf{l}' \text{ Ry} \doteq \left\{ \mathbf{B}'_0 - \alpha \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}'_0 \right\} \cdot \mathbf{l}' \text{ Ry} \quad (3.85)$$

Größenordnungen:

$$|\mathbf{B}'_0 \cdot \mathbf{l}'| \sim 2 \dots 4 \cdot 10^{-4} \text{ Ry} \quad (3.86)$$

$$\alpha \left| \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}'_0 \right) \cdot \mathbf{l}' \right| \sim 2 \cdot 10^{-14} \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \chi} \text{ Ry} \quad (3.87)$$

3. Diamagnetischer Zeeman-Effekt

$$\begin{aligned} & \frac{e^2}{8m_e c^2} |\mathbf{B}_{0,\Sigma} \times \mathbf{r}|^2 = \frac{1}{4} |\mathbf{B}'_{0,\Sigma} \times \mathbf{r}'|^2 \text{ Ry} \\ & \sim \frac{1}{4} |\mathbf{B}'_0 \times \mathbf{r}'|^2 \text{ Ry} + \frac{\alpha}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}'_0 \right) \cdot \mathbf{r}' \right] (\mathbf{B}'_0 \cdot \mathbf{r}') \right. \\ & \quad \left. - \left[\left(\frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}'_0 \right) \cdot \mathbf{B}'_0 \right] r'^2 \right\} \text{ Ry} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Größenordnungen:

$$\frac{1}{4} |\mathbf{B}'_0 \times \mathbf{r}'|^2 \sim 2 \dots 7 \cdot 10^{-5} \text{ Ry} \quad (3.89)$$

$$\frac{\alpha}{2} |\{\dots\}| \lesssim 6 \cdot 10^{-15} \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \chi} \text{ Ry} \quad (3.90)$$

Die absoluten Wechselwirkungsenergien der drei durch die statischen äußeren Felder verursachten Effekte liegen in derselben Größenordnung. Besonders gut wird die Übereinstimmung für den größten hier betrachteten Wert der magnetischen Induktion von 2 T. Bei Abwesenheit dieser Felder ergibt sich eine Bindungsenergie des Elektrons von $\sim 5 \cdot 10^{-4} \text{ Ry}$. Also wieder ein Wert derselben Größenordnung. Damit spielen für die Bewegung des Elektrons vier unterschiedliche Effekte gleich wichtige Rollen: Kernanziehung, Stark-Effekt, paramagnetischer Zeeman-Effekt, diamagnetischer Zeeman-Effekt. Unter diesen Umständen ist eine sehr verwickelte (d. h. chaotische) Dynamik keine Überraschung mehr.

Unter den Korrekturen infolge nichtverschwindender Schwerpunktschwindigkeit überwiegt bei weitem der bewegungsvermittelte Stark-Effekt. Wegen $5 \cdot 10^{-6} \sin \vartheta \text{ Ry} \sim 0,5 \sin \vartheta \text{ cm}^{-1}$ wird der Atomstrahl kollinear zur magnetischen Induktion ausgerichtet und möglichst gut kollimiert ($\sin \vartheta \rightarrow 0$):

$$\boxed{\mathbf{V} \parallel \mathbf{B}_0} \quad (3.91)$$

Die im Experiment benutzte Kollimationsanordnung läßt einen Winkelfehler von $\pm 5 \text{ mrad}$ zu. Dem entspricht bei fehlerloser Ausrichtung des Atomstrahls

ein bewegungsvermittelter Stark-Effekt mit einer Größenordnung von ± 30 MHz. Tatsächlich ist mit einem noch kleineren Einfluß zu rechnen, da die Bohrung, durch die die Atome aus dem Ofen austreten, einen Durchmesser von der Größenordnung der Kollimationsblenden hat, und nur solche Atome eine Rolle spielen, die den Fokussen der Laser hinreichend nahe kommen. Ofenbohrung und Strahltaile wirken dann wie weitere Kollimationsblenden.

3.4.3 Zeitabhängige Wechselwirkungen

Die zeitabhängigen Terme erfordern eine besondere Behandlung. Linearer Laser-Term und Kreuzterm haben die Form

$$\frac{1}{2i} V_{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \left(e^{-i\mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} + i\varphi_{\Sigma}} e^{i\omega_{\Sigma} t} - e^{+i\mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} - i\varphi_{\Sigma}} e^{-i\omega_{\Sigma} t} \right) \quad (3.92)$$

Auch der quadratische Laser-Term ist wegen $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ bis auf eine Konstante von dieser Gestalt, wenn ω_{Σ} , \mathbf{k}_{Σ} und ϕ_{Σ} mit zwei multipliziert werden. Der Einfluß eines Produktes aus einem zeitlich harmonischen Faktor $\exp(\pm i\omega_{\Sigma} t)$ und einem operatorwertigen Koeffizienten \hat{V} läßt sich mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie wie folgt veranschaulichen: Der Koeffizient ist eine Kopplungsmatrix, die jede zwei Energieeigenzuständen $|E_1\rangle$, $|E_2\rangle$ des ungestörten (zeitunabhängigen) Hamilton-Operators eine Kopplungsamplitude $V(E_1, E_2) = \langle E_2 | \hat{V} | E_1 \rangle$ zuordnet. In erster Ordnung der Störungstheorie erwirkt der zeitlich harmonische Faktor, daß Zustände nur dann bevölkert werden, wenn sie eine Energie haben, die um $\mp \hbar\omega_{\Sigma}$ höher ist als die Energie E_0 des Ausgangszustandes. Die Übergangsamplitude in die Zustände mit $E = E_0 \mp \hbar\omega_{\Sigma}$, hängt linear von der Kopplungsamplitude $V(E_0, E_0 \pm \hbar\omega_{\Sigma})$ und Größen ab, die durch die Struktur des Energiespektrums des ungestörten (zeitunabhängigen) Hamilton-Operators in der Nähe von E_0 und $E_0 \pm \hbar\omega_{\Sigma}$ bestimmt werden.⁶ Da die Struktur des Energiespektrums im vorliegenden Falle nicht bekannt ist, sind Abschätzungen von absoluten Übergangswahrscheinlichkeiten nicht möglich. Eine Abschätzung der Beträge der Kopplungsamplituden der verschiedenen Laser-Terme gestattet aber eine Einschätzung, wie wichtig die unterschiedlichen Beiträge sind.

Doppler-Effekt

Nach den vorangegangenen Ausführungen spielt der Doppler-Effekt der Kreisfrequenz ω_{Σ} eine wichtige Rolle. In erster Ordnung in \mathbf{V}/c gilt:

$$\omega_{\Sigma} \doteq \omega \left\{ 1 - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}}{c} \right\} \quad (3.93)$$

Ist ϑ der Polarwinkel von \mathbf{k} (In Abbildung 3.1 übernimmt nun \mathbf{V} die Rolle von $\mathbf{B}_{0,L}$ und \mathbf{k} die von \mathbf{V}), so folgt für Mittelwert und Varianz der Fre-

⁶Die hier gemachten Aussagen sind im wesentlichen der Inhalt Fermis zweiter goldener Regel. Sie werden in Kapitel 4 gerechtfertigt. Dort wird mit Bezug auf Atomstrahlexperimente eine verallgemeinerte Fassung von Fermis zweiter goldener Regel abgeleitet, die die Unklarheiten in Zusammenhang mit der Begriffsbildung der „Zustandsdichte“ vollkommen beseitigt.

quenzänderung infolge der nichtverschwindenden Schwerpunktsgeschwindigkeit:

$$\langle \nu_{\Sigma} - \nu_L \rangle = \frac{\langle V \rangle}{c} \nu_L \cos \vartheta \quad (3.94)$$

$$\Delta(\nu_{\Sigma} - \nu_L) = \frac{\Delta V}{c} \nu_L \cos \vartheta \quad (3.95)$$

Damit ergibt sich für den Dioden-Laser

$$\left\langle \nu_{\Sigma} - \frac{c}{780 \text{ nm}} \right\rangle \sim 0,42 \text{ GHz} \cos \vartheta \quad (3.96)$$

$$\Delta \left(\nu_{\Sigma} - \frac{c}{780 \text{ nm}} \right) \sim 0,18 \text{ GHz} |\cos \vartheta| \quad (3.97)$$

und für den Farbstoff-Laser

$$\left\langle \nu_{\Sigma} - \frac{c}{480 \text{ nm}} \right\rangle \sim 0,69 \text{ GHz} \cos \vartheta \quad (3.98)$$

$$\Delta \left(\nu_{\Sigma} - \frac{c}{480 \text{ nm}} \right) \sim 0,29 \text{ GHz} |\cos \vartheta| \quad (3.99)$$

Der Vergleich der Koeffizienten von $\cos \vartheta$ mit den Linienbreiten der Laser (Dioden-Laser ~ 1 MHz, Farbstoff-Laser $\sim 0,5$ MHz) zeigt, daß im Experiment $\cos \vartheta \rightarrow 0$ angestrebt werden muß:

$$\boxed{\mathbf{k} \perp \mathbf{V}} \quad (3.100)$$

Dazu werden Blenden benutzt, die fest mit der Atomstrahlkollimationseinheit verbunden sind. Dies gewährleistet eine bestmögliche Ausrichtung der Laser-Strahlen.

Kopplungsamplituden

Die Kopplungsamplituden enthalten die Faktoren $\exp(\mp i \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r})$. Diese sind dem Betrag nach Eins, und nach der Formel für die relativistische Aberration (3.27) gilt:

$$\mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} \doteq 2\pi \frac{r_B}{\lambda} \left\{ \frac{\mathbf{k}}{k} - \frac{\mathbf{V}}{c} \right\} \cdot \mathbf{r}' \quad (3.101)$$

Dabei ist

$$r_B/\lambda \sim 10^{-4} \quad \text{für optische Wellenlängen} \quad (3.102)$$

Die relativistische Korrektur

$$e^{\mp i \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r}} - e^{\mp i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \doteq \pm 2\pi i \frac{r_B}{\lambda} \exp \left(\mp i 2\pi \frac{r_B}{\lambda} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \mathbf{r}' \right) \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{r}' \right) \quad (3.103)$$

wird daher vernachlässigt.

Der weder zeitlich noch räumlich veränderliche Bestandteil φ_{Σ} der Phase der monochromatischen ebenen Welle hängt nicht von der Schwerpunktsgeschwindigkeit ab. Wie sich herausstellen wird, spielt er im hier wesentlichen Grenzfall unendlich langer Wechselwirkungszeit zwischen Atom und Welle keine Rolle (siehe Kapitel 4).

Daher werden die Kopplungsamplituden durch die Ausdrücke $V_{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ bestimmt. Um deren nichtrelativistische Näherung bis zur ersten Ordnung in \mathbf{V}/c

zu bestimmen, ist es hilfreich, zuerst die entsprechenden Näherungen von $\hat{\mathbf{E}}_{\Sigma}$ und λ_{Σ} sowie von deren Produkt anzugeben. Aus (3.22), (3.24) und (3.26) ergibt sich:

$$\hat{\mathbf{E}}_{\Sigma} \doteq \hat{\mathbf{E}} + \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \hat{\mathbf{E}} \right) \frac{\mathbf{k}}{k} - \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \hat{\mathbf{E}} \quad (3.104)$$

$$\lambda_{\Sigma} \doteq \lambda \left(1 + \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \quad (3.105)$$

$$\lambda_{\Sigma} \hat{\mathbf{E}}_{\Sigma} \doteq \lambda \left\{ \hat{\mathbf{E}} + \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \hat{\mathbf{E}} \right) \frac{\mathbf{k}}{k} \right\} \quad (3.106)$$

Nun werden die Kopplungsamplituden behandelt.

1. Linearer Laser-Term

$$\begin{aligned} & -\frac{e}{m_e \omega_{\Sigma}} \hat{\mathbf{E}}_{\Sigma} \cdot \mathbf{p} \sin(\omega_{\Sigma} t - \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\Sigma}) \\ = & -\frac{\alpha \lambda_{\Sigma}}{\pi r_B} \hat{\mathbf{E}}'_{\Sigma} \cdot \mathbf{p}' \sin(\omega_{\Sigma} t - \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\Sigma}) \text{ Ry} \end{aligned} \quad (3.107)$$

mit

$$-\frac{\alpha \lambda_{\Sigma}}{\pi r_B} \hat{\mathbf{E}}'_{\Sigma} \cdot \mathbf{p}' \doteq -\frac{\alpha \lambda}{\pi r_B} \left\{ \hat{\mathbf{E}}' + \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \hat{\mathbf{E}}' \right) \frac{\mathbf{k}}{k} \right\} \cdot \mathbf{p}' \text{ Ry} \quad (3.108)$$

2. Kreuzterm

$$\begin{aligned} & -\frac{e^2}{2m_e c \omega_{\Sigma}} (\mathbf{B}_{0,\Sigma} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\Sigma} \sin(\omega_{\Sigma} t - \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\Sigma}) \\ = & -\frac{\alpha \lambda_{\Sigma}}{2\pi r_B} (\mathbf{B}'_{0,\Sigma} \times \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{E}}'_{\Sigma} \sin(\omega_{\Sigma} t - \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\Sigma}) \text{ Ry} \end{aligned} \quad (3.109)$$

mit

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha \lambda_{\Sigma}}{2\pi r_B} (\mathbf{B}'_{0,\Sigma} \times \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{E}}'_{\Sigma} \doteq \frac{\alpha \lambda}{2\pi r_B} \left\{ \mathbf{B}'_0 \times \hat{\mathbf{E}}' \right. \\ & \left. - \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \hat{\mathbf{E}}' \right) \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{B}'_0 - \alpha \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}'_0 \right) \times \hat{\mathbf{E}}' \right\} \cdot \mathbf{r}' \text{ Ry} \end{aligned} \quad (3.110)$$

3. Quadratischer Laser-Term

$$\begin{aligned} & \frac{e^2}{2m_e \omega_{\Sigma}^2} \hat{E}_{\Sigma}^2 \sin^2(\omega_{\Sigma} t - \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\Sigma}) \\ = & 2E_{pm} \sin^2(\omega_{\Sigma} t - \mathbf{k}_{\Sigma} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\Sigma}) \end{aligned} \quad (3.111)$$

Dabei ist

$$E_{pm} = \frac{e^2 \hat{E}_{\Sigma}^2}{4m_e \omega_{\Sigma}^2} = \frac{\alpha^2}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda_{\Sigma}}{r_B} \right)^2 \hat{E}'_{\Sigma}{}^2 \text{ Ry} \doteq \frac{\alpha^2}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda}{r_B} \right)^2 \hat{E}'^2 \text{ Ry} \quad (3.112)$$

die ponderomotive Energie des Elektrons in der hier herrschenden ebenen Welle.

Beim linearen Laser-Term und beim Kreuzterm sind nullte und erste Ordnung von der Form $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ wobei \mathbf{A} konstanter Vektor und $\hat{\mathbf{x}}$ Vektoroperator mit selbst-adjungierten Komponenten ist. Der Betrag der Kopplungsamplitude läßt sich dann folgendermaßen nach oben abschätzen:

$$|\langle E_2 | \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} | E_1 \rangle| \leq |\mathbf{A}| |\langle E_2 | \hat{\mathbf{x}} | E_1 \rangle| = |\mathbf{A}| \sqrt{\sum_{n=1}^3 |\langle E_2 | \hat{x}_k | E_1 \rangle|^2} \quad (3.113)$$

Dabei ist für $k \in \{1, 2, 3\}$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$|\langle E_2 | \hat{x}_k | E_1 \rangle|^2 \leq \begin{cases} \langle E_1 | \hat{x}_k^2 | E_1 \rangle \\ \langle E_2 | \hat{x}_k^2 | E_2 \rangle \end{cases} \quad (3.114)$$

Also:

$$|\langle E_2 | \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} | E_1 \rangle| \leq |\mathbf{A}| \min \left\{ \sqrt{\langle E_1 | \hat{\mathbf{x}}^2 | E_1 \rangle}, \sqrt{\langle E_2 | \hat{\mathbf{x}}^2 | E_2 \rangle} \right\} \quad (3.115)$$

Werden E_1, E_2 gemäß (3.75) Bohrsche Bahnen mit Nummern n_1, n_2 zugeordnet, so folgt mit (3.73), (3.72):

$$|\langle E_2 | \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}}' | E_1 \rangle| \leq |\mathbf{A}| \min \{n_1^2, n_2^2\} \quad (3.116)$$

$$|\langle E_2 | \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}}' | E_1 \rangle| \leq |\mathbf{A}| \min \left\{ \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \right\} \quad (3.117)$$

Für den Dioden-Laser ist dann $n_2 \sim n_1 = 5$ und für den Farbstoff-Laser $n_1 \sim 5, n_2 \sim 44$. Ist ϑ der Polarwinkel der Laser-Polarisation (Geometrie wie in Abbildung 3.1), so ergeben sich die folgenden Abschätzungen für die Beträge der Kopplungsamplituden:

Term	Ordnung		Dioden-Laser [Ry]	Farbstoff-Laser [Ry]
linearer	0	\sim	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$
Laser-Term	1	\lesssim	$2 \cos \vartheta \cdot 10^{-14}$	$3 \cos \vartheta \cdot 10^{-14}$
Kreuz-	0	\sim	$7 \sin \vartheta \cdot 10^{-12}$	$9 \sin \vartheta \cdot 10^{-11}$
Term	1	\lesssim	$8 \cdot 10^{-18}$	$1 \cdot 10^{-16}$
quadratischer	0	\sim	$6 \cdot 10^{-16}$	$8 \cdot 10^{-14}$
Laser-Term	1		–	–

Tabelle 3.2: Die Größenordnungen der Kopplungsamplituden. Nullte und erste Ordnung in \mathbf{V}/c sind getrennt ausgewertet.

Nach Tabelle 3.2 überwiegt der lineare Laser-Term nullter Ordnung. Mit Ausnahme des Kreuzterms nullter Ordnung liegen die übrigen Beiträge um

fünf oder mehr Größenordnungen darunter. Sie werden daher im folgenden vernachlässigt. Der Kreuzterm scheint in der Literatur bisher nicht betrachtet worden zu sein. Sein Beitrag liegt zwei bis drei Größenordnungen unter dem linearen Laser-Term nullter Ordnung. Die Tatsache, daß hier nur grobe Abschätzungen vorgenommen wurden rechtfertigt daher eine genauere Betrachtung.

Überlegungen zum Kreuzterm

Der Einfluß des Kreuzterms auf das optische Pumpen mit Hilfe des Dioden-Lasers kann vernachlässigt werden. Dies liegt daran, daß die beteiligten Zustände energetisch niedrig liegen ($n \sim 5$) und daher in sehr guter Näherung als stationäre Zustände der Hyperfeinstruktur beschrieben werden können. In dieser Näherung führt die statische magnetische Induktion \mathbf{B}_0 , die den Kreuzterm mitverursacht, zur Aufhebung der Entartung dieser Zustände. Deswegen hat der Kreuzterm höchsten einen Einfluß auf die Effizienz des Pumpvorgangs, da es nur einen nichtentarteten Zustand gibt, dessen Kopplung an den Grundzustand energetische gestattet ist. Darüber hinaus bleiben die statischen äußere Felder während der Aufzeichnung eines experimentellen Spektrums konstant und die Parameter des Dioden-Laser-Lichtes unverändert. Folglich führt eine mögliche Effizienzänderung des Pumpvorgangs lediglich zu einem multiplikativen Faktor in der Anregungsfunktion. Solche Faktoren sind für den Nachweis von Ericson-Fluktuationen unerheblich.

Bei der Laser-Anregung mit dem Farbstoff-Laser sind die Verhältnisse sehr viel unübersichtlicher. Die Anregung führt in Kontinuum. Darüber hinaus wird die Frequenz des Farbstoff-Lasers während des Aufzeichnung eines experimentellen Spektrums geändert. Es scheint daher das sinnvollste zu sein, die Polarisation des Farbstoff-Lasers kollinear zu magnetischer Induktion und Atomstrahlrichtung zu wählen. Dies entspricht $\sin \vartheta \rightarrow 0$ und damit einer Unterdrückung des Kreuzterms für die Farbstoff-Laser-Anregung.

$$\boxed{\hat{\mathbf{E}} \parallel \mathbf{B}_0} \quad (3.118)$$

Abschließende Bemerkungen zur Geometrie des Experimentes

Gibt die Richtung der magnetische Induktion die Quantisierungsachse für die Beschreibung der Hyperfeinstruktur vor, so lautet der optisch gepumpte Übergang

$$|^{85}\text{Rb}; n = 5; l = 0; m_f = -3\rangle \longrightarrow |^{85}\text{Rb}; n = 5; l = 1; m_f = -4\rangle \quad (3.119)$$

Aufgrund der Auswahlregeln für die Laser-Anregung, kann dieser Übergang nicht mit Licht gepumpt werden, das kollinear zur Quantisierungsachse polarisiert ist. Soll der Wellenvektor senkrecht zum Atomstrahl (=Quantisierungsachse) sein, bleibt also nur eine lineare Polarisation senkrecht zur Quantisierungsachse. Nach den Ausführungen im vorangegangenen Unterabschnitt führt diese Wahl zu keinen Beeinträchtigungen durch den Kreuzterm.

Die Geometrie der Elektroden-Anordnung gestattet nur, daß der Wellenvektor des Dioden-Lasers kollinear zur x -Achse gewählt wird. Dies hat darüber hinaus den Vorteil, daß bei verschwindender magnetischer Induktion Stark-Spektren aufgenommen werden können, bei denen bestimmte Linien durch Aus-

wahregeln unterdrückt werden. Schließlich wird der Wellenvektor des Farbstoff-Lasers antiparallel zu dem des Dioden-Lasers gewählt. Dadurch wird bei der Spektroskopie von (quasi-)gebundenen Zuständen der Doppler-Effekt zusätzlich unterdrückt („Bennet-Löcher“). Damit ist die gesamte Geometrie des Experimentes festgelegt. Eine bildliche Darstellung liefert Abbildung 3.2.

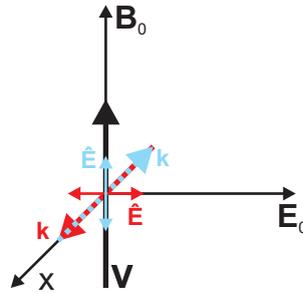


Abbildung 3.2: Die im Labor umgesetzte Geometrie des Experimentes: Die zum Dioden-Laser (Farbstoff-Laser) gehörenden Größen sind rot (blau) eingefärbt.

Diese Geometrie vermindert den Einfluß der nichtverschwindenden Schwerpunktsgeschwindigkeit soweit, daß seine Vernachlässigung in der theoretischen Beschreibung gerechtfertigt ist. Damit wird die experimentelle Beobachtung der fundamentalen Eigenschaften der Wechselwirkung eines ruhenden Atoms mit statischen homogenen Feldern und monochromatischem Laser-Licht möglich. Dies spiegelt sich darin wider, daß der um die vernachlässigten Terme gekürzte Hamilton-Operator für ein Atom im Atomstrahl die Schwerpunktsgeschwindigkeit des Atoms nicht mehr enthält. Der Hamilton-Operator ergibt sich durch kanonische Quantisierung der klassischen Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \mathcal{V}_{t, \mathbf{R}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (3.120)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = & \frac{1}{2m_e} \mathbf{p}^2 - e\phi_K(r) + e\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \\ & + \frac{e}{2m_e c} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{l} + \frac{e^2}{8m_e c^2} |\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}|^2 \end{aligned} \quad (3.121)$$

die Hamilton-Funktion für das betrachtete Rubidiumisotop (^{85}Rb oder ^{87}Rb) in gekreuzten statischen homogenen elektrischen und magnetischen Feldern und

$$\mathcal{V}_{t, \mathbf{R}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{e}{m_e \omega} [\sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\mathbf{R}_0})] \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{p} \quad (3.122)$$

beschreibt die Atom-Laser-Wechselwirkung in der für das Experiment gewählten Geometrie.

3.5 Abweichung der Laser-Mode von einer ebenen Welle

In einem wesentlichen Punkt muß der Hamilton-Operator noch an die experimentellen Verhältnisse angepaßt werden: In der Beschreibung der Atom-Laser-

Wechselwirkung gemäß (3.122) wird als Laser-Mode eine den gesamten Raum erfüllende ebene Welle angenommen. Tatsächlich handelt es sich im Experiment um eine fokussierte fundamentale Gauß-Mode, die vom Atom transversal, d. h. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Mode, durchquert wird.

Die Längenskala auf der sich die Feldstärkeamplitude ändert, ist der Radius der Strahltaile, also von der Größenordnung 10^{-4} m. Mit der mittleren Schwerpunktseschwindigkeit der Atome läßt sich dies auf eine Zeitskala umrechnen, auf der sich die Feldstärkeamplituden im Schwerpunktsystem ändern. Das Ergebnis liegt mit etwa $3 \cdot 10^{-7}$ s um etwa sieben Größenordnungen über der Periode der Laser-Lichtes und etwa zehn Größenordnungen über der atomaren Zeiteinheit. Ferner ist die Skala für Divergenz, Krümmung der Wellenfront und Gouy-Phase in der Nähe des Fokus die Rayleigh-Länge x_R , die durch Radius des Strahltaile w_0 und Wellenlänge λ gemäß $x_R = \pi w_0^2 / \lambda$ definiert wird. Die Rayleigh-Länge kann daher als groß gegen die Ausdehnung des Atomstrahls angenommen werden. Bei Vernachlässigung der mit der Rayleigh-Länge skalierenden Eigenschaften wird die fundamentale Gauß-Mode zylindrisch, d. h. ihre transversale Feldstärkeverteilung hängt nicht mehr von der longitudinalen Entfernung vom Fokus ab. Zur Beschreibung der Wechselwirkung mit einer fundamentalen Gauß-Mode in der Nähe des Fokus, wird daher einfach $\mathcal{V}_{t, \mathbf{R}_0}$ mit einer von der Zeit und den Parametern Σ der Schwerpunktsbewegung des Atoms abhängigen reellwertigen Funktion f_Σ multipliziert, die das Ansteigen und Abfallen der Feldstärkeamplitude im Schwerpunktsystem beschreibt. Dies entspricht der Verwendung eines Vektorpotentials, bei dem gegenüber (3.33) der die ebene Welle erzeugende Summand mit f_Σ multipliziert wird. Die aus diesem abgeänderten Summanden berechneten Felder sind bis auf den zusätzlichen elektrischen Term die mit f_Σ multiplizierten ursprünglichen Felder. Das zusätzliche Feld hat die Amplitude $(\dot{f}_\Sigma / \omega) \hat{\mathbf{E}}$ und kann nach den vorangegangenen Betrachtungen vernachlässigt werden. Daher beschreibt das abgeänderte Vektorpotential die tatsächlichen Verhältnisse in sehr guter Näherung. Für ein Atom im Atomstrahl, dessen Schwerpunktsbewegung durch die Parameter Σ gegeben ist, ergibt sich der Hamilton-Operator für die Beschreibung der elektronischen Freiheitsgrade durch kanonische Quantisierung der klassischen Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \mathcal{A}_{t, \Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (3.123)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{t, \Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= f_\Sigma(t) \mathcal{V}_{t, \mathbf{R}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ &= -\frac{e}{m_e \omega} f_\Sigma(t) [\sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\mathbf{R}_0})] \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad (3.124)$$

Für eine fundamentale Gauß-Mode soll nun noch f_Σ angegeben werden. Dazu wird von der Geometrie des Experimentes ausgegangen. Der Gauß-Strahl breitet sich also entlang der x -Achse aus und der Atomstrahl ist symmetrisch zur z -Achse. Im Rahmen der eben beschriebenen Näherungen gilt also für die Amplitudenverteilung:

$$\hat{\mathbf{E}}(x, y, z) = \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{w_0^2}\right) \hat{\mathbf{E}} \quad (3.125)$$

Die Bewegung des Schwerpunktes ist nach (3.15) durch die Parameter $\Sigma =$

$(\mathbf{V}, \mathbf{R}_0)$ festgelegt und durch

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 + Vt \end{pmatrix} \quad (3.126)$$

gegeben. Einsetzen von (3.126) in (3.125) ergibt f_{Σ} :

$$f_{\Sigma}(t) = \exp\left(-\frac{Y_0^2}{w_0^2}\right) \exp\left[-\frac{V^2}{w_0^2} \left(t + \frac{Z_0}{V}\right)^2\right] \quad (3.127)$$

Kapitel 4

Spektroskopie an Atomstrahlen

Der Begriff der Ericson-Fluktuation bezieht sich auf Anregungsfunktionen quantenmechanischer Streuvorgänge (siehe 2.2). Bevor von Ericson-Fluktuationen in Photoabsorptionsspektren gesprochen werden kann, muß also folgendes gezeigt werden:

1. Die Photoabsorption ist ein quantenmechanischer Streuvorgang.
2. Photoabsorptionsspektren liefern bis auf eine Proportionalitätskonstante die von der Photonenenergie abhängige Anregungsfunktion $\sigma(\hbar\omega)$ dieses Streuvorgangs.
3. Die Anregungsfunktion $\sigma(\hbar\omega)$ besitzt eine Darstellung, die als Grundlage für die Beschreibung der Photoabsorption durch Resonanzen dienen kann.
4. Die Beschreibung der Photoabsorption durch Resonanzen führt zu einer Darstellung der Anregungsfunktion, auf die Ericsons Überlegungen anwendbar sind.

Damit sind die Ziele dieses Kapitels klar benannt.

4.1 Atomstrahlexperimente als Streuvorgänge

Anschaulich ist die Photoabsorption die Kollision eines als Teilchen aufgefaßten Photons mit einem atomaren Elektron, wobei das Photon mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit als Teilchen vernichtet wird, um als Energiequant in die Bewegung des Elektrons überzugehen. In diesem Sinne sind die Photoabsorption und die in Kapitel 2 beschriebene Neutronenstreuung sehr ähnlich. Das Photon übernimmt die Rolle des Neutrons und das atomare Elektron die des Kerns. Die (u. U. autoionisierenden) Anregungszustände des Elektrons entsprechen den Zuständen des Compound-Kernes. Eine auf dieser Vorstellung aufbauende Beschreibung der Photoabsorption ist allerdings mit folgenden Schwierigkeiten verbunden:

1. Die Beschreibung des Photons als Teilchen, das vernichtet werden kann, erfordert eine Quantisierung des Strahlungsfeldes.

2. Zusätzlich zum stets offenen elastische Kanal $\nu + {}^{85}\text{Rb} \rightarrow {}^{85}\text{Rb} + \nu$, in dem sich z. B. die Beschreibung der Resonanzfluoreszenz abspielen würde, öffnet die mögliche Ionisation angeregter Elektronenzustände einen zusätzlichen Kanal $\nu + {}^{85}\text{Rb} \rightarrow {}^{85}\text{Rb}^* \rightarrow {}^{85}\text{Rb}^+ + e$. Damit ist eine Mehrkanalstreutheorie notwendig.

Eine befriedigende Behandlung im Sinne einer asymptotisch vollständigen Streutheorie ist unter diesen Umständen schwierig. Die oben gesetzten Ziele lassen sich einfacher im Rahmen einer anderen Beschreibung erreichen, die im folgenden näher erläutert wird.

Die theoretische Beschreibung von Atomstrahlexperimenten läßt sich auf sehr natürliche Weise streutheoretisch deuten, wenn die Atome als Geschosse betrachtet werden, die auf ihrem Weg durch die Apparatur klassischen Feldern ausgesetzt werden. Die räumliche Verteilung der Stärke dieser Felder ist durch den Aufbau bestimmt und kann auf vielfältige Weise vermittelt werden (z. B. durch Laser-Strahlen, Mikrowellen- oder Feldionisationszonen). Wenn die Schwerpunktsbewegung klassisch beschrieben und als gradlinig und gleichförmig angenommen werden kann, dann entspricht der räumlichen Verteilung der Feldstärke im Laborsystem einer zeitlichen Verteilung im Schwerpunktssystem. Im Schwerpunktssystem kann die Wechselwirkung dann durch ein zeitabhängiges Potential¹ beschrieben werden. In diesem Sinne wird das Atom bzw. seine wechselwirkungsfreie Dynamik an zeitabhängigen Potentialen gestreut. Die Statistik der Messungen nach der Wechselwirkungszone ist damit auf natürliche Weise Gegenstand der Streutheorie. Anhang C enthält die mathematische Entwicklung der Streutheorie mit zeitabhängigen Potentialen. Unter geeigneten Voraussetzungen wird nicht nur eine Darstellung des S -Operators erarbeitet, sondern sogar die physikalisch geforderte asymptotische Vollständigkeit bewiesen. Dieses Ergebnis scheint neu zu sein.

Diese streutheoretische Beschreibung von Atomstrahlexperimenten soll nun am Beispiel hier wesentlichen Photoabsorption ausführlich erläutert werden. Dabei wird sich die Darstellung des S -Operators als Störungsreihe (siehe C.4.1) als sehr hilfreich erweisen. Durch Abbruch nach dem linearen Term ergibt sich eine Verallgemeinerung der für numerische Berechnungen sehr wichtigen Formel von Rescigno-McKoy. Die ursprüngliche Formel von Rescigno-McKoy ist eine Darstellung der Anregungsfunktion für die Photoabsorption bei möglicher Anwesenheit eines statischen elektrischen Feldes [RM75]. Sie kann daher nicht ohne weiteres für die Beschreibung des Experiments benutzt werden. Am Ende dieses Kapitels wird gezeigt, daß die Formel auch bei Gegenwart einer zusätzlichen statischen magnetischen Induktion gültig bleibt. Dieses Ergebnis scheint ebenfalls neu zu sein. Es eröffnet nicht nur neue Möglichkeiten bei der numerischen Berechnung sondern eignet sich auch für eine Heuristik zum Auftreten von Ericson-Fluktuationen in der Anregungsfunktion.

Im folgenden werden die wichtigsten Sätze aus Anhang C angewandt, ohne zuvor sämtliche mathematischen Voraussetzungen abzuprüfen. Durch Verweis auf den entsprechenden Satz und erläuternde Bemerkungen ist allerdings stets klar, was im Rahmen einer strengen Herleitung noch zu zeigen wäre.

¹Es kann sich dabei um verallgemeinerte, d. h. geschwindigkeitsabhängige Potentiale handeln.

4.2 Theoretische Beschreibung

Es wird zunächst ein allgemeiner zeitabhängiger Hamilton-Operator der Form

$$H'_t = H + A_t \quad (4.1)$$

betrachtet, der sich aus einem zeitunabhängigen selbstadjungierten Operator H und einer zeitabhängigen selbstadjungierten Störung A_t zusammensetzt. Für A_t wird eine Darstellung der Form

$$A_t = f(t) (e^{i\omega t} W + e^{-i\omega t} W^*) \quad (4.2)$$

mit einem Operator W vorausgesetzt.

Dieser allgemeine Rahmen schließt die Beschreibung des Experimentes mit ein. Dazu wird für H der durch kanonische Quantisierung von (3.121) gewonnene Hamilton-Operator eingesetzt und

$$f(t) = f_{\Sigma}(t) \quad (4.3)$$

$$W = \frac{ie}{2m_e\omega} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\varphi_{\mathbf{R}_0})} \hat{\mathbf{E}} \cdot (-i\hbar\nabla) \quad (4.4)$$

gewählt². Der Vergleich mit Abschnitt 3.5 zeigt, daß dann (4.1) in den das Experiment beschreibenden Hamilton-Operator übergeht. Der zugrunde liegende Hilbert-Raum ist $\mathbf{X} = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ („Ortsdarstellung“)³. Die Atom-Laser-Wechselwirkung wird nun als Streuung an dem zeitabhängigen Potential A_t beschrieben.

Die folgenden Überlegungen schließen jede Atom-Laser-Wechselwirkung ein, die sich in die Form (4.1) mit (4.2) bringen läßt. Dafür ist die Homogenität der statischen Felder nicht erforderlich. Werden diese im Schwerpunktssystem durch ein zweimal stetig differenzierbares statisches Vektorpotential (ϕ, \mathbf{A}) erzeugt, so lautet der Hamilton-Operator des Atoms unter dem Einfluß des Laser-Lichtes (vgl. (3.31))

$$H'_t = \frac{1}{2m_e} \left[\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - f(t) \frac{c}{\omega} \hat{\mathbf{E}} \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi) \right]^2 - e\phi_K(r) - e\phi(\mathbf{r}) \quad (4.5)$$

Bei Vernachlässigung der ponderomotiven Energie ergibt sich die Form (4.1) mit

$$H = \frac{1}{2m_e} \left[\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 - e\phi_K(r) - e\phi(\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

$$A_t = -f(t) \frac{e}{m_e\omega} [\sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi)] \hat{\mathbf{E}} \left[\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] \quad (4.7)$$

und W in (4.4) wird

$$W = \frac{ie}{2m_e\omega} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\varphi_{\mathbf{R}_0})} \hat{\mathbf{E}} \cdot \left[-i\hbar\nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] \quad (4.8)$$

Allgemein gilt dann

$$W = \frac{ie}{2m_e\omega} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\varphi_{\mathbf{R}_0})} \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{q} \quad (4.9)$$

mit

$$\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -i\hbar\nabla & \text{im Experiment} \\ -i\hbar\nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) & \text{allgemein} \end{cases} \quad (4.10)$$

² $\hat{\mathbf{E}}$ bezeichnet wie bisher eine klassische Amplitude und keinen Operator.

³Zur Selbstadjungiertheit von H siehe [RS75].

4.2.1 Streutheorie

Bei asymptotischer Vollständigkeit des Streuproblems ist die Amplitude für den durch die Störung A_t vermittelten Übergang eines Zustandes $u \in \mathbf{X}$ in einen Zustand $v \in \mathbf{X}$ durch das entsprechende Matrixelement des S -Operators $\langle v|S|u\rangle = (Su, v)$ gegeben. In der streutheoretischen Untersuchung ist der Fall $A_t = 0$ zugelassen. Er entspricht der Abwesenheit der Störung. Es liegt dann trivialerweise asymptotische Vollständigkeit vor und der S -Operator ist die Identität $S = \text{id}$. Bei der Untersuchung des Einflusses einer Störung wird daher meist die Abweichung der Übergangsamplituden von denen im störungsfreien Fall betrachtet. Diese Abweichungen heißen Streuamplituden und definieren gemäß

$$\langle v|T|u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle v|S|u\rangle - \langle v|u\rangle \quad (u, v \in \mathbf{X}) \quad (4.11)$$

den sog. T -Operator. Bei der hier gewählten Konvention $T = S - \text{id}$ gilt

$$v \perp u \implies \langle v|T|u\rangle = \langle v|S|u\rangle \quad (u, v \in \mathbf{X})^4 \quad (4.12)$$

Die Streuamplituden lassen sich nun mit Hilfe der in Anhang C erarbeitete Darstellung der S -Matrix (Satz C.4.1 mit Bemerkung C.4.1) als Störungsreihe darstellen.

Streng genommen erfüllt der Fall (4.3), (4.4) die mathematischen Voraussetzungen nicht, da A_t unbeschränkt ist. Dies liegt an der Unbeschränktheit des Impulsoperators $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, der über das Produkts $\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{p}$ in W und damit in A_t eingeht. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, könnte W mit einem bei großen Impulsquadraten abgeschnittenen oder abgedämpften Impulsoperator $\tilde{\mathbf{p}}$ gebildet werden⁵. Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Operator W so abzuändern, daß er nur Kopplungen zwischen Zuständen vermittelt, die innerhalb eines festen (aber beliebig großen) Energieintervalls liegen (die Theorie ist ohnehin nichtrelativistisch). Sobald W beschränkt ist, kann versucht werden, die asymptotische Vollständigkeit zu folgern. Die dafür wesentliche Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} \|A_t\| dt \leq \infty$, wird wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|A_t\| dt \leq 2 \|W\| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad (4.13)$$

keine Schwierigkeit darstellen. So läßt sich bei einem Gauß-Strahl $|f|$ nach oben gegen eine Gauß-Kurve abschätzen. Was die übrigen Hürden betrifft, die auf dem Weg zu asymptotischen Vollständigkeit noch zu nehmen sind, stellen die Ergebnisse des Anhangs C eine wesentliche Erleichterung dar. Hervorzuheben ist in diesem Zusammenhang Satz C.3.1, der die wichtige Darstellung des S -Operators durch eine Dyson-Reihe sichert. Im Vergleich zu dem allgemeinsten dem Autor bekannten Ergebnis dieser Art (Chapter X, Problem 66 in [RS75]) stellt Satz C.3.1 in Anhang C deutlich schwächere Anforderungen an A_t . Es soll hier nicht der Versuch unternommen werden, die Streutheorie durch Näherung

⁴Es gibt unterschiedliche Konventionen bei der Einführung des T -Operators. Sie ergeben sich aus einer abweichenden Bestimmungsgleichung, die aus (4.11) durch Multiplikation der linken Seite mit einer von eins verschiedenen Konstante hervorgeht.

⁵Es kann z. B. $\tilde{\mathbf{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\mathbf{p}) \mathbf{p}$ gesetzt werden, wobei $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 1]$ auf einer beliebig großen Kugel identisch eins ist und jenseits dieser Kugel entweder null wird oder auf geeignete Weise abfällt.

von W mathematisch streng zu gestalten. Stattdessen mögen die vorangegangenen Ausführungen als Rechtfertigung dafür ausreichen, mit W und A_t im folgenden so zu arbeiten, als wären die Voraussetzungen von Satz C.4.1 erfüllt. Dann ist das Streutheorie asymptotisch vollständig und nach Bemerkung C.4.1 besitzt der S -Operator eine Darstellung in Form einer Störungsreihe nach Ordnungen in W (C.116).

4.2.2 Störungstheorie

Die in W lineare Näherung für den S -Operator bildet den Ausgangspunkt für alle weiteren Betrachtungen.

Bei Abbruch der Störungsreihe für S nach dem in W linearen Glied ergibt sich mit den Schreibweisen von Anhang C:

$$S_1 = I_{+\infty \leftarrow -\infty}^{((-i/\hbar)\widetilde{A},0)} + I_{+\infty \leftarrow -\infty}^{((-i/\hbar)\widetilde{A},1)} \quad (4.14)$$

Dabei ist für $u \in \mathbf{X}$

$$I_{+\infty \leftarrow -\infty}^{((-i/\hbar)\widetilde{A},0)} u = u \quad (4.15)$$

$$I_{+\infty \leftarrow -\infty}^{((-i/\hbar)\widetilde{A},1)} u = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}_t u dt \quad (4.16)$$

Also (vgl. C.3.1, besonders (C.70), (C.72))

$$\widetilde{A}_t = \exp\left(\frac{i}{\hbar} Ht\right) A_t \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right) \quad (4.17)$$

$$\stackrel{(4.2)}{=} f(t) \left\{ e^{i\omega t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} Ht\right) W \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right) + e^{-i\omega t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} Ht\right) W^* \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right) \right\} \quad (4.18)$$

Damit ergibt sich als in W lineare Näherung für T

$$T_1 = S_1 - \text{id} = T_1^- + T_1^+ \quad (4.19)$$

mit

$$T_1^- u = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} Ht\right) W \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right) u dt \quad (u \in \mathbf{X}) \quad (4.20)$$

$$T_1^+ u = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} Ht\right) W^* \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right) u dt \quad (u \in \mathbf{X}) \quad (4.21)$$

4.3 Streuamplituden

4.3.1 Direkte Integraldarstellung

Um die Anregungsfunktion, d. h. die Energieabhängigkeit des Streuquerschnitts, zu berechnen, wird eine Darstellung benötigt, die den Hamilton-Operator H

diagonalisiert. Dazu wird von einer kanonischen direkten Integraldarstellung U für H ausgegangen:

$$U: \mathbf{X} \rightarrow \int_{\text{spec}(H)} \bigoplus \mathbf{X}_E d\mu(E) \quad (4.22)$$

Solche Darstellungen werden in Eintrag D.5.1 über den vollständigen Spektralsatz von von Neumann eingeführt und diagonalisieren den Hamilton-Operator H . Dabei ist μ ein Maß auf dem Spektrum $\text{spec}(H)$ von H und für jede Energie E aus dem Spektrum ist \mathbf{X}_E komplexer Hilbert-Raum mit einem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_E$. U ordnet nun jedem Element $u \in \mathbf{X}$ eine Funktion

$$\text{spec}(H) \ni E \mapsto [Uu](E) \in \mathbf{X}_E \quad (4.23)$$

zu. Diese Funktionen sind die Elemente des komplexen Hilbert-Raumes

$$\mathbf{Y} = \int_{\text{spec}(H)} \bigoplus \mathbf{X}_E \quad (4.24)$$

dessen Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_Y$ durch

$$(x, y)_Y = \int_{\text{spec}(H)} (x(E), y(E))_E d\mu(E) \quad (x, y \in \mathbf{Y}) \quad (4.25)$$

gegeben ist.

Zur Vereinfachung werden folgende Schreibweisen vereinbart:

$$\langle E|u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} [Uu](E) \quad (E \in \text{spec}(H); u \in \mathbf{X}) \quad (4.26)$$

$$\langle v|E \rangle \langle E|u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} ([Uu](E), [Uv](E))_E \quad (E \in \text{spec}(H); u, v \in \mathbf{X}) \quad (4.27)$$

Damit gilt für $u \in \mathbf{X}$ und für jede Funktion $\varphi(H)$ von H

$$\langle E|\varphi(H)|u \rangle = \varphi(E) \langle E|u \rangle \quad (4.28)$$

Ferner gilt für $u, v \in \mathbf{X}$

$$(u, v)_X = \langle v|u \rangle = \int_{\text{spec}(H)} \langle v|E \rangle \langle E|u \rangle d\mu(E) \quad (4.29)$$

Die Bra-Ket-Schreibweise wurde mit Bedacht gewählt. Die einzigen Unterschiede zum herkömmlichen Gebrauch bestehen in den folgenden beiden Punkten:

1. *Auftreten des Maßes μ in der Darstellung des Skalarprodukts.* Bei absolutstetigem Spektrum kann diese Abweichung durch Änderung der Definition (4.26) behoben werden, im allgemeinen Falle muß sie bestehen bleiben.
2. *Die „Projektion“ $\langle E|u \rangle$ ist Element eines allgemeinen Hilbert-Raumes.* Der gewöhnliche Bra-Ket-Formalismus kennt für dieses Symbol nur Elemente eines eindimensionalen Hilbert-Raumes, nämlich komplexe Zahlen. Davon kann allerdings nur bei einem H mit sog. einfachem Spektrum ausgegangen werden [Yos80].

In diesem Sinne vermittelt die allgemeine Integraldarstellung eine strenge Fassung des Bra-Ket-Formalismus, die für die Ableitung der Ergebnisse benötigt wird. An seinem Gebrauch ändert sich wenig.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich die Energiedarstellung der Operatoren T_1^\mp angeben. Dafür sei $u \in \mathbf{X}$ und $E \in \text{spec}(H)$. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} \langle E|T_1^- u \rangle &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp \left[i \left(\omega + \frac{E}{\hbar} \right) t \right] \\ &\quad \langle E|W \exp \left(-\frac{i}{\hbar} H t \right) u \rangle \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \langle E|T_1^+ u \rangle &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp \left[i \left(-\omega + \frac{E}{\hbar} \right) t \right] \\ &\quad \langle E|W^* \exp \left(-\frac{i}{\hbar} H t \right) u \rangle \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.3.2 Diskrete nichtentartete Energieeigenzustände

Es wird nun davon ausgegangen, daß der Ausgangszustand $u = u_0$ ein normierter nichtentarteter diskreter Eigenzustand von H mit Energie E_0 ist. Dann gilt

$$\exp \left(\frac{i}{\hbar} H t \right) u_0 = \exp \left(\frac{i}{\hbar} E_0 t \right) u_0 \quad (4.32)$$

und es folgt

$$\langle E|T_1^- u \rangle = -\frac{i\sqrt{2\pi}}{\hbar} F \left(f; \frac{E_0 - E}{\hbar} - \omega \right) \langle E|W u_0 \rangle \quad (4.33)$$

$$\langle E|T_1^+ u \rangle = -\frac{i\sqrt{2\pi}}{\hbar} F \left(f; \frac{E_0 - E}{\hbar} + \omega \right) \langle E|W^* u_0 \rangle \quad (4.34)$$

mit der für Kreisfrequenzen ω' definierten Fourier-Transformation

$$F(f; \omega') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega' t} \quad (4.35)$$

Die Streuamplitude ergibt sich in erster Ordnung aus (4.19) durch Einsetzen von (4.33) und (4.34):

$$\langle v|T_1 u \rangle = \int_{\text{spec}(H)} \{ \langle v|E \rangle \langle E|T_1^- u \rangle + \langle v|E \rangle \langle E|T_1^+ u \rangle \} d\mu(E) \quad (4.36)$$

Für eine (meßbare) Teilmenge M des Spektrums sei $\mathcal{P}(f; M)$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach der Streuung der Zustand u_0 eine Energie aus M hat. (Die Funktion f wird als Parameter mitgeführt, da später die Abhängigkeit von diesem Parameter eine wichtige Rolle spielen wird.) Mit der charakteristischen Funktion χ_M von M ergibt sich:

$$\mathcal{P}(f; M) = \langle \chi_M(H) S u_0 | \chi_M(H) S u_0 \rangle \quad (4.37)$$

Für das folgende wird angenommen, daß E_0 nicht in M enthalten ist. Dann gilt:

$$\chi_M(H) S u_0 = \chi_M(H) (T + \text{id}) u_0 = \chi_M(H) T u_0 \quad (4.38)$$

und es ergibt sich die folgende Darstellung:

$$\mathcal{P}(f; M) = \int_M \langle T u_0 | E \rangle \langle E | T u_0 \rangle d\mu(E) \quad (4.39)$$

In erster Ordnung in W gilt also

$$\mathcal{P}_1(f; M) = J_-(f; M) + J_+(f; M) + J_0(f; M) \quad (4.40)$$

mit

$$J_-(f; M) \stackrel{\text{def}}{=} \int_M \langle T_1^- u_0 | E \rangle \langle E | T_1^- u_0 \rangle d\mu(E) \quad (4.41)$$

$$J_+(f; M) \stackrel{\text{def}}{=} \int_M \langle T_1^+ u_0 | E \rangle \langle E | T_1^+ u_0 \rangle d\mu(E) \quad (4.42)$$

$$J_0(f; M) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \text{Re} \int_M \langle T_1^+ u_0 | E \rangle \langle E | T_1^- u_0 \rangle d\mu(E) \quad (4.43)$$

Die Integrale lassen sich in eine Form bringen, die die physikalische Natur der Photoabsorption in anschaulicher Weise offenbart. Dazu werden (4.33) und (4.34) eingesetzt und die erhaltenen Ausdrücke vereinfacht. Unter Verwendung der Funktionen

$$D(E') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{\hbar^2} \left| F\left(f; \frac{E'}{\hbar}\right) \right|^2 \quad (4.44)$$

$$D_0(E') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{\hbar^2} \overline{F}\left(f; \frac{E_0 - E'}{\hbar} + \omega\right) F\left(f; \frac{E_0 - E'}{\hbar} - \omega\right) \quad (4.45)$$

ergibt sich:

$$J_-(f; M) = \int_M D(f; E_0 - E - \hbar\omega) \langle W u_0 | E \rangle \langle E | W u_0 \rangle d\mu(E) \quad (4.46)$$

$$J_+(f; M) = \int_M D(f; E_0 - E + \hbar\omega) \langle W^* u_0 | E \rangle \langle E | W^* u_0 \rangle d\mu(E) \quad (4.47)$$

$$J_0(f; M) = 2 \text{Re} \int_M D(f; E) \langle W^* u_0 | E \rangle \langle E | W u_0 \rangle d\mu(E) \quad (4.48)$$

Das abstrakte Maß μ läßt sich in diesen Integralen durch Spektralmaße ausdrücken. Diese ordnen je zwei Elementen $v, w \in \mathbf{X}$ ein eindeutig bestimmtes Borel-Maß $\mu_s(v, w; E)$ zu, so daß für jede meßbar Menge N

$$(\chi_N(H) v, w) = \int_N d\mu_s(v, w; E) \quad (4.49)$$

gilt. Für $v = w$ ergibt sich das *spektrale Energiemaß* von v , das wie folgt abgekürzt wird:

$$\mu_s(v; \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_s(v, v; \cdot) \quad (v \in \mathbf{X}). \quad (4.50)$$

Damit gilt

$$J_-(f; M) = \int_M D(f; E_0 - E - \hbar\omega) d\mu_s(Wu_0; E) \quad (4.51)$$

$$J_+(f; M) = \int_M D(f; E_0 - E + \hbar\omega) d\mu_s(W^*u_0; E) \quad (4.52)$$

$$J_0(f; M) = 2 \operatorname{Re} \int_M D(f; E) d\mu_s(Wu_0, W^*u_0; E) \quad (4.53)$$

Ist für ein $v \in \mathbf{X}$ $\mu_s(v; \cdot)$ auf M absolutstetig, dann ist die entsprechende Radon-Nikodym-Ableitungen $\rho_s(v; \cdot)$ die (*spektrale*) *Energiedichte* von v und auf M kann die Ersetzung

$$d\mu_s(v; E) = \rho_s(v; E) dE \quad (4.54)$$

vorgenommen werden.

4.4 Fermis Goldene Regel

4.4.1 Grenzfall unendlicher Wechselwirkungszeit

In den meisten Anwendungen ist f positiv und beschränkt. Dann gilt $0 \leq f \leq m$ mit $m \stackrel{\text{def}}{=} \max f$. Nach Multiplikation von W mit dieser Konstanten, kann für f von $0 \leq f \leq 1$ ausgegangen werden. Dann ist f eine zeitabhängige Bewertungsfunktion der harmonischen Störung mit maximalem Bewertungsfaktor Eins. Wird jedes infinitesimalen Zeitintervalls $(t, t + dt]$ mit demselben Faktor bewertet wie die harmonische Störung während dieses Zeitintervall, ergibt sich

$$\tau(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (4.55)$$

$\tau(f)$ kann als effektive Wechselwirkungszeit aufgefaßt werden. Der Vergleich mit (4.13) zeigt, daß das Streuproblem asymptotisch vollständig ist, wenn die effektive Wechselwirkungszeit endlich bleibt.

Von großer Bedeutung sind Näherungen, die sich im Grenzfall $f \rightarrow 1$ ergeben. Dann gilt natürlich $\tau(f) \rightarrow \infty$ und der Grenzübergang verläßt den Rahmen der hier aufgestellten Streutheorie. Tatsächlich strebt mit $f \rightarrow 1$ die Fourier-Transformation F gegen das $\sqrt{2\pi}$ -fache der δ -Distribution. Diese geht quadratisch in die Integranden von J_- und J_+ ein. Daher kann im Grenzfall nicht mit einem gutartigen Verhalten von $\mathcal{P}_1(f; M)$ gerechnet werden. Dies ist bei einer Näherung erster Ordnung nicht weiter beunruhigend.⁶ Trotzdem gestattet dieser

⁶Bei einer eindimensionalen Differentialgleichung $iy' = ay$ mit einer reellwertigen Funktion a ist jede Lösung $y(t) \propto \exp(-i \int_0^t a(s) ds)$ für alle Zeiten beschränkt. Für die Näherung erster Ordnung in a gilt dies wegen $y_1(t) \propto y_0 - i \int_0^t a(s) ds$ i. allg. nicht.

Grenzübergang die Berechnung einer zeitlich gemittelten Übergangswahrscheinlichkeit. Dies gelingt auf folgende Weise: Aus physikalischen Gründen ist f meist von vorgegebener Form, d. h. aus einer festgelegten Funktionenklasse. So ist f bei Beschreibung des Laser-Strahls mit einer fundamentalen Gauß-Mode aus der Klasse der Gauß-Funktionen mit Maximalwert Eins. In diesem wie in anderen wichtigen Fällen können die Elemente der Funktionenklasse durch $\tau = \tau(f)$ parametrisiert werden. Dann wird $f \rightarrow 1$ als $\tau \rightarrow \infty$ ausgeführt. Oft gelingt es dann für die mittlere Übergangswahrscheinlichkeit \mathcal{P}_1/τ im Grenzfall einen endlichen Wert zu gewinnen. Dieser hängt i. allg. von der physikalischen Form von f ab.

4.4.2 Verallgemeinerte goldene Regel

Die Überlegungen sollen am hier interessierenden Beispiel ausgeführt werden. Dazu wird von (3.127) mit $Y_0 = Z_0 = 0$ ausgegangen. Also:

$$f(t) = \exp \left[- \left(\frac{V}{w_0} \right)^2 t^2 \right] \quad (4.56)$$

wobei V der Betrag der Schwerpunktseschwindigkeit und w_0 der Radius der Strahltaile ist. Zunächst ist

$$\tau(f) = \sqrt{\pi} \frac{w_0}{V} \quad (4.57)$$

Wird für positive Zeitparameter τ die Funktion gemäß

$$f_\tau(t) = \exp \left[-\pi \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right] \quad (4.58)$$

eingeführt, dann gilt

$$f(t) = f_{\tau(f)}(t) \quad (4.59)$$

Nun wird $\mathcal{P}_1(f_\tau; M)/\tau$ für $\tau \rightarrow \infty$ ausgewertet. Die Fourier-Transformation von f_τ ist [GR65]

$$F(f_\tau; \omega) = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\tau^2 \omega^2}{4\pi} \right) \quad (4.60)$$

Daher gilt für $\tau \rightarrow \infty$

$$F \left(f_\tau; \frac{E'}{\hbar} \right) \rightarrow \sqrt{2\pi} \hbar \delta(E') \quad (4.61)$$

und

$$\frac{1}{\tau} D(f_\tau; E') = \frac{2\pi}{\hbar^2 \tau} \left| F \left(f; \frac{E'}{\hbar} \right) \right|^2 = \frac{\tau}{\hbar^2} \exp \left(-\frac{\tau^2}{2\pi \hbar^2} E'^2 \right) \rightarrow \frac{\sqrt{2\pi}}{\hbar} \delta(E') \quad (4.62)$$

Falls $\mu_s(Wu; \cdot)$ in einer Umgebung von $E_0 - \hbar\omega$ und $\mu_s(W^*u; \cdot)$ in einer Umgebung von $E_0 + \hbar\omega$ stetig differenzierbar sind, gilt

$$\frac{1}{\tau} J_0(f_\tau; M) \rightarrow 0 \quad (4.63)$$

und⁷

$$\frac{1}{\tau} J_- (f_\tau; M) \rightarrow \mathcal{R}_- \chi_M (E_0 - \hbar\omega) \quad (4.65)$$

$$\frac{1}{\tau} J_+ (f_\tau; M) \rightarrow \mathcal{R}_+ \chi_M (E_0 + \hbar\omega) \quad (4.66)$$

mit

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \quad (4.67)$$

$$\mathcal{R}_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma\pi}{\hbar} \rho_s (W u_0; E_0 - \hbar\omega) \quad (4.68)$$

$$\mathcal{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma\pi}{\hbar} \rho_s (W^* u_0; E_0 + \hbar\omega) \quad (4.69)$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\frac{1}{\tau} \mathcal{P}_1 (f_\tau; M) \rightarrow \mathcal{R}_- \chi_M (E_0 - \hbar\omega) + \mathcal{R}_+ \chi_M (E_0 + \hbar\omega) \quad (4.70)$$

Werden diese Beziehungen als Dichte bezüglich der Energie formuliert, so ist lediglich $\chi(E_0 \mp \hbar\omega)$ durch $\delta(E_0 \mp \hbar\omega - E)$ zu ersetzen. Dies ist eine verallgemeinerte Form von Fermis zweiter goldenen Regel. Sie lautet

$$\frac{1}{\tau} \mathcal{P}_1 (f_\tau; M) \rightarrow \int_M \{ \mathcal{R}_- \delta(E - E_0 + \hbar\omega) + \mathcal{R}_+ \delta(E - E_0 - \hbar\omega) \} dE \quad (4.71)$$

4.4.3 Herkömmliche Goldene Regel

Aus (4.70) mit (4.68) und (4.69) ergibt sich Fermis Regel in der gewöhnlichen Form wie folgt: Wenn das abstrakte Maß μ in in M enthaltenen Umgebungen von $E_0 \mp \hbar\omega$ absolutstetig ist (Ableitung ρ), dann gilt in diesen Umgebungen in den Stetigkeitspunkten der rechten Seite

$$\begin{aligned} \rho_s (W u_0; E) &= \frac{d\mu_s (W u_0; E)}{d\mu} \cdot \frac{d\mu (E)}{dE} \\ &= \langle W u_0 | E \rangle \langle E | W u_0 \rangle \rho (E) \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \rho_s (W^* u_0; E) &= \frac{d\mu_s (W^* u_0; \cdot)}{d\mu} \cdot \frac{d\mu (E)}{dE} \\ &= \langle W^* u_0 | E \rangle \langle E | W^* u_0 \rangle \rho (E) \end{aligned} \quad (4.73)$$

und (4.68), (4.69) geht über in

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \quad (4.74)$$

$$\mathcal{R}_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma\pi}{\hbar} \langle W u_0 | E_0 - \hbar\omega \rangle \langle E_0 - \hbar\omega | W u_0 \rangle \rho (E_0 - \hbar\omega) \quad (4.75)$$

$$\mathcal{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma\pi}{\hbar} \langle W^* u_0 | E_0 + \hbar\omega \rangle \langle E_0 + \hbar\omega | W^* u_0 \rangle \rho (E_0 + \hbar\omega) \quad (4.76)$$

⁷ χ_M ist nach wie vor die charakteristische Funktion der Menge M . Also

$$\chi_M (E_0 \mp \hbar\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } E_0 \mp \hbar\omega \in M \\ 0, & \text{falls } E_0 \mp \hbar\omega \notin M \end{cases} \quad (4.64)$$

4.4.4 Betrachtungen zur fundamentalen Gauß-Mode

Ist nun $Y_0 \neq 0$, so sind lediglich W und W^* mit $\exp(-Y_0^2/w_0^2)$ zu multiplizieren. Insgesamt liefert dies einen Faktor $\gamma = \sqrt{2} \exp(-2Y_0^2/w_0^2)$ auf der rechten Seite. Ist $Z_0 \neq 0$, so führt dies zu einem konstanten Phasenfaktor in der Fourier-Transformation, der nichts am Endergebnis ändert. Die effektive Wechselwirkungszeit bleibt in allen Fällen unverändert, hängt also nur von der Schwerpunktschwindigkeit ab. Zusammenfassend gilt:

$$\gamma = \gamma(\mathbf{R}_0) = \begin{cases} \sqrt{2} & , \text{für Gauß-Funktionen } (X_0 = Y_0 = 0) \\ \sqrt{2} \exp\left[-2\left(\frac{Y_0}{w_0}\right)^2\right] & , \text{für Gauß-Funktionen (allgemein)} \\ 2 & , \text{für Pulse} \end{cases} \quad (4.77)$$

Das Ergebnis für Pulse⁸ wurde angegeben, da es Fermis goldene Regel mit dem gewöhnlichen Vorfaktor liefert.

4.4.5 Einordnung des Ergebnisses

Herleitungen von Fermis goldener Regel für Pulse finden sich in vielen Lehrbüchern der Quantenmechanik [CTDL77, Fra71, Sak85]. Das Ergebnis ist stets das Produkt der folgenden beiden Größen:

1. Dem Betragsquadrat eines Matrixelementes von W (W^*) zwischen u_0 und Eigenzuständen zur Energie $E = E_0 - \hbar\omega$ ($E = E_0 + \hbar\omega$)
2. Einer als „Zustandsdichte“ gedeuteten Größe

Von den Schwierigkeiten der Definition solcher Eigenzustände für Energien E aus dem kontinuierlichen Spektrum abgesehen, ist nicht klar, wie im Falle von Entartungen des Spektrums bei E zu verfahren ist. Was als „Zustandsdichte“ gedeutet wird, ist im wesentlichen ρ in (4.72) und (4.73). In [Sak85] wird ρ heuristische eingeführt, in [CTDL77, Fra71] durch formale Manipulationen erzeugt.

Es ist überraschend, daß alle diese Schwierigkeiten in der hier entwickelten Fassung von Fermis goldener Regel ((4.70) mit (4.68) und (4.69)) überwunden werden: Statt Eigenzuständen zum kontinuierlichen Spektrum und der „Zustandsdichte“ findet sich lediglich die physikalisch meßbare und anschauliche Größe der Energiedichte des Zustandes Wu_0 bzw. W^*u_0 . Dieses Ergebnis ist nun der Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung einer sehr wichtigen Darstellung für den totalen Photoabsorptionsquerschnitt.

Offensichtlich hängt das Gesamtergebnis (4.70) nur noch über die charakteristische Funktion χ_M von der Menge M ab. Es kann daher $M = \text{spec}(H) \setminus \{E_0\}$ gesetzt werden. $\mathcal{P}(f_\tau; M)$ ist dann die totale Streuwahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit, nach der Streuung eine Abweichung vom Ausgangszustand zu messen. Es gilt dann

$$\frac{1}{\tau} \mathcal{P}_1(f_\tau; M) \rightarrow \mathcal{R}_- + \mathcal{R}_+ \quad (4.79)$$

⁸Die Parametrisierung lautet in diesem Fall

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{falls } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (4.78)$$

und als Endergebnis ergibt sich (4.70) mit $\gamma = 2$.

und $\mathcal{R}_- + \mathcal{R}_+$ und kann als mittlere totale Streurrate in erster Ordnung aufgefaßt werden. Besteht M_{\pm} aus den Energien des Spektrum oberhalb (unterhalb) als E_0 , ergibt sich

$$\frac{1}{\tau} \mathcal{P}_1(f_{\tau}; M_{\pm}) \rightarrow \mathcal{R}_{\pm} \quad (4.80)$$

und \mathcal{R}_+ (\mathcal{R}_-) kann als mittlere totale Anregungsrate (Abregungsrate) aufgefaßt werden. Dies entspricht bei der Beschreibung des Experimentes einer mittleren totalen stimulierten Photoabsorptionsrate (Photoemissionsrate).

4.5 Verallgemeinerung der Formel von Rescigno-McKoy

Die mittlere totale Photoabsorptionsrate \mathcal{R}_+ (4.69) kann unter den Voraussetzungen, unter denen diese Größe eingeführt wurden, mit Hilfe der Resolvententransformation (siehe z. B. [Pea88]) wie folgt geschrieben werden:

$$\mathcal{R}_+ = \pm \frac{\gamma}{\hbar} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} (E_0 + \hbar\omega \mp i\varepsilon - E)^{-1} d\mu_s(W^*u_0; E) \quad (4.81)$$

$$= \pm \frac{\gamma}{\hbar} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Im} \langle W^*u_0 | (E_0 + \hbar\omega \mp i\varepsilon - H)^{-1} | W^*u_0 \rangle \quad (4.82)$$

Da in der vorliegenden streutheoretischen Beschreibung die Atome (genauer die atomaren Elektronen) die Rolle der Geschosse übernehmen, wäre der entsprechende Streuquerschnitt eigentlich auf den durch den Atomstrahl vermittelten atomaren Fluß zu beziehen. Wird die Anregung als vollständigen Absorption eines Photons der Energie $\hbar\omega$ gedeutet, kann der totale Photoabsorptionsquerschnitt $\sigma_+(\hbar\omega)$ wie folgt eingeführt werden:

$$\sigma_+(\hbar\omega) = \hbar\omega \frac{\text{mittlere totale Anregungsrate}}{\text{mittlere Intensität des Laser-Lichtes}} \quad (4.83)$$

Bezeichnet \mathcal{I} die mittlere Intensität des Laser-Lichtes, dann gilt

$$\sigma_+(\hbar\omega) = \hbar\omega \frac{\mathcal{R}_+}{\mathcal{I}} \quad (4.84)$$

Die Definition von \mathcal{I} gleicht der von \mathcal{R}_+ : Mit einer durch die effektive Wechselwirkungszeit parametrisierten Funktion f_{τ} ist die Intensität I am Ort \mathbf{r} zur Zeit t

$$I(t, \mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi} f_{\tau}^2(t) \left| \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}} \right| \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\mathbf{R}_0}) \quad (4.85)$$

$$= \frac{c}{4\pi} f_{\tau}^2(t) \hat{E}^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\mathbf{R}_0}) \quad (4.86)$$

Die mittlere Intensität im Grenzfall unendlich langer Wechselwirkungszeit ist dann

$$\mathcal{I} = \frac{c}{4\pi} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\tau}^2(t) \hat{E}^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\mathbf{R}_0}) dt \quad (4.87)$$

Die bisher untersuchten Funktionenklassen für f_τ gestatten eine explizite Auswertung. Es ergibt sich der ortsunabhängige Wert

$$\mathcal{I} = \frac{\gamma c}{16\pi} \hat{E}^2 \quad (4.88)$$

Dabei hat γ denselben Wert wie bei der Berechnung von \mathcal{R}_+ :

$$\gamma = \begin{cases} \sqrt{2} & , \text{ für Gauß-Funktionen mit } X_0 = Y_0 = 0 \\ \sqrt{2} \exp \left[-2 \left(\frac{Y_0}{w_0} \right)^2 \right] & , \text{ für Gauß-Funktionen (allgemein)} \\ 2 & , \text{ für Pulse} \end{cases} \quad (4.89)$$

Bei der Berechnung von σ_+ kürzt sich γ heraus und das Ergebnis wird unabhängig von der für f_τ festgelegten Form.

Um \mathcal{R}_+ anzugeben, ist nun lediglich W aus (4.9) in (4.82) einzusetzen. Zur Abkürzung wird ein Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}$ in Polarisationsrichtung gemäß $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{E}}/\hat{E}$ eingeführt. Damit ergibt sich:

$$\mathcal{R}_+ = \pm \frac{\gamma e^2 \hat{E}^2}{4m_e^2 \hbar \omega^2} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Im} \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{q}) u_0 | (E_0 + \hbar \omega \mp i\varepsilon - H)^{-1} | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{q}) u_0 \rangle \quad (4.90)$$

Einsetzen von (4.90) und (4.88) in (4.84) liefert die erste Fassung der angekündigten Verallgemeinerung der Formel von Rescigno-McKoy:

$$\sigma_+(\hbar\omega) = \pm \frac{4\pi e^2}{m_e^2 c \omega} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Im} \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{q}) u_0 | (E_0 + \hbar \omega \mp i\varepsilon - H)^{-1} | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{q}) u_0 \rangle \quad (4.91)$$

mit

$$\mathbf{q} = \begin{cases} -i\hbar\nabla & \text{im Experiment} \\ -i\hbar\nabla + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) & \text{allgemein} \end{cases} \quad (4.92)$$

4.5.1 Näherung für optische Frequenzen

Für optische Frequenzen kann die Exponentialfunktion durch Eins ersetzt werden (vgl. 3.4.3, besonders (3.101) und (3.102)). Dies ist die „Näherung des konstanten Feldes“ und liefert:

$$\tilde{\sigma}_+(\hbar\omega) = \pm \frac{4\pi e^2}{m_e^2 c \omega} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Im} \langle (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{q}) u_0 | (E_0 + \hbar \omega \mp i\varepsilon - H)^{-1} | (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{q}) u_0 \rangle \quad (4.93)$$

4.5.2 Allgemeine Formel von Rescigno-McKoy

Die herkömmliche Formel von Rescigno-McKoy [RM75] bezieht sich auf ein Atom (oder Molekül), das durch ein quantenmechanisches Modell mit einem Hamilton-Operator der Form

$$H^{(\text{rmk})} = \frac{1}{2m_e} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}) \quad (4.94)$$

beschrieben wird. Damit ist die Gegenwart statischer elektrischer Felder gestattet. Statische magnetische Felder führen zu Abweichungen von der Form (4.94) und bleiben daher ausgeschlossen. Wird ein solches Atom einer linear polarisierten harmonischen ebenen elektromagnetischen Welle ausgesetzt, liefert die

herkömmliche Formel von Rescigno-McKoy den zugehörigen Photoabsorptionsquerschnitt. Sie lautet:

$$\tilde{\sigma}_+^{(\text{rmk})}(\hbar\omega) = \pm \frac{4\pi e^2 \omega}{c} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Im} \langle (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r}) u_0 | (E_0 + \hbar\omega \mp i\varepsilon - H)^{-1} | (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r}) u_0 \rangle \quad (4.95)$$

Es wird nun gezeigt, daß diese Darstellung auch bei Anwesenheit statischer magnetischer Felder gültig bleibt. Genauer gilt: Wenn der Grenzwert in (4.95) existiert, dann gilt selbst bei Anwesenheit statischer magnetischer Felder die Formel von Rescigno-McKoy:

$$\tilde{\sigma}_+(\hbar\omega) = \tilde{\sigma}_+^{(\text{rmk})} \quad (4.96)$$

Der Nachweis stützt sich auf folgende Kommutatorbeziehung:

$$q_k u_0 = i \frac{m_e}{\hbar} [H, r_k] u_0 \quad (k \in \{1, 2, 3\}) \quad (4.97)$$

Damit wird

$$(\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{q}) u_0 = i \frac{m_e}{\hbar} [H, \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r}] u_0 = i \frac{m_e}{\hbar} (H - E_0) (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r}) u_0 \quad (4.98)$$

Mit den Abkürzungen

$$v = (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r}) u_0 \quad (4.99)$$

$$G(\varepsilon) = (H - E_0) (E_0 + \hbar\omega + i\varepsilon - H)^{-1} (H - E_0) \quad (\varepsilon \neq 0) \quad (4.100)$$

gilt dann

$$\tilde{\sigma}_+(\hbar\omega) = \pm \frac{4\pi e^2}{c\hbar^2 \omega} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Im} \langle v | G(\mp\varepsilon) | v \rangle \quad (4.101)$$

Der Operator $G(\mp\varepsilon)$ kann durch die Ersetzung

$$H - E_0 = - (E_0 + \hbar\omega - H \mp i\varepsilon) + \hbar\omega \mp i\varepsilon \quad (4.102)$$

umgeformt werden. Für $\varepsilon \neq 0$ ergibt sich

$$G(\mp\varepsilon) = (E_0 - \hbar\omega - H) \pm i\varepsilon + (\hbar\omega \mp i\varepsilon)^2 (E_0 + \hbar\omega \mp i\varepsilon - H)^{-1} \quad (4.103)$$

Also für $\varepsilon \neq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle v | G(\mp\varepsilon) | v \rangle &= (\hbar^2 \omega^2 - \varepsilon^2) \text{Im} \langle v | (E_0 + \hbar\omega \mp i\varepsilon - H)^{-1} | v \rangle \\ &\quad \pm \varepsilon \langle v | v \rangle \mp 2\hbar\omega\varepsilon \text{Re} \langle v | (E_0 + \hbar\omega \mp i\varepsilon - H)^{-1} | v \rangle \end{aligned} \quad (4.104)$$

Die zweite Zeile wird für $\varepsilon \downarrow 0$ Null. Denn die Existenz des Grenzwertes in (4.95) gestattet für beliebig kleine Energien $\delta > 0$ die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \downarrow 0} |\varepsilon \operatorname{Re} \langle v | (E_0 + \hbar\omega \mp i\varepsilon - H)^{-1} | v \rangle| \\
& \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \frac{\varepsilon |E_0 + \hbar\omega - E|}{(E_0 + \hbar\omega - E)^2 + \varepsilon^2} d\mu_s(v; E) \\
& = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{E_0 + \hbar\omega - \delta}^{E_0 + \hbar\omega} \frac{\varepsilon |E_0 + \hbar\omega - E|}{(E_0 + \hbar\omega - E)^2 + \varepsilon^2} d\mu_s(v; E) \\
& \leq \delta \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Im} \int_{E_0 + \hbar\omega - \delta}^{E_0 + \hbar\omega} \frac{1}{(E_0 + \hbar\omega - E) - i\varepsilon} d\mu_s(v; E) \\
& = \delta \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Im} \langle v | (E_0 + \hbar\omega - i\varepsilon - H)^{-1} | v \rangle \quad (4.105)
\end{aligned}$$

Da der Grenzwert in (4.95) existiert, kann nun auch des Grenzübergangs $\varepsilon \downarrow 0$ in (4.104) ausgewertet werden:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Im} \langle v | G(\mp\varepsilon) | v \rangle = \hbar^2 \omega^2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Im} \langle v | (E_0 + \hbar\omega \mp i\varepsilon - H)^{-1} | v \rangle \quad (4.106)$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in (4.101) liefert die Behauptung.

4.5.3 Zusammenfassung

Verallgemeinerung der Formel von Rescigno-McKoy: *Die Photoabsorption von linear polarisiertem schmalbandigen Laser-Licht durch ein Alkaliatom hat im Schwerpunktssystem in der „Näherung des konstanten Feldes“ (bei Vernachlässigung der ponderomotiven Energie) den Wirkungsquerschnitt $\tilde{\sigma}_+(\hbar\omega)$ aus (4.93).*

Dabei ist H der Hamilton-Operator, der das Alkali-Atom in Abwesenheit des Laser-Lichtes im Schwerpunktssystem beschreibt, und es wird davon ausgegangen, daß das Atom in einem diskreten nichtentarteten Energie-Eigenzustand u_0 präpariert ist ($Hu_0 = E_0u_0$). H kann den Einfluß elektrischer und/oder magnetischer Felder enthalten, solange sie (im Schwerpunktssystem) durch ein zweimal stetig differenzierbares statisches Viererpotential erzeugt werden. $\hat{\mathbf{e}}$ ist der Einheitsvektor in Polarisationsrichtung (im Schwerpunktssystem). Wenn der Grenzwert in (4.95) existiert, dann gilt selbst bei Anwesenheit statischer magnetischer Felder die Formel von Rescigno-McKoy:

$$\tilde{\sigma}_+(\hbar\omega) = \tilde{\sigma}_+^{(\text{rmk})} \quad (4.107)$$

4.6 Messung der Anregungsfunktion

Nach (4.80) wird für lange Wechselwirkungszeit τ die Anregungswahrscheinlichkeit asymptotisch

$$\mathcal{R}_+\tau \stackrel{(4.84)}{=} \frac{1}{\hbar\omega} \mathcal{I}\tau\sigma_+(\hbar\omega) \stackrel{(4.88)}{=} \frac{c}{16\pi\hbar\omega} \hat{E}^2 \gamma\tau\sigma_+(\hbar\omega) \quad (4.108)$$

Die durch $\Sigma = (\mathbf{R}_0, V e_z)$ gegebenen Schwerpunktsbewegung geht also nur über den Parameter $\gamma = \gamma(X_0, Y_0)$ und die (effektive) Wechselwirkungszeit $\tau = \tau(V)$ ein. Als stationärer Teilchenstrom kann der Atomstrahl durch die folgenden drei Größen beschrieben werden:

$$I \quad \text{Stromstärke} \quad (4.109)$$

$$\Phi_b = \Phi_b(X_0, Y_0) \quad \text{Stoßparameterverteilung} \quad (4.110)$$

$$\Phi_v = \Phi_v(V) \quad \text{Geschwindigkeitsverteilung} \quad (4.111)$$

Wird also für eine bestimmte Zeit τ_D die Anzahl der Anregungen N_+ gezählt, so hat diese Größe den Erwartungswert

$$\langle N_+ \rangle = \frac{c}{16\pi\hbar\omega} \hat{E}^2 I \tau_D \langle \gamma \rangle \langle \tau \rangle \sigma_+(\hbar\omega) \quad (4.112)$$

mit den nur von den Atomstrahleigenschaften und der Modenform abhängigen Erwartungswerten

$$\langle \gamma \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma(X_0, Y_0) \Phi_b(X_0, Y_0) dX_0 dY_0 \quad (4.113)$$

$$\langle \tau \rangle = \int_0^\infty \Phi_v(V) \tau(V) dV \quad (4.114)$$

Die Strahlleistung P der Gauß-Mode ist proportional zu \hat{E}^2 . Damit gilt

$$\langle N_+ \rangle \propto \frac{P\tau_D}{\hbar\omega} \sigma_+(\hbar\omega) \quad (4.115)$$

Im Experiment wird zunächst die absolute Wellenlänge des stabilisierten Farbstoff-Lasers gemessen. Dann wird während einer festen Zeitspanne τ_D die Zahl der Anregungsereignisse gezählt. Danach wiederholt sich folgender Schritt: Erhöhung der Laser-Frequenz um ungefähr 10 MHz, Messung der tatsächlichen Frequenz $\hbar\omega$, Messung der Strahlleistung P und anschließende Zählung der detektierten Anregungsereignisse N_+ während der Zeitspanne τ_D . Die Größen $\hbar\omega N_+/P$ liefern also tatsächlich eine statistische Messung der Anregungsfunktion:

$$\sigma_+(\hbar\omega) \propto \frac{\hbar\omega}{P} \langle N_+ \rangle \quad (4.116)$$

Da die Frequenzbreite eines Spektrums kleiner als 40 GHz ist, kann die Veränderlichkeit des Faktors $\hbar\omega$ vernachlässigt werden. Mit der Mittelfrequenz ν_0 des Spektrums gilt nämlich für alle abgestrichenen Frequenzen ν :

$$\sigma_+(\hbar\omega) \propto \frac{\hbar\nu_0}{P} \langle N_+ \rangle \left(1 + \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right) \quad (4.117)$$

mit

$$\left| \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right| < 4 \cdot 10^{-5} \quad \text{bei } \lambda \sim 480 \text{ nm} \quad (4.118)$$

Die statistischen Fehler überwiegen diesen Fehler bei weitem.

Besonders für die Untersuchung auf Ericson-Fluktuationen ist es notwendig, einem experimentellen Datensatz eine kontinuierlich definierte Funktion zuzuordnen. Der experimentelle Datensatz hat zunächst die Form

$$\{(\mathcal{E}_m, N_m, P_m)\}_{m \in \{1, \dots, M\}} \quad (M: \text{Anzahl der Meßpunkte}) \quad (4.119)$$

Später werden die Photonenergien $\hbar\omega$ auf einer Energieskala ausgedrückt, die für weitere Untersuchungen besser geeignet ist. Die folgenden Überlegungen sind unabhängig von der Wahl der Energieskala. Daher werden Energiewerte einfach mit \mathcal{E} gekennzeichnet. Nach den vorangegangenen Überlegungen, ist für jeden Meßpunkt $m \in \{1, \dots, M\}$ das Verhältnis s_m aus der detektierten Anzahl von angeregten Atomen N_m und der Strahlleistung des Farbstoff-Lasers P_m bis auf den statistischen Fehler $N_m - \langle N_m \rangle$ proportional zur Anregungsfunktion der Photoabsorption für die Anregung der Energie \mathcal{E}_m , und die Proportionalitätskonstante ist in guter Näherung für alle Meßpunkte gleich. Ein solcher Datensatz wird nun als Histogramm aufgefaßt. Dazu wird dem Energiewert eines jeden Meßpunktes ein Energieintervall zugeordnet. Die arithmetischen Mittel des Energiewertes mit seinem Vorgänger bzw. Nachfolger liefern dabei die Randpunkte. Dies führt auf die Intervalle $\{I_m\}_{m \in \{1, \dots, M\}}$ mit

$$I_m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (\mathcal{E}_1, \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{2}] & , \text{ falls } m = 1 \\ (\frac{\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_{m-1}}{2}, \frac{\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_{m+1}}{2}] & , \text{ falls } 1 < m < M \\ (\frac{\mathcal{E}_M + \mathcal{E}_{M-1}}{2}, \mathcal{E}_M] & , \text{ falls } m = M \end{cases} \quad (m \in \{1, \dots, M\}) \quad (4.120)$$

Wird zur für die charakteristischen Funktionen dieser Intervalle zur Abkürzung die Schreibweise

$$\chi_m \stackrel{\text{def}}{=} \chi(I_m) \quad (m \in \{1, \dots, M\}) \quad (4.121)$$

verwandt, so lautet das dem Datensatz zugeordnete Histogramm (Stufenfunktion)

$$s(\mathcal{E}) = \sum_{m=1}^M \frac{N_m}{P_m} \chi_m \quad (\mathcal{E} \in (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_M]) \quad (4.122)$$

Diese Funktion ist dann bis auf die statistischen Fehler der Größen $\{N_m - \langle N_m \rangle\}_{m \in \{1, \dots, M\}}$ und die Vernachlässigung von Fluktuationen auf der Skala der Schrittweite proportional zur Anregungsfunktion der Photoabsorption auf $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_M]$.

4.7 Resonanzen und Ericson-Fluktuationen

Die Formel von Rescigno-McKoy klärt, wie es in Photoabsorptionsspektren zu Ericson-Fluktuationen kommen kann. Dabei spielt es keine Rolle, ob von der verallgemeinerten Fassung σ (4.91) oder von der „Näherung des konstanten Feldes“ $\tilde{\sigma}$ ((4.93) bzw. (4.95)) ausgegangen wird. Von Bedeutung ist lediglich, daß die Anregungsfunktion dargestellt werden kann als Grenzwert einer in der unteren (oberen) komplexen Energiehalbebene definierten holomorphen (=analytischen) Funktion bei Annäherung an die reelle Energieachse. Die folgenden Überlegungen beziehen sich daher nicht nur auf die Photoabsorption.

Um die Darstellung zu vereinfachen wird für einen Hamilton-Operator H und für v aus dem Hilbert-Raum, in dem er definiert ist, die Funktion $R_v^\mp: \mathbb{C}_\mp \rightarrow \mathbb{C}$ gemäß

$$R_v^\mp(z) \stackrel{\text{def}}{=} \langle v | (z - H)^{-1} | v \rangle \quad (z \in \mathbb{C}_\mp = \{z \in \mathbb{C}; \mp \text{Im} z > 0\}) \quad (4.123)$$

eingeführt. Aus den Eigenschaften der Resolvente $(z - H)^{-1}$ eines selbstadjungierten Operators folgt die Wohldefiniiertheit und Holomorphie dieser Funktion. Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf eine Anregungsfunktion σ , die eine Darstellung der Form

$$\sigma(E) = -a(E) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Im} R_v^+(E + i\varepsilon) \quad (4.124)$$

mit einem u. U. schwach energieabhängigen positiven Vorfaktor $a = a(E)$ und einem Zustand v besitzt. Dies schließt die Anregungsfunktion für den Photoabsorption ein. Und zwar unabhängig davon, ob von der Darstellungen (4.91) oder (4.93) bzw. (4.95) ausgegangen wird.

Falls es eine analytische Fortsetzung \tilde{R}_v^+ von R_v^+ gibt, deren Definitionsgebiet G die reelle Energieachse auf einem offenen Intervall I überschreitet, so ist die Anregungsfunktion auf I einfach $-\text{Im} \tilde{R}_v^+(E)$. Diese Darstellung gestattet einen einfachen Zugang zur Beschreibung von Resonanzen in Anregungsfunktionen.

Ist \tilde{R}_v^+ in der „Nähe“ von I holomorph bis auf einen isolierten Pol erster Ordnung bei $E_r - i\Gamma$ mit $E_r \in I$ und Residuum a_r . Dann ist B durch

$$B(z) = \tilde{R}_v^+(z) - \frac{a_r}{z - E_r + i\Gamma} \quad (4.125)$$

in einer den Punkt $E_r - i\Gamma$ enthaltenden (einfach zusammenhängenden) Umgebung definiert und holomorph. Es gilt dann

$$\sigma(E) = -a(E) \text{Im} B(E) - a(E) \text{Im} \frac{a_r}{E - E_r + i\Gamma} \quad (4.126)$$

Der Polterm wird als Resonanz bezeichnet. Falls $\text{Im} a_r = 0$ ist, handelt es sich um eine sog. Breit-Wigner-Resonanz, andernfalls um eine sog. Fano-Resonanz (zur Abkürzung wird die Bezeichnung $\varepsilon = (E - E_r)/\Gamma$ verwandt):

1. *Breit-Wigner-Resonanz:* Im Fall $\text{Im} a_r = 0$ ergibt sich mit $A \stackrel{\text{def}}{=} \pi a a_r$

$$-a \text{Im} \frac{a_r}{E - E_r + i\Gamma} = \frac{A}{\pi\Gamma} \frac{1}{\varepsilon^2 + 1} \quad (4.127)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite liefert bei Vernachlässigung der Energieabhängigkeit von a den die Breit-Wigner-Resonanz kennzeichnenden Lorentz-förmigen Verlauf.

2. *Fano-Resonanz:* Im Fall $\text{Im} a_r \neq 0$ gilt

$$-a \text{Im} \frac{a_r}{E - E_r + i\Gamma} = -\frac{a}{\Gamma} \text{Im} \frac{a_r(\varepsilon - i)}{\varepsilon^2 + 1} = -\frac{a}{\Gamma} \frac{\text{Im} a_r \varepsilon - \text{Re} a_r}{\varepsilon^2 + 1} \quad (4.128)$$

Es kann gezeigt werden, daß es eindeutig bestimmte $\alpha_r > 0$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so daß

$$\text{Im} a_r \varepsilon - \text{Re} a_r = \alpha_r (2q\varepsilon + q^2 - 1) \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}) \quad (4.129)$$

gilt. Es ist dann $\alpha_r = |a_r|/(q^2 + 1)$, und mit $A \stackrel{\text{def}}{=} \pi a \alpha_r q^2$ ergibt sich

$$-a \operatorname{Im} \frac{a_r}{E - E_r + i\Gamma} = -\frac{a \alpha_r}{\Gamma} \frac{2q\varepsilon + q^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} = -\frac{A}{\pi \Gamma q^2} \left[\frac{(q + \varepsilon)^2}{1 + \varepsilon^2} - 1 \right] \quad (4.130)$$

Auf der rechten Seite steht bei Vernachlässigung der Energieabhängigkeit von a die Definition einer Fano-Resonanz. q wird als Fano-Parameter bezeichnet.

Ist der Pol hinreichend nahe an der reellen Energieachse, so wird der Verlauf der Anregungsfunktion in der Nähe von $E = E_r$ durch die Resonanz bestimmt. Der additive Beitrag $-a \operatorname{Im} B$ liefert dann lediglich einen schwach veränderlichen „Untergrund“. Auf diese Weise treten die Resonanzen aus der Anregungsfunktion hervor. Demnach ist es das singuläre Verhalten von \tilde{R}_v^+ bei $E_r - i\Gamma$, das die Anregungsfunktion bei $E = E_r$ prägt.

Grundsätzlich kann das einfach zusammenhängende Definitionsgebiet von B über weitere einfache Polstellen von \tilde{R}_v^+ ausgedehnt werden. Dazu wird B so behandelt wie zuvor \tilde{R}_v^+ . Die Vorstellung ist, daß B durch die Vergrößerung seines einfach zusammenhängenden Definitionsgebietes auf I immer schwächer veränderlich wird und so die abgespaltenen Polstellen das Verhalten der Anregungsfunktion auf I bis auf einen in guter Näherung konstanten Untergrund beschreiben. Werden z. B. n Polstellen abgespalten, so ergibt sich eine Darstellung der Form

$$\sigma(E) = -a(E) \operatorname{Im} B(E) - a(E) \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{E - E_k + i\Gamma_k} \quad (4.131)$$

mit n Resonanzen, die durch einen geeigneten Satz $\{(a_k, E_k, \Gamma_k)\}_{k \in \{1, \dots, n\}}$ bestimmt werden, und dem Untergrund $-a \operatorname{Im} B$. Bei Vernachlässigung der Fluktuation des Untergrundes auf I ergibt sich mit dem Mittelwert σ_0 des Untergrundes auf I

$$\sigma(E) = \sigma_0 - a(E) \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{E - E_k + i\Gamma_k} \quad (4.132)$$

Für eine totale Anregungsfunktion mit dieser Darstellung gelten Ericsons Überlegungen ebenso wie für die partiellen Anregungsfunktionen in Abschnitt 2.2. Genauer ist der Originalarbeit von Ericson [Eri63] zu entnehmen.

Kapitel 5

Vakuumapparatur

Die Experimente am Atomstrahl werden in einem Hochvakuumbehälter durchgeführt (siehe Abbildung 5.1). Dieser besteht aus zwei Teilen: Einem *Helium-Bad-Kryostat* („Hauptbehälter“) und einem gewöhnlichen Hochvakuumbehälter, der den *Atomofen* enthält („Ofenbehälter“). Der Ofenbehälter ist an der Unterseite der Hauptbehälters über einen Zugschieber angeflanscht. Damit kann der Hauptbehälter vakuumdicht gegen den Ofenbehälter abgeschlossen werden. Jeder Behälter wird mit einer eigenen Turbomolekularpumpe¹ evakuiert. Zwischen Pumpe und Behälter ist je ein Federbalg zur Schwingungsdämpfung eingesetzt. Die Turbomolekularpumpen werden mit einer gemeinsamen Drehschiebervorpumpe² betrieben. Bei geschlossenem Zugschieber beträgt der erreichte Enddruck in beiden Behältern etwa $2 \cdot 10^{-6}$ mbar.

5.1 Helium-Bad-Kryostat

Ein Helium-Bad-Kryostat (siehe Abbildung 5.1) wird verwendet, um die aus Niob gefertigten Spulen des supraleitenden Magneten unter die kritische Temperatur abzukühlen. Diese liegt mit 9,2 K [Whi59] deutlich über dem Siedepunkt von flüssigem Helium (4,2 K [Whi59]).

Um den Heliumtank gegen Wärmestrahlung abzuschirmen, enthält der Hauptbehälter einen hohlzylinderförmigen Kühltisch, der mit flüssigem Stickstoff (Siedepunkt 77,3 K [Whi59]) befüllt werden kann. Die Oberseite des Hauptbehälters ist als Flansch ausgeführt. Der Heliumtank besteht aus übereinander angeordneten mit Rohren verbundenen Kammern. Er wird von oben in den Hauptbehälter eingesetzt und angeflanscht. Die untere Kammer enthält den Magneten. Sie hat Flanschöffnungen für die Laser und eine zylinderförmige Aussparung, die den Elektrodeneinsatz für das Atomstrahlexperiment aufnimmt. Zwischen den Kammern ist Platz für das Detektorsystem, das Teile enthält, die während des Betriebs auf einer Temperatur um 254 K gehalten werden müssen. Das während der Befüllung und im Zuge des Abdampfens anfallende Heliumgas wird über ein Rückführsystem aufgefangen und der erneuten Verflüssigung zugeführt.

¹beide Modell TPH 330 des Herstellers Arthur Pfeiffer Vakuumtechnik Wetzlar GmbH

²Modell DUO 030 A des Herstellers Arthur Pfeiffer Vakuumtechnik Wetzlar GmbH

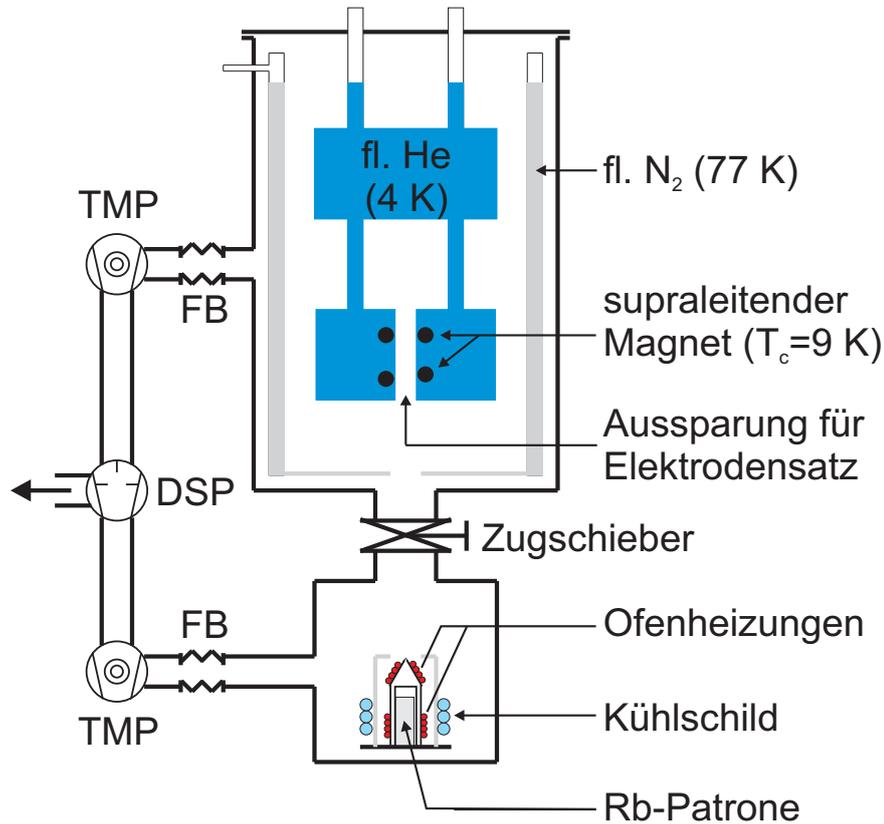


Abbildung 5.1: Die Vakuumapparatur im Überblick (schematisch): Helium-Bad-Kryostat (Hauptbehälter) und Ofenbehälter liegen über bzw. unter dem Zugschieber. Zur Hochvakuumherzeugung dienen zwei Turbomolekularpumpen (TMP), die über Federbalge (FB) mit Haupt- bzw. Ofenbehälter verbunden sind. Auspuffseitig wird das Vorvakuum durch eine Drehschiebervorpumpe (DSP) bereitgestellt.

Im Helium-Bad-Kryostat schirmt ein mit flüssigem Stickstoff („fl. N₂“) befüllter Kühlschild den Helium-Tank („fl. He“) gegen thermische Strahlung ab. Der Magnet ist aus Niob gefertigt und wird durch das ihn umgebende flüssige Helium unter die kritische Temperatur T_c für die Supraleitung gekühlt. Im Ofenbehälter ist der Atomofen von einem wassergekühlten Schild umgeben.

Die Verwendung eines Helium-Bad-Kryostaten bringt weitere Vorteile mit sich. Die kalten Oberflächen des Kühlschildes und insbesondere des Heliumtanks wirken als Kryopumpen, d. h. ein Teil des noch im Vakuumbehälter befindlichen Restgases kondensiert an diesen Flächen. Aus diesem Grund wird bei der Befüllung mit flüssigem Helium im Hauptbehälter selbst bei geöffnetem Zugschieber ein Druck erreicht, der mit etwa $2 \cdot 10^{-7}$ mbar um eine Größenordnung unter dem Enddruck im warmen Zustand liegt. Darüber hinaus kann thermische Strahlung bei hochangeregten Atome mit ihren dicht beieinander liegenden oder kontinuierlich verteilten Energiezuständen eher zu atomaren Übergängen führen. Bei Kühlung der Oberflächen nimmt die Intensität der von ihnen ausgehenden Wärmestrahlung ab [Whi59].

5.2 Atomofen

Der Atomofen liefert bei Erhitzung gasförmiges Rubidium. Der Atomstrahl wird später durch Kollimationsblenden aus diesem Gas erzeugt.

Rubidium ist ein silbern glänzendes Metall mit einem Schmelzpunkt von etwa 39°C [Lid90]. Da es sich bei Sauerstoffzutritt unter Bildung von RbO_2 ohne weiteres entzündet [HWW85], ist es stets in Schutzatmosphäre zu halten. Es kann als natürliches Isotopengemisch (^{85}Rb : 72,2%/ ^{87}Rb : 27,8% [Lid90]) in Glasampullen bezogen werden.

Der Atomofen ist im wesentlichen ein Zylinder, der von einer Stirnfläche („Unterseite“) mit einer Bohrung symmetrisch zur Zylinderachse ausgehöhlt wird, ohne den Zylinder voll zu durchstoßen. Von der entgegengesetzten Stirnfläche („Oberseite“) führt eine weitere Bohrung („Düse“) mit einem geringen Durchmesser von etwa 0,2 mm entlang der Zylinderachse in die Aushöhlung. Die große Bohrung an der Unterseite verfügt über ein Innengewinde, das das Einschrauben einer zylinderförmigen Patrone gestattet. Zur Befüllung des Atomofens wird das in der Ampulle befindliche Rubidium in einem Handschuhkasten unter Argonatmosphäre geschmolzen und zwischen 5 und 10 ml der Schmelze in die zylinderförmige Patrone gegeben. Nach der Erstarrung des Rubidiums wird die Patrone in den Atomofen eingeschraubt. An der Außenseite des Atomofens befinden sich zwei getrennte Heizwicklungen aus elektrisch isolierten Heizdrähten. Eine umwickelt den Ofen nahe der Unterseite, die andere befindet sich auf der Oberseite in der Nähe der Düse. Bei den Heizwicklungen sind Thermospannungselemente (Typ Chromel \oplus /Alumel \ominus) thermisch mit dem Ofenkörper verbunden. Bei Betrieb der unteren Heizung geht in der Patrone befindliches Rubidium in die Gasphase über und tritt durch die Düse an der Oberseite des Ofens aus. Um zu verhindern, daß Rubidium an der Düse kondensiert und so den Betrieb des Ofens beeinträchtigt, wird die Oberseite des Ofens auf einer höheren Temperatur gehalten als die Unterseite. Über die von den Thermoelementen erzeugten Thermospannungen können die beiden Temperaturen bestimmt werden. Die Experimente wurden bei einer Temperatur von etwa 440 K an der Unterseite und etwa 470 K an der Oberseite durchgeführt. Bei diesen Temperaturen reicht eine Füllung des Ofens aus, um das Experiment mehrere Monate zu betreiben.

Der Hauptbehälter enthält Teile des Experimentes, die vor Verunreinigungen durch kondensiertes Rubidium zu schützen sind:

1. An den Elektroden in der Photoabsorptionszone (siehe 5.3) führt kondensiertes Rubidium zur Ausbildung von Kontaktpotentialen, die die Messun-

gen beeinträchtigen können.

2. Die aktiven Oberflächen der Detektoreinheit können durch Oberflächenverunreinigungen bleibend beschädigt werden.
3. Ein leitender Rubidiumniederschlag kann in der Nähe von Hochspannungsdurchführungen zu Überschlägen führen.

Aus diesem Grund ist der Ofen weitgehend von einem wassergekühlten Kupferschild umgeben, der als Kühlfalle wirkt. Darüber hinaus wird der Zugschieber zwischen Ofen- und Hauptbehälter nur dann geöffnet, wenn der Atomstrahl benötigt wird.

Atomofen und Kupferschild befinden sich auf einem Kreuztisch. So kann die Düse bestmöglich auf die Kollimationsblenden ausgerichtet werden.

5.3 Atomstrahl- und Felderzeugung

Die Photoabsorptionsspektren erwiesen sich als sehr empfindlich gegen Änderungen der statischen Felder. Daher wurde bei der Felderzeugung großer Wert auf eine hohe Stabilität gelegt. Auf die Messung der Stärken von magnetischen Induktion und elektrischem Feld wird ausführlich in Kapitel 7 eingegangen.

5.3.1 Supraleitender Magnet

Der supraleitende Magnet befinden sich im unteren Heliumtank. Er besteht aus zwei in Reihe geschalteten Niobspulen in Helmholtz-Anordnung und verfügt über einen „supraleitenden Schalter“.

Bei dem „supraleitenden Schalter“ (siehe Abbildung 5.2) handelt es sich um einen die Spulen überbrückenden Niobdraht (Parallelschaltung), der mit Hilfe einer schaltbaren Heizung soweit erwärmt werden kann, daß über ihn keine Supraleitung mehr möglich ist ($T_s > T_c$). Dies erlaubt eine besondere Betriebsart für den Magneten, die für das Experiment sehr vorteilhaft ist und später beschrieben wird.

Mit dem Magneten können magnetische Induktionen bis zu einer Stärke von ungefähr 6 T erzeugt werden. Dazu müssen hohe Ströme durch die Spulen fließen, und zwar etwa 14,5 A/T. Die dafür benutzte Stromquelle³ ist über fingerdicke Kupferkabel und -röhren mit dem Magneten verbunden. Bei der Erzeugung statischer Magnetfelder wird die zeitliche Konstanz der magnetischen Induktion durch die Fluktuationen des von der Stromquelle gelieferten Stromes begrenzt. Der Hersteller spezifiziert die Langzeittoleranz des Ausgangsstromes (bei einer Temperatur von 25 ± 1 °C) mit ± 3 mA und die Temperaturdrift mit ± 3 mA/°C. Einer Änderung des Ausgangsstromes von 3 mA entspricht eine Änderung der Stärke der magnetischen Induktion von etwa 2 G. Diese Begrenzung kann durch den Einsatz des supraleitenden Schalters überwunden werden.

Die Wirkungsweise ergibt sich unmittelbar aus der Maschenregel für die aus Magnet und Schalter gebildete Schleife und der Knotenregel im Punkt P (siehe Abbildung 5.2):

$$L\dot{I}_m = -R_s I_s \quad (5.1)$$

$$I_q = I_m - I_s \quad (5.2)$$

³Modell IPS 120-10 des Herstellers Oxford Instruments

Sollen die Spulen von einem konstanten Strom der Stärke I_0 durchflossen werden, wird wie folgt vorgegangen:

1. Bei warmem Schalter ($T_s > T_c$) wird die von der Stromquelle gelieferte Stromstärke I_q bis zum Zielwert I_0 hochgefahren. Nach Erreichen des Zielwertes sind alle Ströme konstant und daher $I_s = -(L/R_s)\dot{I}_m = 0$ und $I_m = I_q = I_0$.
2. Die Heizung des Schalters wird abgeschaltet. Sobald der Schalter supraleitend wird ($T_s < T_c$), fällt über ihm keine Spannung mehr ab ($R_s = 0$). Dann ist $\dot{I}_m = 0$, und es bleibt $I_m = I_0$.
3. Die von der Stromquelle gelieferte Stromstärke wird auf Null heruntergefahren. Währenddessen bleibt der Spannungsabfall über dem Schalter Null und damit $I_m = I_0$. Aus der Knotenregel folgt, daß der Schalter von einem Strom der Stärke $I_s = I_m - I_q$ durchflossen wird. Für $I_q = 0$ A wird $I_s = I_m = I_0$.
4. Die Stromquelle wird abgetrennt. Nun ist der Strom der Stärke I_0 in der aus Magnet und Schalter gebildeten Schleife „eingefroren“.

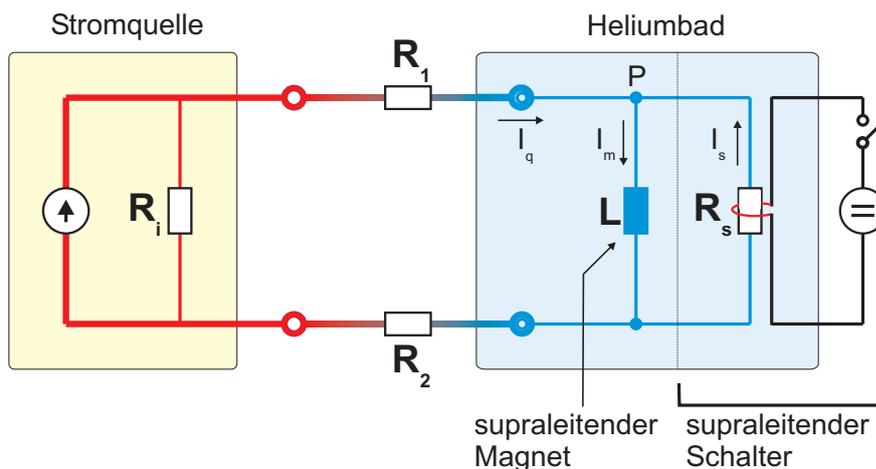


Abbildung 5.2: Der supraleitende Schalter (schematisch): Bei Betrieb der Heizung wird ein Teil des Schalters wärmer als die kritische Temperatur für die Supraleitung. Der Widerstand R_s nimmt dann einen endlichen Wert an. Die Ströme, die bei Betätigung des Schalters eine Rolle spielen, sind eingezeichnet.

Bei umgekehrtem Vorgehen wird der Magnet wieder entladen. Bei allen Messungen wird die magnetische Induktion auf diese Weise erzeugt. Für jedes gemessene Photoabsorptionsspektrum wird die tatsächliche Stärke der magnetischen Induktion unabhängig von der Stärke I_0 des anfangs eingepprägten Stromes spektroskopisch über die Zeeman-Verschiebung der Übergangsfrequenz für den optischen Pumpvorgang bestimmt (siehe 6.1). Damit sind die ermittelten Werte unabhängig von der strengen Gültigkeit der vorangegangenen Erklärungen zum supraleitenden Schalter.

Mit diesem Verfahren konnte eine geringfügige Abnahme der Stärke der magnetischen Induktion bei geschlossenem supraleitenden Schalter festgestellt werden. Sie beträgt etwa $-1,2 \cdot 10^{-4}$ während der Aufzeichnung eines Spektrums und ist vermutlich auf nicht supraleitende Verbindungen zwischen Schalter und Magnet zurückzuführen. Für die im Experiment verwandten Induktionsstärken bis etwa 2 T ist diese Abnahme allerdings geringer als die spezifizierte Langzeitdrift der Stromquelle. Da bei der Verwendung des supraleitenden Schalters auch das Rauschen des Stromes stark vermindert sein sollte, wird dieser Betriebsart der Vorzug gegeben. Der absolute Wert der magnetischen Induktionsstärke kann dann nur noch mit beschränkter Genauigkeit getroffen werden, der tatsächliche Wert sollte allerdings stabiler sein als beim Betrieb ohne supraleitenden Schalter.

5.4 Elektrodeneinsatz

Das eigentliche Atomstrahlexperiment findet im Elektrodeneinsatz statt. Dieser formt das aus dem Atomofen austretende Rubidiumgas zum Atomstrahl und erzeugt neben dem homogenen statischen elektrischen Feld am Ort, an dem sich Atomstrahl und Laser-Strahlen treffen, noch weitere statische Felder, die der Detektion der angeregten Atome dienen.

Der Elektrodeneinsatz wurde von Vorgängern am Experiment entwickelt [RW94] und konnte bis auf geringfügige Änderungen übernommen werden.

Die verschiedenen Bestandteile zur Erzeugung des Atomstrahls und der unterschiedlichen Felder sind in einen Messingzylinder eingebaut. Dieser hat einen Durchmesser von 35 mm und paßt in die zylinderförmige Aussparung des unteren Heliumtanks (siehe Abbildung 5.1). Elektrodeneinsatz und Heliumbad sind thermisch verbunden. Alle metallischen Teile des Elektrodeneinsatzes (Zylinder, Elektroden, Kollimationsblenden) sind aus Messing gefertigt. Übliche Messinglegierungen gelten als „nichtmagnetisch“ und sind deswegen anderen gängigen Werkstoffen vorzuziehen. Für Isolatoren zwischen den Elektroden wurde Teflon verwandt. Das Innere des Elektrodeneinsatzes besteht aus vier Abschnitten, die von den Atomen der Reihe nach durchflogen werden:

1. Atomstrahlerzeugung
2. Photoabsorptionszone
3. Feldionisationszone
4. Atomstrahlfänger

Im folgenden werden diese Abschnitte näher beschrieben. Photoabsorptions- und Feldionisationszone sind in Abbildung 5.3 dargestellt.

5.4.1 Atomstrahlerzeugung

Unmittelbar an der dem Atomofen zugewandten Stirnfläche des Zylinders beginnt die Atomstrahlerzeugung. Dazu dienen zwei Kollimationsblenden mit einem Durchmesser von etwa 200 μm und einem Abstand von 4,5 cm. Dem entspricht eine Winkeltoleranz von weniger als 5 mrad. Da die Blenden im thermischen Kontakt zum Heliumbad stehen, wird auftreffendes Rubidium sehr wirksam kondensiert.

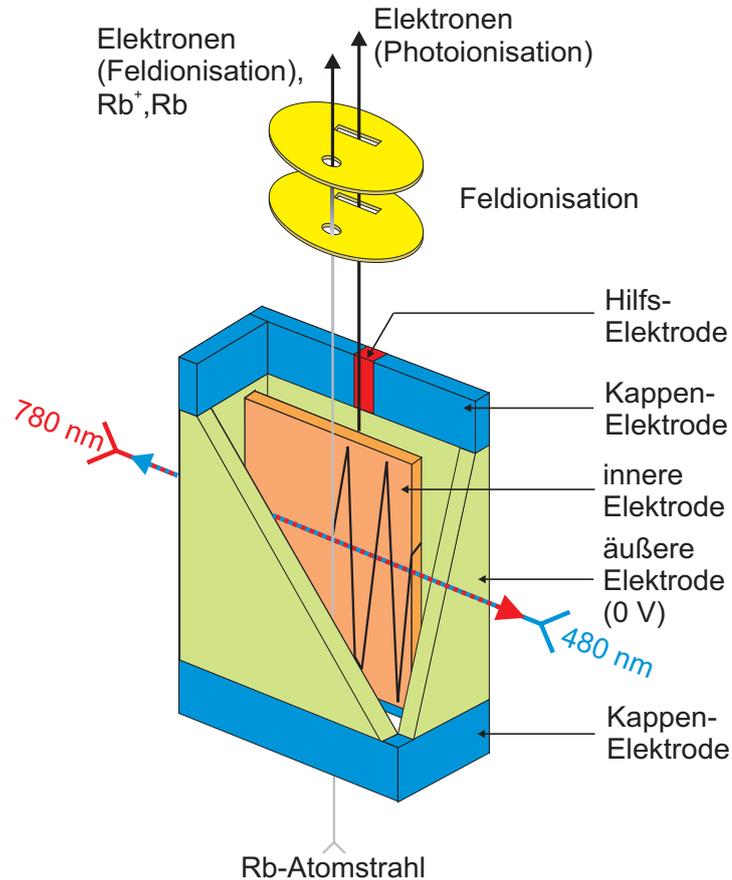


Abbildung 5.3: Photoabsorptions- und Feldionisationszone (schematisch): Je nachdem, ob ein durch Pumpstufe ($\lambda \sim 780$ nm) und Farbstoff-Laser ($\lambda \sim 480$ nm) angeregtes Elektron schnell oder langsam ionisiert, unterscheidet sich die Bewegung auf makroskopischer Skala. Ein langsam ionisierendes Elektron erreicht die Feldionisationszone zusammen mit dem Atomkern und wird dort abgesogen. Ein schnell ionisierendes Elektron führt die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift zuerst um die innere Elektrode. Dabei pendelt es zwischen den negativ geladenen Kappen-elektroden solange hin und her bis es in die Nähe der Hilfselektrode gelangt und dort in die Feldionisationszone eintritt. Klar ersichtlich ist die auf diese Weise bewirkte räumliche Trennung von langsam und schnell ionisierenden Elektronen.

5.4.2 Photoabsorptions- und Feldionisationszone

Das statische elektrische Feld, das mit der magnetischen Induktion die statischen äußeren Felder bildet, wird in einem Zylinderkondensator mit rechteckigem Querschnitt erzeugt. Die im Zentrum befindliche Elektrode („innere Elektrode“) hat ebenfalls rechteckigen Querschnitt. Sie wird auf ein negatives Potential gebracht, während die gegenüberliegenden Flächen des Zylinderkondensators („äußere Elektrode“) auf Kryostatenpotential (=Masse=Erde) liegen. Das elektrische Feld bildet sich damit senkrecht zur magnetischen Induktion aus (gekreuzte Felder). Der Abstand zwischen den Elektroden beträgt weniger als 3 mm. Die Kollimationsblenden für die Atomstrahlerzeugung sind so angebracht, daß der Atomstrahl das elektrische Feld parallel zu den Elektroden und etwa im selben Abstand von beiden Elektroden durchquert. Damit ist der Atomstrahl nur etwa 1,5 mm von den Elektroden entfernt. Mit besonderer Sorgfalt müssen daher Streupotentiale und Feldinhomogenitäten vermieden werden, die durch Verunreinigungen oder Beschädigungen der Elektrodenoberflächen verursacht werden. Dazu wurden die Elektroden mit einem möglichst gleichmäßigen Graphitüberzug versehen.

Der tatsächliche Abstand der Platten d und das vorhandene Streufeld E_0 wird bei abwesender magnetischer Induktion spektroskopisch über den Stark-Effekt im Rydberg-Bereich (hier $n \sim 39$) bestimmt. Hier wird die Hyperfeinstruktur vernachlässigbar [BS57], und der Einfluß des elektrischen Feldes kann als Stark-Effekt der Feinstruktur numerisch mit hoher Genauigkeit berechnet werden. Aus dem Vergleich von gemessenen und berechneten Photoabsorptionsspektren lassen sich d und E_0 berechnen. Die so gewonnenen Werte dienen als Eichparameter des Plattenkondensators und verknüpfen angelegte Spannung U und erzeugte elektrische Feldstärke E über die Formel

$$E = E_0 + \frac{U}{d} \quad (5.3)$$

Zur Bestimmung der Eichparameter wurde ein neues Verfahren entwickelt. Die ausführliche Darstellung findet sich in 7.2.2. Die auf diese Weise ermittelten Streufelder liegen unter 10 V/m. Nennenswerte zeitliche Änderungen der Eichparameter konnten nicht festgestellt werden.

Durch senkrecht zum Atomstrahl gesetzte Bohrungen werden die Laserstrahlen auf den Atomstrahl fokussiert. Die übrigen Bestandteile des Elektrodeneinsatzes dienen bereits dem Nachweis der angeregten Atome.

Ein statisches elektrisches Feld führt i. allg. dazu, daß angeregte Rubidiumatome ionisieren, d. h. daß sich das angeregte Elektron im zeitlichen Mittel vom Kern entfernt [Per83]. Wie schnell dies geschieht, hängt bei einem elektrischen Feld gegebener Stärke empfindlich von der Energie des angeregten Elektrons ab. Klassisch ist die Ionisation für Energien unterhalb des Stark-Sattels verboten. Die quantenmechanische Ionisation ist dann ein Tunnelprozeß und daher meist so langsam, daß für energetisch sehr niedrig liegende Zustände der spontane Zerfall viel wichtiger ist. Bei Energien in der Nähe des Stark-Sattels und darüber ändern sich die Verhältnisse. Hier beschleunigt sich die Ionisation und wird zu einem kennzeichnenden Merkmal der Elektronendynamik. Die Frage ist daher nicht ob Ionisation auftritt, sondern wie schnell sie ist. Dieser Umstand ist beim Nachweis von Anregungen in zweifacher Hinsicht von Bedeutung.

Für hochangeregte Zustände ist die spontane Zerfallsrate gering, da sich ihre Wellenfunktionen kaum mit denen niederenergetischer Zustände überlappen.

Gebundene Zustände haben dann eine dementsprechend lange Lebensdauer und können auf ihrem durch die Schwerpunktsbewegung des Atoms vermittelten Weg durch die Anordnung auch noch in makroskopischer Entfernung vom Anregungsort nachgewiesen werden. Dies geschieht im Experiment mit dem Feldionisationsverfahren: Hinter der Anregungszone befindet sich ein Plattenkondensator, dessen Platten senkrecht zur Atomstrahlrichtung ausgerichtet und mit Bohrungen versehen sind, die den Durchgang der Atome gestatten. Beim Betrieb der Feldionisationszone spielen zwei Zeitskalen eine Rolle: Diese sind durch die mittlere Zeiten τ_A bzw. τ_K gegeben, die die Atome benötigen, um vom Anregungsort in den Plattenkondensator zu gelangen bzw. diesen zu durchqueren. Auf der durch τ_A gegebenen Zeitskala dürfen die angeregten Zustände also weder schnell spontan zerfallen noch autoionisieren. Im Plattenkondensator wird durch Anlegen einer Spannung ein statisches Feld erzeugt, dessen Stärke so gewählt ist, daß im Vergleich zu τ_K angeregte Zustände sehr schnell und nicht angeregte Zustände sehr langsam ionisieren. Die Spannung muß so gepolt sein, daß ionisierende Elektronen in Richtung des Atomstrahls beschleunigt werden und so ihren Weg aus dem Plattenkondensator finden. Die Platte, durch die der Atomstrahl eintritt liegt auf Massepotential und schirmt so die Anregungszone gegen das Plattenkondensatorfeld ab. Wegen der leichten Ionisierbarkeit hochangeregter Zustände, reichen Feldstärken von einigen 10 kV/m für einen effizienten Betrieb aus.

Bei Messungen, bei denen die angeregten Zustände auf der durch τ_A gegebenen Zeitskala schnell ionisieren, müssen Anregungen anders nachgewiesen werden. Dies geschieht durch Auffangen der durch Ionisation freigesetzten Elektronen. Dazu dienen die „Kappenelektroden“ und die „Hilfselektrode“. Die Dynamik von Elektronen in gekreuzten homogenen statischen Feldern kann nichtrelativistisch geschlossen gelöst werden: Wird die z -Achse in Richtung der magnetischen Induktion und die y -Achse in Richtung des elektrischen Feldes gewählt, so ergibt sich für den Geschwindigkeitsvektor die allgemeine Lösung

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \eta \cos\left(\frac{eB}{mc}t + \varphi\right) + c\frac{E}{B} \\ \eta \sin\left(\frac{eB}{mc}t + \varphi\right) \\ v_{z,0} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Mit den Parametern η , φ und $v_{z,0}$. Die auf die $x-y$ -Ebene projizierte Bewegung ist also eine Überlagerung aus einer Zyklotronbewegung und einer gradlinigen gleichförmigen Bewegung mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}_d = c(E/B)\mathbf{e}_x = c(\mathbf{E}/B) \times (\mathbf{B}/B)$. Da die Zyklotronbewegung im zeitlichen Mittel keinen Beitrag liefert, wird \mathbf{v}_d als $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift bezeichnet. Sie hängt weder von den Anfangsbedingungen, noch von Masse oder Ladung ab. Im zeitlichen Mittel verläuft die gesamte Elektronenbewegung gradlinig und gleichförmig in einer Ebene parallel zu den Elektroden, die das elektrische Feld erzeugen. Jedenfalls so lange, bis das Elektron die Anordnung infolge der Anfangsgeschwindigkeit in z -Richtung verläßt. Werden daher oben und unten Kappenelektroden angebracht und auf ein hinreichend negatives Potential gebracht, so pendeln die Elektronen zwischen diesen Elektroden hin und her, während sie die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift um die innere Elektrode wandern läßt. Diese Anordnung ist dann eine Elektronenfalle und ähnelt der sog. Penning-Falle. Die Elektronen werden der Falle dadurch entzogen, daß die vor der Feldionisationszone befindliche Kappenelektrode auf der dem Anre-

gungsort gegenüberliegenden Seite zugunsten einer unabhängig ansteuerbaren „Hilfselektrode“ unterbrochen ist. Wird diese auf ein positiveres Potential als die Kappenelektroden gebracht, so können die Elektronen an dieser Stelle entkommen.

Der Feldionisationskondensator enthält einen Schlitz, durch den diese Elektronen in ihn eintreten können. Dort erfahren sie lediglich eine Beschleunigung in Atomstrahlrichtung. Insbesondere werden in der Anregungszone ionisierende Elektronen von denen räumlich getrennt, die in der Feldionisationszone von den Atomen abgesogen werden. Die beiden Elektronenströme verlassen den Feldionisationskondensator exzentrisch und ungefähr symmetrisch zur Symmetrieachse. Im Experiment werden die Kappenelektroden auf dasselbe negative Potential gebracht wie die innere Elektrode. Die Hilfselektrode liegt ungefähr auf Kryostatennasse.

5.4.3 Atomstrahlfänger

Der hinter dem Elektrodeneinsatz befindliche Detektor darf nicht von Rubidiumatomen oder -ionen getroffen werden. Deswegen befindet sich hinter der Feldionisationszone ein Atomstrahlfänger. Dabei handelt es sich um einen zylindrischen Einschub, der an der Stelle, an der der Atomstrahl sonst den Elektrodeneinsatz verlassen würde, einen Steg besitzt, an dem ein Röhrchen angebracht ist, das den Atomstrahl auffängt. Um die Elektronen sicher aus der Anordnung zu leiten, ist der Atomstrahlfänger gegen den Rest des Elektrodeneinsatzes isoliert und so gefertigt, daß er bis knapp an die Elektrode des Feldionisationskondensators heranreicht, aus der die Elektronen austreten. Der Atomstrahlfänger befindet sich auf einem positiveren Potential als diese Elektrode. Die Elektronen werden dann vom Atomstrahl weggezogen und so abgelenkt, daß sie in sicherer Entfernung vom Steg den Elektrodeneinsatz verlassen. Da die beiden Elektronenströme den Feldionisationskondensator exzentrisch und etwa symmetrisch zur Symmetrieachse verlassen, wird ihre räumliche Trennung vergrößert.

5.5 Elektronendetektor

Ein auf den Detektor auftreffendes Elektron wird zuerst mit drei hintereinandergeschalteten Mikrokanalplatten vervielfacht. Der so erzeugte pulsformige Elektronenstrom wird anschließend ortsauflösend nachgewiesen.

Eine Mikrokanalplatte („microchannel plate“, MCP) ist eine aus Glas gefertigte Scheibe, auf der eine große Anzahl (Größenordnung 10^6) Kapillaren angeordnet sind. Das die Kapillaren umgebende Glas hat aufgrund seiner Zusammensetzung Halbleitereigenschaften und einen hohen Sekundärelektronenerzeugungskoeffizienten. Auf Ober- und Unterseite der Scheibe sind leitenden Beschichtungen aufgedampft, die sie zu Elektroden machen. Bei Anlegen einer geeigneten Spannung (meist einige hundert Volt) zwischen den Elektroden, wirkt dann jede Kapillare wie ein einzelner Sekundärelektronenvervielfacher. Die Verstärkung (=Vervielfachung) liegt je nach Spannung im Bereich $10^2 \dots 10^4$. Durch Hintereinanderschalten mehrerer Platten (üblich sind zwei oder drei) kann die Verstärkung erhöht werden (näheres zu Mikrokanalplatten in [Wiz79]). Im Experiment werden drei Platten verwandt. Die Verstärkung liegt bei 10^7 . So werden aus einzelnen Elektronen pulsformige Elektronenströme erzeugt.

Zum Nachweis der Elektronenströme wird ein ortsauflösender Detektor („position-sensitive detector“, PSD) verwandt. Dabei handelt es sich um eine in Sperrichtung betriebene großflächige Photodiode von quadratischer Form. In der Mitte jeder Seiten des Quadrats besitzt die Anodenfläche einen Kontakt. Für auftreffende Elektronen hat der PSD eine Verstärkung (=Vervielfachung) von etwa 10^2 . Zusammen mit den Mikrokanalplatten wird also eine Verstärkung um 10^9 erreicht. Auf diese Weise entsteht im PSD ein pulsformiger Elektronenstrom.

Zwischen einem Punkt auf dem PSD und jedem einzelnen der vier Kontakte ist der ohmsche Widerstand proportional zur Entfernung. Beim Abfließen teilt sich der Elektronenstrom dementsprechend auf. Mit Hilfe eines Vorverstärkers, der im wesentlichen aus vier gleichen schnellen Differentiatoren besteht, deren Koppelkondensatoren an die Anodenkontakte angeschlossen sind, werden vier Signale erzeugt. Im Zuge der weiteren Verarbeitung ergibt sich ein digitales Signal für detektierte Pulse und ein aus zwei Spannungen bestehendes analoges Signal, das den Ort angibt, an dem der pulsformige Strom auf dem PSD erzeugt wurde. Mit solchen Anordnungen ist eine Ortsauflösung unterhalb von $100\ \mu\text{m}$ möglich. Die im Experiment verwandte Einheit aus Mikrokanalplatten, PSD und Auswertungelektronik ist eine Sonderanfertigung der Firma Hamamatsu Photonics K.K. Der Vorverstärker ist außen an den Hauptbehälter angeflanscht.

Im Experiment wurde beim Betrieb des Elektronendetektors eine reversible Effizienzverringerng beobachtet. Effizienzverringerngen bei Mikrokanalplatten sind bekannt und werden darauf zurückgeführt, daß Elektronen Bestandteile des Glases herauschlagen, die für die Sekundärelektronenerzeugung wesentlich sind [Wiz79]. Die im Experiment beobachtete Reversibilität der Effizienzverringerng könnte dadurch erklärt werden, daß in dem die Kapillaren umgebenden Glas Diffusionsvorgänge die Stoffe ersetzen, die durch Elektronenbeschuß herausgeschlagen wurden. Bei unmittelbar aufeinanderfolgender Messungen konnte eine Abnahme der mittleren Zählrate um bis zu 20% beobachtet werden. Dieser hohe Wert hat vermutlich zwei Ursachen. Zum ersten treffen die Elektronen je nach ihrem Weg durch die Photoabsorptionszone (siehe 5.3) an einem von zwei räumlich eng begrenzten Orten auf die MCP-Platten auf. Dies führt selbst bei verhältnismäßig geringer Gesamtzählrate (wenige kHz) zu einer starken Beanspruchung der dortigen Kapillaren. Zum zweiten sind die Mikrokanalplatten seit vielen Jahren im Einsatz. Falls in dieser Zeit in einem Bereich zu viele für die Sekundärelektronenerzeugung wichtige Bestandteile verloren wurden, ist trotz der Diffusionsvorgänge nur mit einer unvollständigen Wiederherstellung zu rechnen.

Mikrokanalplatten und PSD müssen bei einer Temperatur um 254 K betrieben werden. Deswegen befinden sie sich in einem nur zum Elektrodeneinsatz hin geöffneten thermisch isolierenden Teflonbehälter, der mit einer Heizwicklung versehen ist. Die Temperatur wird mit einem Thermowiderstand (PT100) gemessen.

Der Betrieb der Heizwicklung erzeugt ein schwaches magnetisches Streufeld. Das Streufeld ist am Anregungsort in guter Näherung kollinear zum Feld der supraleitenden Spule. Da für jedes Spektrum die tatsächliche Stärke der magnetischen Induktion gemessen wird, muß lediglich sichergestellt werden, daß sich das Streufeld während der Aufnahme eines Spektrums (Dauer etwa 7 min) nicht ändert. Eine vorhandene Zweipunktregelung wurde daher durch eine kontinuierliche Regelung ersetzt. Als Fehlersignal dient eine Spannung, die proportional ist zur Differenz aus tatsächlichem Wert und Sollwert des Thermowiderstandes. Das Fehlersignal wird mit einer Wheatstone-Brücke erzeugt, mit einem Instru-

mentenverstärker verarbeitet und stark tiefpaßgefiltert an die Heizwicklung angelegt. Während der Messungen ist die Schwankung des Heizstromes dann im Promillebereich.

Die Vorverstärkerelektronik war anfangs störungsanfällig. Diese Schwierigkeit konnte mit folgenden Maßnahmen behoben werden:

1. Neuer auf Störuneempfindlichkeit ausgerichteter Aufbau der Elektronik auf einer doppelt kaschierten Platine
2. Da die Vorverstärkerelektronik an den Hauptbehälter angeflanscht wird, ist sie einem beträchtlichen magnetischen Streufeld ausgesetzt. Daher wurde sie mit einem μ -Metall-Schirm versehen.

Diese Vorverstärkerelektronik zeichnet sich u. a. durch eine verminderte Dunkelzählrate aus. Sie beträgt nun etwa 1 Hz.

Kapitel 6

Laser-Aufbau

Der Laser-Aufbau hat zwei Aufgaben: Erzeugung frequenzstabilisierter Laser-Strahlung für die beiden Anregungsstufen und Messung ihrer absoluten Frequenz.

Für den Aufbau stand ein Laser-Tisch mit einer Granitplatte zur Verfügung. Um eine möglichst hohe passive Stabilität des Aufbaus zu gewährleisten, wurde die Optik unmittelbar auf der Granitplatte aufgebaut. Dort wo feste Verbindungen mit der Platte erwünscht waren, wurden Metallsockel durch Epoxidharz mit der Platte verklebt. Die Metallsockel enthalten Gewinde, in die Befestigungspfeiler mit einem Durchmesser von 15 mm eingeschraubt werden können. Eine Luftfilterungsanlage hält Staub und andere Partikel vom Laser-Aufbau fern. Einen Überblick über den Aufbau vermittelt Abbildung 6.1.

6.1 Optische Pumpstufe

Die optische Pumpstufe dient der Präparation eines atomaren Zustandes, dessen Photoabsorption in gekreuzten Feldern dann mit dem Farbstoff-Laser-Licht untersucht wird (vgl. 2.5). Sie gewährleistet, daß statt eines statistischen Gemisches nur ein reiner atomarer Ausgangszustand einen Beitrag zu den aufgezeichneten Photoabsorptionsspektren liefert. Auf diese Weise können die fundamentalen Eigenschaften der Atom-Feld-Wechselwirkungen besonders gut aufgelöst werden.

Die optische Pumpstufe wird mit einem Dioden-Laser in Littrow-Anordnung betrieben. Dazu muß die Frequenzdrift des Dioden-Lasers durch Stabilisierung unterdrückt werden.

Die natürliche Linienbreite Γ des gepumpten Übergangs (Hyperfeinstrukturübergang, genaueres siehe 6.1.1) beträgt 6 MHz, die Linienbreite des Dioden-Lasers etwa 1 MHz. Photoabsorptionsspektren können also nur dann zuverlässig aufgezeichnet werden, wenn die Frequenzeinstellgenauigkeit und die Frequenzdriften über die Meßdauer deutlich kleiner als 3 MHz sind. Der einfachste Weg wäre, die Laser-Frequenz auf maximale Fluoreszenz des Übergangs zu stabilisieren. Dies würde eine Öffnung in der Elektrodenanordnung erfordern, die zu Beeinträchtigungen der Feldgüte führen würde. Daher muß der Laser unabhängig von der Fluoreszenz stabilisiert werden. Hier wird klar, daß das Experiment hohe Anforderungen an die Stabilität von Laser-Aufbau und Felderzeugung stellt. Auf der Seite des Laser-Aufbaus müssen Einstellgenauigkeit und Drift der opti-

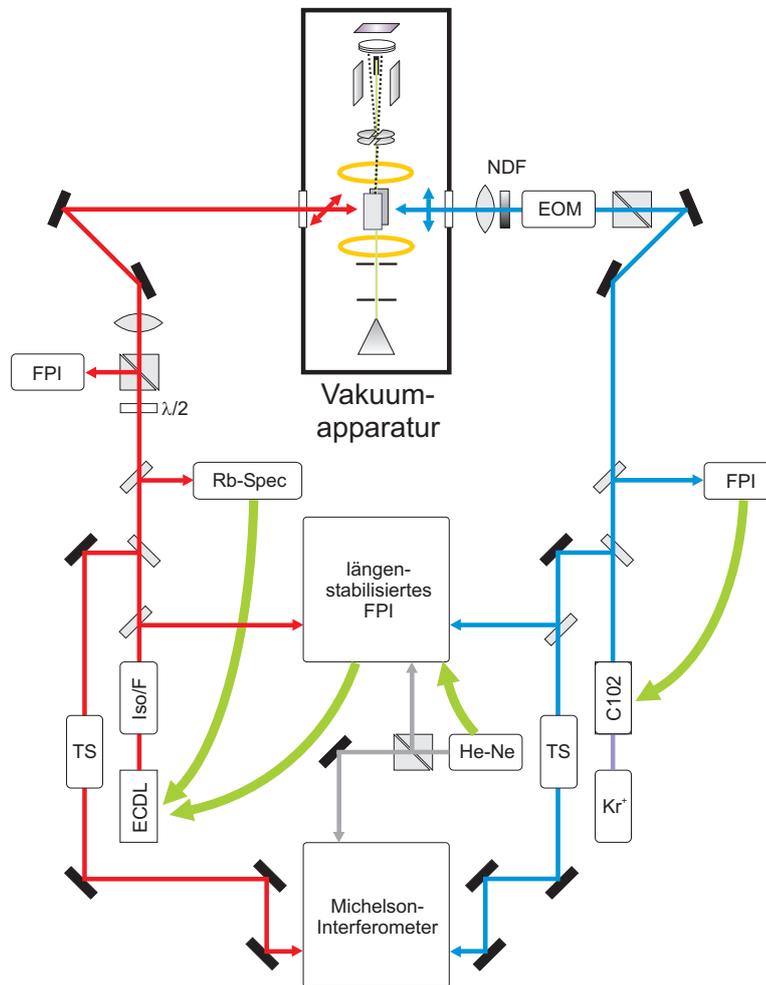


Abbildung 6.1: Laser-Aufbau und -Stabilisierung (grüne Pfeile): Im wesentlichen werden drei Laser verwendet. Ein polarisationsstabilisierter Helium-Neon-Laser (He-Ne) dient als Referenz für die absolute Frequenzmessung mit einem Michelson-Interferometer und zur Längenstabilisierung eines Fabry-Perot-Interferometers (FPI). Zum optischen Pumpen der Rubidiumatome dient ein Dioden-Laser in Littrow-Anordnung („extended cavity diode laser“, ECDL), der mit einem optischen Isolator (Iso) und einem Farbglasfilter (F) geschützt wird. Die Frequenz des Dioden-Lasers kann entweder auf maximale Transmission durch das längenstabilisierte FPI oder auf die „Lamb-Löcher“ einer Rubidium-Sättigungsspektroskopie (Rb-Spec) stabilisiert werden. Polarisation und Strahlleistung werden durch ein $\lambda/2$ -Plättchen und einen Polarisationsstrahlteilerwürfel (Glan-Taylor) eingestellt. Ein mit Coumarin 102 (C102) betriebener und von einem Krypton-Ionen-Laser (Kr^+) gepumpter Farbstoff-Laser liefert die Photonen für die Photoabsorptionsmessung am Atomstrahl. Zur Frequenzstabilisierung wird ein eigenes FPI verwendet. Die Polarisation wird mit einem elektro-optischen Modulator (EOM) eingestellt. Die Strahlleistung kann mit einem Neutraldichtefilter (NDF) abgeschwächt werden. Die absolute Frequenz beider Laser wird mit dem Michelson-Interferometer gemessen. Dabei werden die Strahlen mit Teleskopen (TS) kollimiert, um durch Beugungseffekte verursachte Fehler bei der Frequenzmessung zu verringern. Während der Aufzeichnung des Photoabsorptionsspektrums wird die Transmission des Farbstoff-Lasers durch das längenstabilisierte FPI gemessen. Dies liefert eine relative Frequenzmessung und dient der Frequenzzeichnung der Spektren.

schen Pumpstufe während der Messung von der Größenordnung der Linienbreite des Dioden-Lasers sein. Auf der Seite der Felderzeugung führt eine relative Änderung einer magnetischen Induktion von $1 \cdot 10^{-4}$ bei 2 T bereits zu einer Verschiebung der Übergangsfrequenz um 3 MHz.

Um die Drift der Dioden-Laser-Frequenz zu unterdrücken, wurden zwei unabhängige Stabilisierungen aufgebaut:

1. *Driftunterdrückung durch Koppelung an die Frequenz eines driftarmen Referenz-Lasers:* Die geringe Frequenzdrift eines Referenz-Lasers wird mit Hilfe eines längenabstimmbaren Fabry-Perot-Interferometers (FPI) und zwei Regelkreisen auf den Dioden-Laser übertragen. Ein Regelkreis stabilisiert die Länge des FPI auf maximale Transmission für den Referenz-Laser (Längenstabilisierung des FPI). Ein weiterer Regelkreis stabilisiert die Dioden-Laser-Frequenz auf maximale Transmission des Dioden-Lasers. Die möglichen Stabilisierungspunkte für die Dioden-Laser-Frequenz bilden zunächst eine äquidistante Folge und haben einen Abstand von 300 MHz (Modenabstand). Die geschickte Ausnutzung von Abgleichmöglichkeiten in der Fehlersignalerzeugung gestattet allerdings bei geschlossenem Regelkreis eine Feinabstimmung der Frequenz. Auf diese Weise wird ein Bereich von etwa ± 10 MHz um den eigentlichen Stabilisierungspunkt zugänglich. Dies ist für das Experiment von großer Bedeutung. Da die Übergangsfrequenz für den optischen Pumpvorgang einer Zeeman-Verschiebung von etwa 1,4 MHz/G unterliegt, und die Stärke der magnetischen Induktion verhältnismäßig frei gewählt werden kann, stellt es keine Beeinträchtigung dar, daß die Stabilisierung nur für Frequenzwerte aus voneinander getrennten Intervallen möglich ist.
2. *Driftunterdrückung durch Stabilisierung mit Hilfe einer Rubidium-Sättigungsspektroskopie:* Gewisse Messungen müssen bei verschwindender magnetischer Induktion durchgeführt werden. In diesem Fall fällt die Übergangsfrequenz der optischen Pumpstufe mit einem „Lamb-Loch“ der Sättigungsspektroskopie zusammen. Darüber hinaus liefert der so stabilisierte Dioden-Laser das Frequenznormal für die absolute Frequenzmessung.

Für die Stabilisierung wurden besondere elektronische Regelkreise entwickelt, die an die Anforderungen des Experimentes angepaßt sind. Das Fehlersignal wird dabei durch synchrone Demodulation erzeugt. Im Gegensatz zu herkömmlichen Regelkreisen wird hier eine Regelungsdynamik erreicht, die nicht mehr durch die Zeitkonstante der Demodulation begrenzt wird. Auf diese Weise können Driften auf einer Zeitskala bis in den ms-Bereich unterdrückt werden. Solche Regelkreise sind unseres Wissens nach bisher in dieser Form noch nicht benutzt worden. Sie werden später erläutert.

6.1.1 Beteiligte Hyperfeinstrukturzustände

Bei Abwesenheit äußerer Felder sind die gebundenen Hyperfeinstrukturzustände eines gegebenen Rubidiumisotops ($A = 85$ oder $A = 87$) eindeutig durch Angabe der Quantenzahlen n, l, j, f, m_f bestimmt. Dies liegt der Schreibweise $|^A\text{Rb}; n; l; j; f, m_f\rangle$ zugrunde. Eine Gesamtheit aller Zustände, die sich höchstens in ihrer m_f -Quantenzahl unterscheiden, heißt Hyperfeinstrukturmultipllett. Jedes Hyperfeinstrukturmultipllett ist also durch das Isotop und die Angabe der

Quantenzahlen n, l, j, f gekennzeichnet und wird mit $|^A\text{Rb}; n; l; j; f\rangle$ abgekürzt. Mit der Quantenzahl i des Kerneigendrehimpulses gilt

$$f \leq j + i \leq l + \frac{1}{2} + i \stackrel{\text{def}}{=} f_{\max}(l) \quad (6.1)$$

und es gibt genau einen Zustand mit Quantenzahlen $n, l, m_f = -f_{\max}(l)$. Dieser Zustand wird daher mit $|^A\text{Rb}; n; l; m_f = -f_{\max}(l)\rangle$ bezeichnet.¹ ^{85}Rb hat die Kerneigendrehimpulsquantenzahl $i = 5/2$. Damit ergibt sich für $n = 5$:

$$l = 0 \implies f_{\max} = 3 \quad (6.2)$$

$$l = 1 \implies f_{\max} = 4 \quad (6.3)$$

Bei der Untersuchung des Zeeman-Effekts der Hyperfeinstruktur offenbaren diese Zustände eine besondere Eigenschaft: Sind Quantisierungsachse und magnetische Induktion kollinear, so bleibt der Zustand $|n; l; m_f = -f_{\max}\rangle$ auch bei nichtverschwindender Stärke der magnetischen Induktion Eigenzustand des zugehörigen Hamilton-Operators² und die zugehörige Zeeman-Verschiebung ist

$$\mathcal{E}(n; l; m_f = -f_{\max}; B) - \mathcal{E}(n; l; m_f = -f_{\max}; 0) = -B \left[\mu_B \left(l + \frac{g_s}{2} \right) - \mu_K \frac{5g_i}{2} \right] \quad (6.4)$$

Dabei sind

$\mu_B = 13996,2418(42)$ MHz/T	Bohr-Magneton
$\mu_K = 7,6225914(23)$ MHz/T	Kern-Magneton
$g_e = 2,002319304386(20)$	elektronischer g -Faktor (bezogen auf μ_B)
$g_i = 1,35303$	Kern- g -Faktor (bezogen auf μ_K)

Im Experiment wird der Übergang zwischen zwei solchen Zuständen gepumpt, nämlich

$$|^{85}\text{Rb}; 5; 0; m_f = -3\rangle \longrightarrow |^{85}\text{Rb}; 5; 1; m_f = -4\rangle \quad (6.5)$$

Die entsprechende Übergangsfrequenz ν hängt dann nach (6.4) auf sehr einfache Weise von der Stärke der magnetischen Induktion ab:

$$\nu(B) = \nu_0 - \mu_B B \quad (6.6)$$

Dabei ist $\nu_0 = \nu(0)$ aus spektroskopischen Experimenten mit einem Fehler von 0,4 MHz bekannt [BGR91]:

$$\nu_0 = 12816,507037(2) \text{ cm}^{-1} \quad (6.7)$$

Bei gekreuzten Feldern ist $|^{85}\text{Rb}; 5; l; m_f = -f_{\max}(l)\rangle$ nicht mehr strenger Eigenzustand des zugehörigen Hamilton-Operators. Wenn er nicht entartet ist, verschwindet allerdings bei der störungstheoretischen Behandlung des zusätzlichen homogenen statischen elektrischen Feldes die Korrektur erster Ordnung:

$$\langle ^{85}\text{Rb}; 5; l; m_f = -f_{\max}(l) | eE_0 y | ^{85}\text{Rb}; 5; l; m_f = -f_{\max}(l) \rangle = 0 \quad (6.8)$$

¹Entsprechendes gilt für $m_f = +f_{\max}(l)$.

²Dies gilt nur, wenn der diamagnetische Zeeman-Effekt vernachlässigt wird.

Dies ergibt sich z. B. mit dem Satz von Wigner-Eckart. Bei Messungen in gekreuzten Feldern ist die magnetische Induktion stets so stark, daß davon ausgegangen werden kann, daß die am optischen Pumpvorgang beteiligten Zustände nicht entartet sind (Paschen-Back-Bereich). Der Einfluß des elektrischen Feldes auf die Pumpstufe wird dann vernachlässigt.

Es werden auch Messungen bei verschwindender magnetischer Induktion durchgeführt. Dabei wird ebenfalls optisch gepumpt. Die Hyperfeinstrukturmultipletts sind dann entartet und die optische Pumpstufe treibt alle erlaubten Übergänge zwischen Zuständen aus den beiden beteiligten Multipletts. Allerdings kann auch in diesem Fall der Einfluß des elektrischen Feldes vernachlässigt werden. Wird die Quantisierungsachse kollinear zum elektrischen Feld gewählt, dann gilt für zwei Hyperfeinstrukturzustände desselben Multipletts

$$\langle {}^{85}\text{Rb}; 5; l; j; f, m'_f | eE_0 y | {}^{85}\text{Rb}; 5; l; j; f; m_f \rangle = 0 \quad (6.9)$$

Das auftretende Matrixelement kann nämlich unter Verwendung des Satzes von Wigner-Eckart als Linearkombination der Matrixelemente

$$\langle {}^A\text{Rb}; 5; l, m_l | eE y | {}^A\text{Rb}; 5; l, m_l \rangle \quad (m_l \in \{-l, \dots, l\}) \quad (6.10)$$

geschrieben werden, und diese sind sämtlich Null wegen der definierten Parität der auftretenden Zustände. Damit verschwindet die störungstheoretische Korrektur erster Ordnung auch in diesem Fall. Der Einfluß des elektrischen Feldes auf die Pumpstufe wird daher stets vernachlässigt.

Die Frequenz ν_0 aus (6.7) entspricht einer Vakuumwellenlänge von etwa 780,24 nm. Um die auf unterschiedliche Stärken der magnetischen Induktion abstimmbare Laser-Strahlung bereitzustellen, wurde ein Dioden-Laser-System³ bei 780 nm verwandt.

Littrow-Anordnung

Bei Laser-Dioden bildet das Diodenmaterial dank geeigneter Beschichtungen einen Laser-Resonator, in dem bei hinreichender Stromstärke Laser-Strahlung erzeugt wird. Die optische Weglänge des Resonators hängt von Temperatur und Stromstärke ab.

Die Optik des hier benutzten Lasers besteht darüber hinaus aus einer Littrow-Anordnung. Dabei wird die Beugung an einem Reflektionsgitter ausgenutzt, um das Verstärkungsprofil für das Laser-Licht zu beeinflussen. Wie dies geschieht soll kurz erläutert werden. Sei d die Gitterkonstante. Die y -Achse weise in Richtung der Gitternormalen und die x -Achse senkrecht zu den Gitterlinien. Fällt eine linear polarisierte monochromatische ebene Welle der Wellenlänge λ so auf das Reflektionsgitter, daß ihr Wellenvektor in der $x - y$ -Ebene liegt, und sei der Winkel α gemäß $k_x = \sin \alpha$ definiert, dann gilt für den entsprechenden Winkel α_p des Wellenvektors des gebeugten Lichtes p -ter Ordnung

$$(\sin \alpha_p - \sin \alpha) = p \frac{\lambda}{d} \quad (6.11)$$

Für gebeugtes Licht nullter Ordnung gilt also „Einfallswinkel=Ausfallswinkel“. Die Bedingung, daß das gebeugte Licht p -ter Ordnung in die einfallende Welle

³Modell DL 100 L der Firma TOPTICA Photonics GmbH

zurückfällt, d. h. daß $\sin \alpha_p = -\sin \alpha$ ist, wird genau für die Wellenlänge

$$\lambda_p(\alpha) = \frac{2}{p} d \sin \alpha \quad (6.12)$$

erfüllt. In der Littrow-Anordnung wird der Anstellwinkel des Gitters so gewählt, daß die Wellenlänge $\lambda_1(\alpha)$ ($p = 1$) im Verstärkungsprofil der Laser-Diode liegt. Für $p > 1$ trifft dies dann nicht mehr zu. Das Verstärkungsprofil der Littrow-Anordnung bevorzugt also die Wellenlänge $\lambda_1(\alpha)$, die über den Anstellwinkel des Gitters verschoben (durchgestimmt) werden kann.

Wird umgekehrt einer gegebenen Wellenlänge λ der Winkel α zugeordnet, für den $\lambda = \lambda_1(\alpha)$ gilt, so heißt der Winkel α Littrow-Winkel. Im Experiment ist die Liniendichte des Gitters 1800 /mm und für $\lambda = 780,24$ nm ergibt sich der Littrow-Winkel $\alpha = 44,605^\circ$. Nach Herstellerangabe ist der über Verstellung des Gitterwinkels zugängliche Wellenlängenbereich 774 . . . 785 nm.

Der Anstellwinkel des Gitters kann über Feinmechanikschrauben und piezoelektrisch verstellt werden. Um eine vorgegebene Wellenlänge λ zu treffen, muß zuerst das Verstärkungsprofil der Littrow-Anordnung so verschoben werden, daß λ nahe bei maximaler Verstärkung liegt (Grobeinstellung, Einstellfehler $\lesssim 0,1$ nm). Danach werden Diodenstrom und Gitterstellung so abgeglichen, daß die Modenstruktur der als Resonator aufgefaßten Littrow-Anordnung die gewünschte Wellenlänge liefert. Mitunter muß auch die Temperatur angepaßt werden. Die Linienbreite beträgt bei Littrow-Anordnungen im Einzelmodenbetrieb nach Herstellerangabe üblicherweise 0,8 MHz in 1 ms. Im Experiment können nach einmal vorgenommener Grobeinstellung alle benötigten Wellenlängen durch Veränderung von Temperatur, Diodenstrom und piezoelektrischer Spannung bereitgestellt werden.

Der Dioden-Laser-Strahl ist wie üblich astigmatisch, d. h. sein Querschnitt weist eine elliptische Intensitätsverteilung (Strahlprofil) auf, die durch unterschiedliche Strahltaillen entlang der Hauptachsen dieser Ellipse beschrieben wird. Dies führt z. B. zu einer unterschiedlichen Divergenz des Strahls in Richtung der Hauptachsen und muß bei Beugungseffekten beachtet werden.

6.1.2 Driftunterdrückung

Es kommen zwei verschiedene Verfahren zur Unterdrückung der Dioden-Laser-Frequenzdrift zum Einsatz. Beide Verfahren erfordern elektronische Regelkreise, deren Einzelheiten später dargestellt werden.

Driftunterdrückung durch Koppelung an einen Referenz-Laser

Die geringe Frequenzdrift eines Referenz-Lasers wird mit Hilfe eines längenabstimmbaren Fabry-Perot-Interferometers und zwei Regelkreisen auf den Dioden-Laser übertragen. Dieses Stabilisationsverfahren wird bei Messungen mit magnetischer Induktion verwandt.

Als Referenz-Laser dient ein polarisationsstabilisierter Einzelmoden-Helium-Neon-Laser⁴ (He-Ne-Laser). Frequenz-, Moden- und Drifteigenschaften sind Tabelle 6.1 zu entnehmen.

⁴Model 200 Single Frequency HeNe Laser des Herstellers Coherent, Inc.

Frequenz	(Einzelmode)	632,8 nm
Linienbreite		~ 1 MHz
Modenstruktur		TEM ₀₀
Polarisation		linear
Frequenzdrift	(kurzzeitig)	$\leq \pm 1$ MHz/5 min
Frequenzdrift	(langfristig)	5 MHz/°C

Tabelle 6.1: Spezifikationen des Referenz-Lasers (Model 200 Single Frequency HeNe Laser des Herstellers Coherent, Inc.): Aufgeführt sind die Herstellerangaben zu Frequenz-, Moden- und Driteigenschaften.

Das verwandte Fabry-Perot-Interferometer⁵ (FPI) hat sphärische Spiegel mit einem Krümmungsradius $r = 50$ cm und einem Abstand l , der sehr knapp unter r liegt („stabile konfokale Anordnung“). Zur Längenabstimmung ist einer der Spiegel auf einen piezoelektrischen Kristall (PZT) aufgeklebt und kann über die angelegte Spannung um bis zu 1 μ m verschoben werden. Die Röhre zwischen den Spiegeln ist hermetisch gegen die Umgebung versiegelt und aus Super-Invar gefertigt, das sich durch einen sehr geringen linearen Temperatursdehnungskoeffizienten ($\leq 0,36 \cdot 10^{-6}$ /°C) auszeichnet. Darüber hinaus wird die Temperatur der Röhre aktiv stabilisiert. Der Hersteller spezifiziert eine Temperaturstabilität von 0,01 °C. Die Finesse bei der Referenz-Laser-Frequenz beträgt laut Spezifikation mindestens 125, für die Dioden-Laser-Frequenz ist sie deutlich geringer.

Um zu erklären, wie sich die Driteigenschaften des He-Ne-Lasers auf den Dioden-Laser übertragen lassen, wird von der Resonanzbedingung [Yar75] für Gauß-Hermite-Moden im FPI ausgegangen. Danach tritt maximale Transmission durch das FPI genau dann auf, wenn für Frequenz ν , Modenstruktur TEM _{$\alpha\beta$} und Länge des FPI d

$$q\pi = \frac{2\pi n(\nu)}{c}\nu l - 2(\alpha + \beta + 1) \arctan \sqrt{\frac{l}{2r - l}} \quad (6.13)$$

mit einer ganzen Zahl q gilt (n ist der Brechungsindex des Mediums im FPI, in diesem Fall Luft). Die Driftunterdrückung beruht auf den folgenden zwei Möglichkeiten, die Resonanzbedingung (6.13) zu erfüllen:

1. Für festes ν (Referenz-Laser) durch Änderung von d
2. Für festes d durch Änderung von ν (Dioden-Laser)

Beide Laser werden durch das FPI justiert. Mit Interferenzfiltern versehene Photoverstärker wandeln die beiden transmittierten Strahlleistungen in Spannungen („Transmissionssignale“) um. Ein Regelkreis (FPI-Stabilisierung) maximiert

⁵Modell CFT-500P des Herstellers Burleigh Instruments, Inc.

das Transmissionssignal des Referenz-Lasers durch Änderung der Länge d des FPI. Ein weiterer Regelkreis (Dioden-Laser-FPI-Stabilisierung) maximiert das Transmissionssignal des Dioden-Lasers durch Änderung von dessen Frequenz (genauer: Änderung der PZT-Spannung am Gitter der Littrow-Anordnung).

Um ein möglichst gutes Signal-zu-Rausch-Verhältnis der Transmissionssignale zu erreichen, werden beide Laser so durch das FPI justiert, daß die Lasermoden bestmöglich an die TEM₀₀ Mode im FPI angeglichen werden (Modenanpassung, „mode matching“). Dazu dient eine Linse vor dem Eingangsspiegel des FPI, durch die beide Laser in das FPI eingekoppelt werden. Die Güte der Justierung kann wie folgt geprüft werden: Bei offenem Regelkreis überstreicht die PZT-Spannung rampenförmig einen Bereich. Das von dieser Spannung abhängige Transmissionssignal wird mit Hilfe eines Oszilloskops im x - y -Betrieb ausgegeben (PZT-Spannung: x ; Transmissionssignal: y). Wird in der Resonanzbedingung (6.13) die schwache Längenabhängigkeit des arctan-Terms vernachlässigt und dieser Term durch seinen Wert für $l = r$ ersetzt, so ergibt sich die Näherung

$$\frac{\lambda}{2} \left[q + \frac{1}{2} (\alpha + \beta + 1) \right] = l \quad (6.14)$$

Demnach gibt es zwei Arten von Spitzen im Transmissionssignal: Moden mit geradem $\alpha + \beta$ verursachen Spitzen bei $2l = \lambda q + 1/2$, solche mit ungeradem $\alpha + \beta$ bei $2l = \lambda q$. Bei guter Modenanpassung wird daher jedes zweite Maximum des Transmissionssignals stark unterdrückt. Das Maß der Unterdrückung ist der Unterdrückungsfaktor, d. i. das Verhältnis der transmittierten Leistung bei nicht unterdrückten und unterdrückten Maxima. Im Experiment beträgt der Unterdrückungsfaktor für den Referenz-Laser ungefähr 100. Für den Dioden-Laser können die unterdrückten Maxima bei guter Justierung nicht mehr aufgelöst werden. Dies liegt an der deutlich geringeren Finesse im Infraroten. Ein Einfluß des Astigmatismus des Dioden-Laser-Strahls konnte nicht festgestellt werden. Für die folgenden Betrachtungen können daher höhere FPI-Moden vernachlässigt und in der Resonanzbedingung (6.13) $\alpha = \beta = 0$ gesetzt werden.

Werden die beiden Regelkreise nacheinander geschlossen, so bestehen mit den Bezeichnungen $\nu_0 = \nu_{\text{HeNe}}$, $\nu = \nu_{\text{Diode}}$ gleichzeitig die folgenden Bedingung:

$$q_0\pi = \frac{2\pi n(\nu_0)}{c} \nu_0 l - 2 \arctan \sqrt{\frac{l}{2r-l}} \quad (6.15)$$

$$q\pi = \frac{2\pi n(\nu)}{c} \nu l - 2 \arctan \sqrt{\frac{l}{2r-l}} \quad (6.16)$$

Die erste Gleichung legt l in Abhängigkeit von ν_0 fest und die zweite Gleichung ν :

$$l = l(\nu_0) \quad (6.17)$$

$$n(\nu) \nu - n(\nu_0) \nu_0 = \frac{c}{2l(\nu_0)} (q - q_0) \quad (6.18)$$

In die Bestimmungsgleichungen (6.15) und (6.18) geht der Brechungsindex im Interferometer ein. Dieser hängt neben der Frequenz auch vom Druck p und der Temperatur T ab. Damit ist auch ν eine Funktion von ν_0 , p und T :

$$\nu = \nu(\nu_0; p, T) \quad (6.19)$$

Das vollständige Differential der Funktion ν im Arbeitspunkt liefert die Abschätzung, wie gut die Drift des Dioden-Lasers unterdrückt wird. Die partiellen Ableitungen $\partial\nu/\partial\nu_0$, $\partial\nu/\partial p$, $\partial\nu/\partial T$ werden mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen in Anhang A bestimmt. Für die Beschreibung des Brechungsindex von Luft als Funktion von Frequenz, Druck und Temperatur wird dort auf die empirische Formel von Edlen (siehe Anhang A.1, [Lid90]) zurückgegriffen. Hier werden nun die Werte für einen nahe an den experimentellen Bedingungen liegenden Arbeitspunkt angegeben. Dieser wird durch folgende Werte festgelegt:

$$\nu_0 = \nu_{\text{HeNe}} = 632,8 \text{ nm} \quad (6.20)$$

$$\nu = \nu_{\text{Diode}} = 780,24 \text{ nm} \quad (6.21)$$

$$p = 1000 \text{ hPa} \quad (6.22)$$

$$T = 25 \text{ °C} \quad (6.23)$$

Die Anwendung der Ergebnisse aus Anhang A liefert:

$$d\nu_{\text{Diode}} = 0,81 \cdot d\nu_{\text{HeNe}} + 0,50 \text{ MHz} \cdot \frac{dp}{\text{hPa}} - 1,7 \text{ MHz} \cdot \frac{dT}{\text{°C}} \quad (6.24)$$

Hier wird klar, wie wichtig die hermetische Versiegelung und aktive Temperaturstabilisierung des Interferometers ist. Im stabilisierten Zustand überträgt sich also im wesentlichen die um den Faktor 0,81 gedämpfte Drift des Referenz-Lasers auf den Dioden-Laser.

Driftunterdrückung durch Koppelung an ein Sättigungsspektroskopiesignal

Eine Sättigungsspektroskopie mit einer Rubidiumzelle gestattet die Stabilisierung der Dioden-Laser-Frequenz auf den optischen Pumpübergang bei verschwindender magnetischer Induktion. Darüber hinaus liefert die damit bereitgestellte Laser-Frequenz das Frequenznormal für die absolute Frequenzmessung.

Die Zelle enthält Rubidium im natürlichen Isotopengemisch (siehe 5.2). Sie ist zylinderförmig und hat eine Länge von etwa 10 cm. Die Sättigungsspektroskopie hat den üblichen Aufbau. Ein Teil des Dioden-Laser-Strahls wird über einen Strahlteiler ausgekoppelt, zur Strahlaufweitung durch ein Teleskop justiert und anschließend erneut geteilt. Einer der so erzeugten Strahlen wird entlang der Zylinderachse durch die Zelle justiert („Pumpstrahl“). Der andere Strahl wird stark abgeschwächt („Probenstrahl“) und gegenläufig mit dem Pumpstrahl in der Zelle überlappt. Die Transmission dieses Strahls wird mit einem Photoverstärker in eine Spannung (Transmissionssignal) umgewandelt. Diese Spannung ist das Sättigungssignal. Tatsächlich sind Pump- und Sättigungsstrahl leicht gegeneinander verkippt, um den Sättigungsstrahl leichter mit einem Photoverstärker auffangen zu können.

Das Sättigungssignal für die D2-Übergänge ($5s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$) der beiden Rubidiumisotope besteht aus zwei Beiträgen:

1. *Doppler-verbreiteter Untergrund:* Wird der Sättigungsstrahl abgedeckt, so ist das Transmissionssignal des Probenstrahls ein Doppler-verbreitetes (invertiertes) Photoabsorptionssignal. In diesem sind Übergänge nur dann getrennt aufgelöst, wenn sie entweder zu unterschiedlichen Isotopen gehören oder unterschiedliche f -Quantenzahl des Grundzustandes haben.

Hingegen geht die Hyperfeinstruktur des $5p_{3/2}$ -Zustandes in der Doppler-Verbreiterung unter. Da es zwei Isotope gibt (^{85}Rb und ^{87}Rb) und für jedes von diesen zwei f -Quantenzahlen des $5s_{1/2}$ -Zustandes, besteht das Spektrum aus vier Maxima.

2. „Lamb-Löcher“: Geht auch der Sättigungsstrahl durch die Zelle, tauchen Spitzen in dem Doppler-verbreiterten Transmissionssignal des Probenstrahls auf. Diese sind die eigentlich interessanten Bestandteile des Sättigungssignals und werden als „Lamb-Löcher“ (hier besser „Lamb-Spitzen“) bezeichnet. Sie entstehen dadurch, daß Atome nur dann Photonen aus dem Probenstrahl absorbieren können, wenn sie sich nicht bereits in einem angeregten Zustand befinden. Gegenüber dem Transmissionssignal des Probenstrahls ohne Sättigungsstrahl kommt es dann bei den Frequenzen zu einer verminderten Absorption (=erhöhte Transmission), bei denen es viele Atome gibt, die sowohl aus dem Sättigungsstrahl als auch aus dem Probenstrahl mit nennenswerter Wahrscheinlichkeit absorbieren. Damit diese Bedingung erfüllt ist, muß im Schwerpunktssystem des Atoms die Frequenz des Probenstrahls ν_p ebenso bei einer Übergangsfrequenz liegen wie die Frequenz des Sättigungsstrahls ν_s . Die beiden Übergangsfrequenzen ν_1, ν_2 können unterschiedlich sein:

$$\nu_p = \nu_1 \quad \nu_s = \nu_2 \quad (6.25)$$

ν_p, ν_s gehen durch Doppler-Verschiebung aus der Frequenz im Laborsystem ν hervor. Mit den Bezeichnungen

$$V_p \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{V} \cdot \frac{\mathbf{k}_p}{k_p} \quad (6.26)$$

$$V_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{V} \cdot \frac{\mathbf{k}_s}{k_s} \quad (6.27)$$

gilt in nichtrelativistischer Näherung bis zur ersten Ordnung in V gemäß (3.26)

$$\nu \left(1 - \frac{V_p}{c} \right) = \nu_1 \quad (6.28)$$

$$\nu \left(1 - \frac{V_s}{c} \right) = \nu_2 \quad (6.29)$$

Bei exakt gegenläufigen Strahlen $\mathbf{k}_s = -\mathbf{k}_p$ ergibt sich sofort

$$\nu = \frac{1}{2} (\nu_1 + \nu_2) \quad (6.30)$$

und im Falle $\nu_1 = \nu_2$ wird auch $\nu = \nu_1 = \nu_2$ und es gilt

$$V_p = V_s = 0 \quad (6.31)$$

Es handelt sich also um ein Doppler-freies Signal. Die zusätzlichen Signale bei den arithmetischen Mitteln unterschiedlicher Übergangsfrequenzen werden als Kreuzungssignale („cross-over signals“) bezeichnet.

Wenn die beiden Strahlen nicht mehr exakt gegenläufig sind, dann sind für $\nu_1 = \nu_2$ die Bedingungen (6.28) und (6.29) gleichbedeutend mit $V_p =$

V_s . Damit ist das Signal nicht mehr vollkommen Doppler-frei. Aus der Invarianz der Bedingung $V_p = V_s$ unter Geschwindigkeitsumkehr und der Isotropie der Geschwindigkeitsverteilung der Atome folgt allerdings mit (6.28) oder (6.29), daß das Loch im Sättigungssignal nach wie vor eine Mittelfrequenz von ν hat. Es tritt allerdings eine Verbreiterung auf.

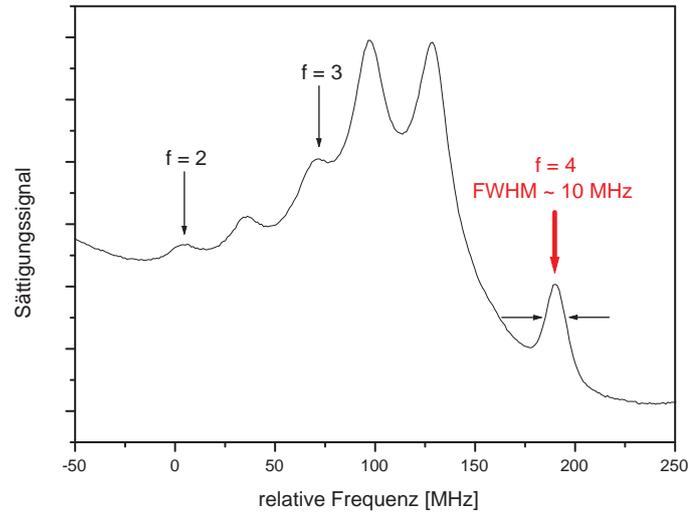


Abbildung 6.2: Gemessenes Sättigungsspektrum der ^{85}Rb -D2-Hyperfeinstrukturübergänge mit $f_0 = 3$: Gemessenen wurde das Sättigungssignal in Abhängigkeit von der PZT-Spannungen des Gitters in der Littrow-Anordnung. Diesen Spannungen wurden mit Hilfe spektroskopischer Daten [BGR91] relative Frequenzen zugeordnet. Alle sechs theoretisch erwarteten Spitzen werden aufgelöst. Die Spitzen bei den drei Übergangsfrequenzen für die Anregung der Zustände $|5p_{3/2}; f = 2, 3, 4\rangle$ sind gekennzeichnet. Bei dem arithmetischen Mittelwert von je zwei solchen Übergangsfrequenzen tritt ein Kreuzungssignal auf. Der im Experiment optisch gepumpte Übergang ist mit roter Farbe hervorgehoben. Die experimentelle Linienbreite beträgt etwa 10 MHz (FWHM).

Demnach sollten bei den Übergangsfrequenzen Lamb-Löcher mit einer Breite nahe bei den entsprechenden natürlichen Linienbreiten möglich sein. Die tatsächlich erreichte Breite wird u. a. durch die geringfügige Verkipfung von Sättigungs- und Probenstrahl sowie die Sättigungsverbreiterung des Probenstrahls beschränkt [Dem98].⁶ Zur Verminderung der Sättigungsverbreiterung werden Sättigungs- und Probenstrahl stark aufgeweitet (Durchmesser etwa 4 mm). Bei gleicher Strahlleistung sinkt dann die Intensität während mehr Atome zum Signal beitragen. Im Experiment wurde der Kontrast des Lamb-Loches für den gewünschten Übergang über die Strahlleistung optimiert.

⁶Zu weiteren Verbreiterungsmechanismen bei Sättigungsspektroskopie an Rubidium siehe [BGR91].

Die tatsächliche Frequenz, an der sich das Lamb-Loch der Sättigungsspektroskopie befindet, sollte möglichst wenig von der feldfreien Übergangsfrequenz abweichen. Andernfalls wäre die Effizienz der optischen Pumpstufe gering. Deswegen wurde die Rubidiumzelle mit einem μ -Metall-Schild gegen magnetische Streufelder abgeschirmt. Dies vermindert im übrigen auch die Breite des Lamb-Loches, da eine nicht verschwindende magnetische Induktionen die Entartung der Hyperfeinstrukturmultipletts aufhebt.

Abbildung 6.2 zeigt das experimentell Sättigungsspektrum. Mit einem digitalen Speicheroszillographen wurde das Sättigungssignal in Abhängigkeit von der Spannung am PZT des Gitters der Littrow-Anordnung gemessen. Abgebildet ist die Gruppe der ^{85}Rb -Multiplettübergänge $|5s_{1/2}; f_0 = 3\rangle \rightarrow \{|5p_{3/2}; f\rangle\}_{f \in \{2,3,4\}}$ (kurz: D2-Übergänge von ^{85}Rb mit $f_0 = 3$). Theoretisch werden sechs Spitzen erwartet. Drei bei den Übergangsfrequenzen für die Anregung der Multipletts $\{|5p_{3/2}; f\rangle\}_{f \in \{2,3,4\}}$ (Übergänge) und drei bei den arithmetischen Mittelwerten von je zwei dieser Übergangsfrequenzen (Kreuzungssignale). Wird von einem linearen Zusammenhang zwischen PZT-Spannung und Dioden-Laser-Frequenz ausgegangen, kann jeder PZT Spannung eine relative Frequenz zugeordnet werden. Dazu wird von den aus der Literatur [BGR91] bekannten Frequenzabstände zwischen den am weitesten auseinander liegenden Übergängen ($f = 2$ und $f = 4$) ausgegangen und die Frequenz-Eichung der PZT Spannung durch lineare Inter- bzw. Extrapolation festgelegt. Der damit ermittelte Wert für die relative Frequenz des Übergangs mit $f = 3$ stimmt sehr gut mit dem Literatur-Wert überein. Nun kann aus dem Spektrum leicht die Breite des Übergangs mit $f = 4$ ermittelt werden. Sie beträgt ungefähr 10 MHz (FWHM). Diese Breite stimmt im Rahmen der Ableseungenauigkeit mit dem Wert von 12 MHz überein, der in der Sättigungsspektroskopie aus [BGR91] erreicht wird. Die natürliche Linienbreite beträgt 6 MHz.

6.1.3 Neu entwickelte elektronische Regelkreise

In allen Fällen muß zur Driftunterdrückung eine Größe ξ (Länge, Frequenz) auf einen Wert stabilisiert werden, an dem eine von ξ abhängige Meßgröße U (Transmission) als Funktion von ξ ein strenges lokales Extremum hat. Wird ξ von einer Stellgröße x gesteuert, so kann $d(U(\xi(x)))/dx$ als Fehlergröße für einen Regelkreis verwandt werden. Um diese Fehlergröße zu gewinnen, wird das Verfahren der synchronen Demodulation angewandt. Dieses verfügt ferner über hervorragende Rauschunterdrückungseigenschaften.

Die Entwicklung der elektronischen Regelkreise für die Driftunterdrückung beruht auf neuen Erkenntnissen in folgenden Bereichen:

1. Struktur und Dynamik des synchronen Demodulationssignals
2. Einfluß der Modulationsamplitude auf das Fehlersignal
3. Dynamik von Regelkreisen mit tiefpaßgefilterten Fehlersignalen

Die folgenden Ausführungen begründen die Notwendigkeit einer Untersuchung dieser Punkte.

Bei dem Verfahren der synchronen Demodulation wird der Stellgröße x eine (kleine) Sinus-Modulation (Kreisfrequenz ω) aufgeprägt. Das Meßsignal $U(\xi(x(t)))$ wird mit einer Sinus-Schwingung gemischt, deren Kreisfrequenz mit

der der Modulation synchronisiert ist, und deren Phase gegenüber der der Modulation um einen zeitlich konstanten Wert verschoben werden kann. Anschließend erfolgt eine Tiefpaßfilterung. Die zugehörige Zeitkonstante τ_{dm} wird als Demodulationszeitkonstante bezeichnet. Das auf diese Weise erzeugte Demodulationssignal enthält das gewünschte Fehlersignal. Bekannt ist, daß das synchrone Demodulationssignal in guter Näherung exponentiell mit Zeitkonstante τ_{dm} gegen das Fehlersignal strebt, wenn die Modulation um einen zeitlich konstanten Arbeitspunkt x_0 erfolgt. Es konnte keine Literatur gefunden werden, die eine Aussage über die Güte dieser Näherung macht. Darüber hinaus muß für die Anwendung in Regelkreisen von einem zeitabhängigen Arbeitspunkt ausgegangen werden. Auch der Einfluß eines zeitlich veränderlichen Arbeitspunktes auf das synchrone Demodulationssignal scheint bisher nicht näher untersucht worden zu sein. Der Anhang B widmet sich diesen Fragen. Er erklärt das Verfahren der synchronen Demodulation ausgehend von den grundlegenden Begriffsbildungen (B.1 und B.2) bis zur Anwendung in der Regelungstechnik (B.3). Das Ziel ist dabei die Untersuchung des Einflusses frei wählbaren Parameter (Modulationsamplitude, Modulationsfrequenz, Demodulationszeitkonstante) und ihre Optimierung für das Experiment. Die gewonnenen Erkenntnisse liefern einfache Optimierungsregeln und sind in B.5 zusammengefaßt.

Ein wichtiges Ergebnis des Anhangs B ist, daß das synchrone Demodulationssignal das Fehlersignal enthält, allerdings nur in tiefpaßgefilterter Form, wobei die Zeitkonstante dieser Tiefpaßfilterung durch die Demodulationszeitkonstante τ_{dm} gegeben ist. Es ist klar, daß dies einen verzögernden Einfluß auf die Regelungsdynamik hat. Ferner kann τ_{dm} nicht beliebig klein gewählt werden, da die Rauschunterdrückung und Fehlersignalgüte der synchronen Demodulation und damit die erreichbare Güte der Stabilität umso schlechter werden, je kleiner τ_{dm} ist.⁷ τ_{dm} liegt je nach der erforderlichen Rauschunterdrückung üblicherweise im Bereich 1 ms . . . 1 s, mitunter aber auch deutlich darüber. Das mit der Demodulation verbundene Tiefpaßverhalten ist deswegen meist viel ausgeprägter als alle sonstigen im Regelkreis befindlichen Verzögerungen. Daher muß geklärt werden, wie die Tiefpaßfilterung des Fehlersignals die Regelungsdynamik beeinträchtigt und welche Gegenmaßnahmen ergriffen werden können (Punkt (3)). Tatsächlich konnte eine Reglertopologie entwickelt werden, die die Beschränkung der Regelungsdynamik durch diesen Tiefpaß *vollständig* aufhebt. Schließlich gestattet die Klärung von Punkt (2) eine im Sinne des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses bestmögliche Verteilung der Verstärkungen im Regelkreis.

Die Untersuchungen zu den Punkten (3) und (2) liefern Ergebnisse, die unseres Wissens nach neu sind. Ihre Ableitung ist allerdings recht aufwendig. Um den Rahmen technischer Betrachtungen nicht zu sehr auszudehnen, wird auf eine ausführliche Darstellung verzichtet. Stattdessen soll das gemessene Reglerverhalten für sich sprechen.

Regelungstechnik

Die allgemeinen Überlegungen zur Stabilisierung durch synchrone Demodulation (siehe B.3) lassen sich mit Blick auf die Tabelle 6.2 unmittelbar auf die Driftunterdrückung anwenden.

⁷Für Rauschen, das dem Transmissionssignal überlagert ist, bildet die Demodulation einen Bandpaß mit Durchlaßfrequenz $2\pi\omega$ und 3 dB-Frequenzbreite von $(2\pi)/\tau_{dm}$.

Regelkreis für	Regelgröße	Stellgröße =Steuerspannung für	Meßgröße =Transmission	
			von	durch
FPI	Länge l	$U_{\text{PZT,Spiegel}}$	He-Ne	FPI
Dioden-Laser FPI	Frequenz ν	$U_{\text{PZT,Gitter}}$	Dioden-Laser	FPI
Dioden-Laser Zelle	Frequenz ν	$U_{\text{PZT,Gitter}}$	Probenstrahl	Zelle

Tabelle 6.2: Regelkreise zur Driftunterdrückung: Physikalische Größen und ihre regelungstechnische Bedeutung

Alle Regelkreise lassen sich in Rahmen eines einheitlichen Modells beschreiben, das in Abbildung 6.3 dargestellt ist. Das Modell für den Lock-In-Verstärker ist ein Ergebnis aus Anhang B. Insgesamt setzt sich der Regelkreis aus folgenden Bestandteilen zusammen:

1. *Summationspunkt 1*: Hier wird die Stellgröße als Summe verschiedenen Spannungen erzeugt (Arbeitspunktspannung, Modulationsspannung und bei geschlossenem Regelkreis Reglerspannung).
2. *Regelstrecke*: Ordnet der Stellgröße die Regelgröße zu. Die genaue Gesetzmäßigkeit dieser Zuordnung hängt von weiteren Parametern ab (Temperatur, Druck, usw.).
3. *Lock-In-Verstärker*: Erzeugt die Fehlergröße (Fehlervoltage), verstärkt sie und unterwirft sie einer Tiefpaßfilterung.
4. *Regler*: Erzeugt aus der Fehlergröße die Reglerspannung.

Geschlossene Regelkreise werden durch ihr sog. Störverhalten gekennzeichnet. Das Störverhalten beschreibt den Einfluß einer an einer bestimmten Stelle des geschlossenen Regelkreises („Störstelle“) eingekoppelten Störgröße auf eine Bezugsgröße (z. B. Stellgröße, Regelgröße, Fehlergröße). Dementsprechend hängt das Störverhalten davon ab, welche Bezugsgröße gewählt und wo die Störgröße eingespeist wird. Ein hinsichtlich eines vorgegebenen Störverhaltens idealer Regelkreis zeichnet sich dadurch aus, daß die Störgröße überhaupt nicht auf die Bezugsgröße wirkt. Entsprechend wird die Güte eines realen Regelkreises an der Unterdrückung des Einflusses der Störgröße auf die Bezugsgröße gemessen.

Zur Entwicklung der Regler wurde von einer Reglerklasse ausgegangen, ein entsprechendes Modell für den oben beschriebenen Regelkreis aufgestellt, ein zu untersuchendes Störverhalten festgelegt und über die Reglertopologie die Regelungsdynamik optimiert, um eine möglichst schnelle Ausdämpfung von Störsignalen zu gewährleisten. Alle hier betrachteten Regelkreise können im Rahmen des gleichen Modells behandelt werden.

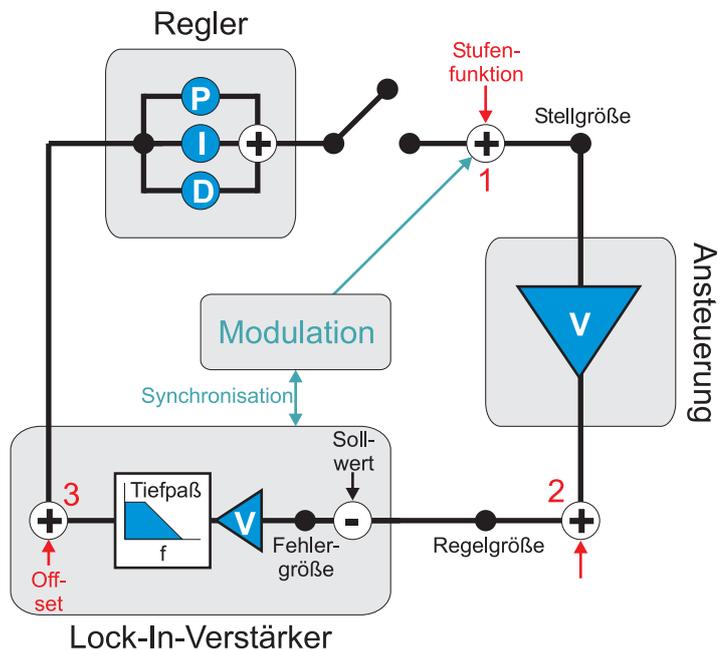


Abbildung 6.3: Modell für den Signalfluß in den Regelkreisen (lineare Verstärker sind mit „V“ gekennzeichnet): Die drei Grundbausteine sind Regelstrecke, Fehlergrößenerzeugung (Lock-In-Verstärker) und Regler. Bei Summationspunkt 1 wird der Stellgröße eine kleine Modulation aufgeprägt, die die Erzeugung der Fehlergröße durch synchrone Demodulation im Lock-In-Verstärker gestattet. Diese Verfahren liefert das Fehlersignal allerdings nur in tiefpaßgefilterter Form. Bei der Untersuchung des Regelkreises sind die Summationspunkte 1, 2 und 3 wichtig. Bei 1 kann neben der Modulation auch eine Stufenfunktion eingespeist werden. Dies wird später bei der Messung der Regelkreisdynamik ausgenutzt. Summationspunkt 3 gestattet eine „Feinabstimmung des Sollwertes“ über den Offset des Lock-In-Verstärkers. Schließlich können Störungen der Regelgröße als bei 2 eingespeiste Störsignale beschrieben werden.

Die Untersuchungen ergaben, daß bei Verwendung eines Proportional-Integral-Reglers die Regelungsdynamik durch die Tiefpaßfilterung der Demodulation begrenzt wird. Dieses Ergebnis ist nicht überraschend. Erstaunlicher ist, daß Proportional-Integral-Differential-Regler (PID-Regler) diese Grenze überwinden können, wenn sie an die Signalübertragungsdynamik der übrigen Bestandteile des Regelkreises angepaßt werden. Besser noch: Das aufgestellte Modell liefert für jede vorgegebene Zeitkonstante τ diejenigen (eindeutig bestimmten) Werte für Proportional-, Integral- und Differentialverstärkung, für die Störsignale aperiodisch mit der Zeitkonstante τ gedämpft werden. Tatsächliches und gewünschtes Störverhalten des Regelkreises stimmen dann sehr gut überein. Dies wird weiter unten durch Messungen belegt. Gleichzeitig werden dort die Grenzen der Regelungsdynamik aufgezeigt. Es können bequem Dämpfungskonstanten τ verwirklicht werden, die um etwa eine Größenordnung kleiner sind als die Demodulationszeitkonstante τ_{dm} .

Technische Verwirklichung

Bei der technischen Verwirklichung muß zunächst die Reglerbandbreite festgelegt werden. Dies hat folgenden Grund: Ist die Regelgröße sehr nahe beim Sollwert und wird bei nicht geschlossenem Regelkreis eine harmonische Störspannung mit gegebener Frequenz in den Summationspunkt 1 eingespeist, so weist die (nicht an die Regelstrecke weitergeleitete) Reglerspannung gegenüber der Störspannung eine frequenzabhängige Verstärkung und eine frequenzabhängige Phasendifferenz auf. Die hier betrachteten Regelkreise enthalten piezoelektrische Kristalle, die charakteristische Resonanzfrequenzen für die Umsetzung von elektrischen in mechanische Schwingungen haben. In der Nähe dieser Frequenzen ändert sich die Phasendifferenz so stark, daß sie sich mit anderen Phasendifferenzquellen (z. B. Tiefpässen in den Ansteuerungen) auf π addieren kann. Um Schwingungen des Regelkreises zu vermeiden, muß die Verstärkung für Frequenzen mit nahe bei π liegender Phasendifferenz deutlich kleiner als Eins sein. Dies kann durch geeignete Beschränkung der Reglerbandbreite gewährleistet werden.

Die Regler wurden entsprechend der Bandbreitenvorgabe rauscharm und störungsempfindlich aufgebaut (doppelt kaschierte Platinen, mehrfach gesiebte Spannungsversorgungen, rauscharme Bauteile, geschirmte Leitungen). Ferner wurde jeder Regelkreis als elektronische Einheit galvanisch vom Hausnetz getrennt und über magnetische Spannungskonstanthalter versorgt.

Für die synchrone Demodulation sollte die Modulationsfrequenz nach den Ergebnissen des Anhangs B.3 möglichst hoch sein. Gleichzeitig sollten bei ihr möglichst wenige Störungen auf den Regelkreis wirken (siehe Fußnote 7). Daher wurde die Modulationsfrequenz in einen Bereich oberhalb der ersten Resonanzfrequenz des jeweiligen PZTs gelegt, in dem die Phasendifferenz nur eine schwache Frequenzabhängigkeit aufweist. Die tatsächlichen Werte liegen bei 5,21 kHz für den FPI-Regelkreis und bei 6,12 kHz für die beiden Dioden-Laser-Regelkreise. Bei allen Regelkreisen wurde die Demodulation vorgefiltert. Dank des stabilen optischen Aufbaus liefert dann bereits eine Demodulationszeitkonstante von 10 ms ein Demodulationssignal hinreichender Güte. Für die Verstärkungseinstellungen der Regler wurden die Werte gewählt, bei denen das entwickelte Modell für den jeweiligen Regelkreis eine aperiodische Ausdämpfung von Störungen der Regelgröße vorhersagt.

Experimentelle Prüfung der Regelkreise

Die Übereinstimmung zwischen Modell und technischer Umsetzung wird folgendermaßen geprüft:

1. Es wird eine Zeitkonstante τ vorgegeben. Am Regler werden die Werte für Proportional-, Integral- und Differentialverstärkung eingestellt, für die nach dem Modell Störsignale aperiodisch mit Zeitkonstante τ gedämpft werden.
2. Der Regelkreis wird geschlossen. In Summationspunkt 1 (siehe Abbildung 6.3) wird als Störsignal eine Sprungfunktion eingespeist (Zeitpunkt für das Auftreten der positiven Flanke t_0). Die Zeitabhängigkeit der Stellgröße (Stellsignal) wird mit einem durch die Sprungfunktion getriggerten digitalen Speicheroszillographen aufgezeichnet. Damit wird in der Messung $t_0 = 0$. Eine Mittelung über mehrere Aufzeichnungen unterdrückt

die Anteile der Stellgröße, die nicht durch das Störsignal verursacht werden.

3. Vergleich von tatsächlichem und gewünschtem Störverhalten: Nach dem Modell wird für das Stellsignal für Zeiten $t > 0$ eine aperiodisch mit Zeitkonstante τ gedämpft Sprungfunktion erwartet:

$$U_s(U_0, A, \tau; t) = U_0 + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (t > 0) \quad (6.32)$$

Dabei ist A die Amplitude der Sprungfunktion und U_0 der Wert der Stellgröße, der sich durch den Betrieb des geschlossenen Regelkreises zum Zeitpunkt $t = 0$ einstellt. Der qualitative und quantitative Vergleich mit dem tatsächlichem Störverhalten geschieht folgendermaßen: U'_0 , A' und τ' werden als freie Parameter angesehen und durch Angleichung der Funktion $U_s(U'_0, A', \tau'; t)$ an das gemessene Störsignal festgelegt. Der Korrelationskoeffizient R zwischen $U_s(U'_0, A', \tau'; t)$ und dem gemessenen Verlauf ist dann ein Maß für die qualitative Übereinstimmung von tatsächlichem und gewünschtem (aperiodische Dämpfung) Störverhalten. Ist diese gut, so liefert der Vergleich von τ' und τ ein quantitatives Maß dafür.

Stellvertretend finden sich hier die Messungen für den Regelkreis zur Dioden-Laser-FPI-Stabilisierung. Der Regelkreis zur FPI-Längenstabilisierung ist dabei geschlossen. Es werden für zwei Messungen (Abbildungen 6.4, 6.5) die gewünschte Zeitkonstante τ , die durch Lösung des Ausgleichsaufgabe bestimmte Zeitkonstante τ' sowie der Korrelationskoeffizient R für diese Lösung angegeben. Dabei ergibt sich eine erstaunlich gute qualitative und quantitative Übereinstimmung zwischen vorhergesagtem und gemessenem Störverhalten. Die Zeitkonstanten liegen bereits deutlich unter der Demodulationszeitkonstante $\tau_{dm} = 10$ ms. Dies bestätigt die Leistungsfähigkeit der neu entwickelten Regelkreise. Die Messung für $\tau = 1$ ms zeigt die Grenzen des Modells. Die Abweichungen sind dadurch zu erklären, daß die verhältnismäßig geringe Reglerbandbreite für den Dioden-Laser-Regelkreis bei höheren Frequenzen v. a. die Differentialverstärkung verringert. Ein Überschwingen wie in Abbildung 6.6 ist die typische Folge. Das dort gezeigte Störverhalten wird zwar nicht sehr gut durch eine aperiodische Dämpfung beschrieben, es ist allerdings klar ersichtlich, daß es ohne weiteres geduldet werden kann, wenn die Regelkreisdynamik voll ausgeschöpft werden soll. Die Dämpfungskonstante der Schwingung liegt hier im sub-ms-Bereich.

Nach (6.24) wird die Frequenzstabilität des Dioden-Lasers durch die Frequenzdrift des Referenz-Lasers und in geringerem Maße durch Druck- und Temperaturschwankungen im FPI beschränkt. Daher werden Referenz-Laser und die Temperaturstabilisierung des FPI samt dem Regelkreis, der die Länge des FPI auf die maximale Transmission des Referenz-Lasers stabilisiert im ständigen Betrieb gehalten. Zur Überwachung des Regelkreises dient ein Fensterkomparator, der den Pegel des Transmissionssignals mit einem Mindestwert vergleicht und bei seiner Unterschreitung ein Fehler-bit setzt. Diese Fehler-bit bleibt solange gesetzt, bis es von Hand gelöscht wird. Der Mindestwert wurde etwa auf $3/4$ des maximalen Pegels des Transmissionssignals (bei bestmöglicher Modenanpassung) eingestellt. Bei der Referenz-Laser-Frequenz hat das FPI eine Finesse von mindestens 125. Daher antwortet das Transmissionssignal bei dieser Wellenlänge

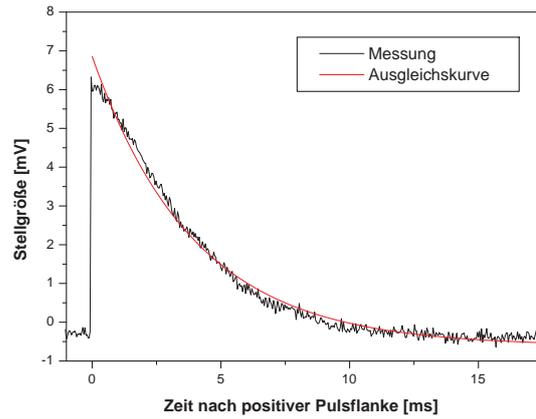


Abbildung 6.4: $\tau = 4$ ms, $\tau' = 3,94(4)$ ms, $R = 99,562\%$

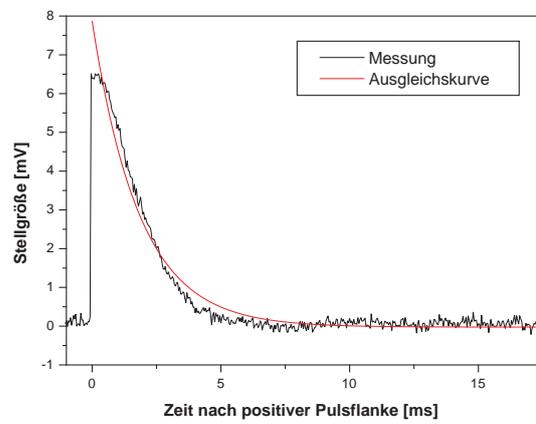


Abbildung 6.5: $\tau = 2$ ms, $\tau' = 1,84(3)$ ms, $R = 98,836\%$

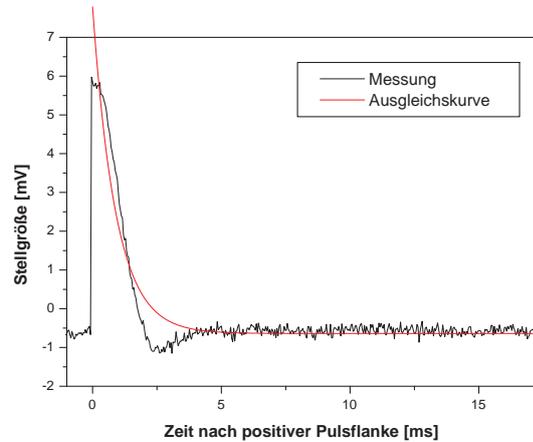


Abbildung 6.6: $\tau = 1$ ms: Hier werden die Grenzen der Regelkreisdynamik sichtbar. Im Modell nicht berücksichtigte Bandbreitenbegrenzungen führen zu einem Überschwingen des Stellsignals und damit zu einer Abweichung vom vorhergesagten Störverhalten. Trotzdem kann es anhand der Abbildung noch als gutartig eingestuft werden.

sehr empfindlich auf Störungen der Regelgröße (=Länge des FPI). Trotzdem vergehen *Wochen*, bis das Fehler-bit gesetzt wird. Selbst dann hat die Transmission durch das FPI noch den maximalen Wert, der durch Abgleich der Länge erreicht werden kann. Doch ist der Pegel dieses Wertes bis knapp über den Mindestpegel abgesunken. Dies liegt an einer langfristigen Selbst-Dejustierung der Strahlhöhe und -richtung des Referenz-Lasers im FPI (Temperaturschwankungen und damit verbundenen Längenänderungen der Feinmechanikschrauben an den Spiegelhaltern). Die damit verbundene verschlechterte Modenanpassung hat ein Absinken des erreichbaren Pegels für die Transmission zu Folge. Nach kurzer Nach-Justierung wird der ursprüngliche Pegel wieder erreicht.

6.1.4 Frequenzfeinabstimmung

Die Bestimmungsgleichung (6.18) läßt für die Dioden-Laser-Frequenz bei Ankoppelung an die Referenz-Laser-Frequenz einen diskreten Satz von Stabilisationswerten mit einem Abstand von etwa 300 MHz zu. Daher wird im Experiment die Stärke der magnetischen Induktion so gewählt, daß die zugehörige Übergangsfrequenz (6.6) für den optischen Pumpvorgang möglichst nahe bei einem Stabilisationswert liegt. Zusätzlich wird die Möglichkeit einer Feinabstimmung der Dioden-Laser-Frequenz bereitgestellt. Damit wird für Messungen bei nichtverschwindender magnetischer Induktion die Dioden-Laser-Frequenz auf höchstmögliche Effizienz der optischen Pumpstufe abgeglichen.

Die Optimierung geschieht folgendermaßen: Im Experiment mit gekreuzten Feldern werden Anregungen von dem durch optisches Pumpen bevölkerten Zustand durch das Licht des Farbstoff-Lasers gezählt. Der zugehörige Wirkungsquerschnitt hat im Gegensatz zu Messungen unterhalb des Stark-Sattels für

alle Farbstoff-Laser-Frequenzen merkliche Werte („Anregung ins Kontinuum“). Vor Beginn der Aufzeichnung des Photoabsorptionsspektrums ist der Farbstoff-Laser auf die Anfangsfrequenz dieses Spektrums stabilisiert. Bei gleichzeitiger Einstrahlung des Dioden-Lasers gibt es ein Anregungssignal, das von der auswertenden Elektronik in Form einer Zählrate angezeigt wird. Die Höhe der Zählrate hängt multiplikativ vom Wirkungsquerschnitt der Pumpstufe bei der eingestrahlten Dioden-Laser-Frequenz ab. Durch Maximierung der Zählrate über die Dioden-Laser-Frequenz kann daher die Effizienz der optischen Pumpstufe optimiert werden. Dies setzt voraus, daß Fluktuation des Wirkungsquerschnitts für die Anregung mit dem Farbstoff-Laser klein sind auf der Skala der Linienebreite des Pumpübergangs. Aus den mit konstanter Dioden-Laser-Frequenz aufgezeichneten Spektren geht hervor, daß diese Forderung sehr gut erfüllt ist.

Technisch wird die Frequenzabstimmung bei geschlossenem Regelkreis durch Einspeisung eines konstanten Offsets in Summationspunkt 3 erreicht. Dadurch verschiebt sich der Gleichgewichtspunkt des Regelkreises auf die Dioden-Laser-Frequenz, bei der das Fehlersignal der Demodulation gerade den Offset ausgleicht. Auf der Transmissionskurve verschiebt sich so der Stabilisierungspunkt vom Maximum auf die Flanke. Die Frequenzänderungen dürfen den Stabilisierungspunkt aus regelungstechnischen Gründen nicht zu weit auf die Flanke treiben. An dieser Stelle ist es hilfreich, daß die Finesse des FPI im Infraroten nicht allzu hoch ist. Auf diese Weise sind Frequenzverschiebungen um mehr als 10 MHz möglich, ohne die Eigenschaften des Regelkreises nennenswert zu beeinträchtigen. Im Experiment erweist sich dies als vollkommen ausreichend. Umgekehrt können auf diese Weise unvermeidliche Offsets des Fehlersignals auf Null abgeglichen werden. Dies erweist sich bei der Stabilisierung der Dioden-Laser-Frequenz über das Sättigungssignal als hilfreich.

Die verwandten Lock-In-Verstärker⁸ verfügen über die Möglichkeit, den Offset digital über eine RS232-Schnittstelle zu steuern. Dafür wurde ein PC bereitgestellt und ein auf die Bedürfnisse des Experimentes abgestimmtes Programm zur Ansteuerung der Lock-In-Verstärker geschrieben. Die digitale Kommunikation gewährleistet darüber hinaus die notwendige Rauscharmut bei der Einspeisung des Offsets.

6.2 Farbstoff-Laser

Als Photonenquelle für die Messung der Photoabsorptionsspektren von den optisch gepumpten Atomen dient ein stetig arbeitender („continuous wave“, cw) Einzel-Moden-Farbstoff-Ring-Laser, der mit dem Farbstoff Coumarin 102 betrieben und von einem Krypton-Ionen-Laser mit violetterem Licht gepumpt wird. Die Frequenz des Farbstoff-Lasers wird mit Hilfe eines Fabry-Perot-Interferometers (FPI) stabilisiert. Durch Änderung der optischen Weglänge des FPI kann sie bei geschlossenem Regelkreis durchgestimmt werden.

⁸Model SR510 und Model SR530 Lock-In Amplifier des Herstellers Stanford Research Systems, Inc.

6.2.1 Grundlagen

Farbstoff-Laser, FPI und zugehörige Elektronik bilden eine Einheit, die von dem Hersteller Spectra-Physics stammt.⁹ Der Farbstoff Coumarin 102 (andere handelsübliche Namen: Coumarin 480, LD480) wird in Ethylenglykol gelöst (Mischungsverhältnis: 2 g Coumarin 102 auf 1,4 l Ethylenglykol) und von einer Pumpe durch eine schlitzförmige Düse gepreßt. Die Eigenschaften der so erzeugten Farbstoff-Lamelle (gleichförmige Dicke, mechanische Stabilität) sind von entscheidender Bedeutung für die Stabilität der Laser-Frequenz. Daher dürfen in der Pumpe erzeugte Schwingungen und Gasbläschen nicht zur Düse gelangen. Deswegen durchläuft der Farbstoff auf dem Weg zur Düse erst einen Filter und dann einen Glaszylinder mit einigen Zentimetern Durchmesser, in dem der unter Druck stehende Farbstoff eine vorher eingefüllte Gasmenge zusammenpreßt („Akkumulator“). Zu- und Ableitung befinden sich an entgegengesetzten Stellen der Mantelfläche nahe dem Fuß des Zylinders. Als Düse dient ein Schlitz in einem Saphirkristall. Solche Düsen zeichnen sich durch eine besondere Ebenheit der Flächen aus, die mit der Flüssigkeit in Berührung stehen. Sie erzeugen Farbstoff-Lamellen, deren Dicke auf interferometrischer Skala gleichförmig ist, sind selbstreinigend und darüber hinaus sehr widerstandsfähig gegen Beschädigungen durch Kavitätseffekte.

Um ein Verstärkungsmedium für das Farbstoff-Laser-Licht zu erzeugen, wird der Farbstoff mit einem weiteren Laser optisch gepumpt (Pump-Laser). Dazu wird ein Krypton-Ionen-Laser verwandt¹⁰, der Licht mit Wellenlängen zwischen 406,7 und 415,4 nm erzeugt. Der Pump-Laser-Strahl wird in die Farbstoff-Lamelle fokussiert und erzeugt dort das Verstärkungsmedium. Aufgrund der energetischen Struktur der Farbstoff-Moleküle wird Licht in einem breiten Wellenlängenbereich verstärkt. Das Verstärkungsmedium befindet sich in einem der Fokusse des Astigmatismus-kompensierten Farbstoff-Laser-Ringresonators, in dem das Farbstoff-Laser Licht erzeugt wird. Um den Einzelmodenbetrieb zu gewährleisten dienen abstimmbare Frequenz-Bandpässe im Resonator (Drei-Platten-Lyot-Filter, längenabstimmbares FPI) und ein Faraday-Rotator. Zur Feinabstimmung der Frequenz dient ein Paar galvanometrisch drehbarer Glaspplatten und ein piezoelektrischer Kristall, auf den einer der Resonatorspiegel aufgeklebt ist. Die zuletzt genannten Resonatorelemente werden auch zur Stabilisierung der Frequenz benutzt. Wie dies geschieht, wurde bereits in 2.5 angedeutet. Der Farbstoff-Laser liefert frequenzstabilisiertes Einzelmoden-Laser-Licht in einem Wellenlängenbereich von etwa 467...515 nm. Technische Einzelheiten des Farbstoff-Laser-Systems finden sich in [JY79].

6.2.2 Änderungen

Der Farbstoff-Laser wurde vorher mit einem Argon-Ionen-Laser mit langwelligem ultravioletten Licht gepumpt. Die Umstellung auf einen Krypton-Ionen-Pump-Laser erwies sich als sehr vorteilhaft. Mit geringerer Pump-Laser-Strahlleistung (Pumpleistung) kann deutlich mehr Farbstoff-Laser-Strahlleistung erzeugt werden. Nach Austausch schadhafter Bestandteile von Laser-Resonator und -Elektronik liefert der Farbstoff-Laser nun bei einer Pumpleistung von 1,44 W etwa 100 mW stabilisiertes Einzel-Moden-Farbstoff-Laser-Licht mit den

⁹Model 380D Frequency Stabilized Ring Dye Laser

¹⁰BeamLok Model 2080 des Herstellers Spectra-Physics

im Experiment benötigten Frequenzen. Dazu ist einer sorgfältige Justierung notwendig. Im Gegensatz zum Betrieb mit dem Argon-Ionen-Laser werden die Leistungsreserven jetzt bei weitem nicht ausgeschöpft (der Krypton-Ionen-Laser kann bis zu 7,5 W Pumpleistung liefern und der Farbstoff-Druck um bis zu 70% erhöht werden).

Der Farbstoff-Laser-Strahlengang wurde neu aufgebaut. Durch Wahl geeigneter Strahlteiler und Teleskope konnte die für Stabilisierung und Frequenzmessung abgezwigte Leistung stark vermindert werden. Ferner wird der Farbstoff-Laser-Strahl mit einer Linse in den Atomstrahl fokussiert, die in eine Vorrichtung zur Faser-Einkoppelung eingebaut ist. Dadurch kann der Fokus genau in den Atomstrahl bewegt werden. Ein Ausgangswert für die Farbstoff-Laser-Strahlleistung von 100 mW ist dann für das Experiment vollkommen ausreichend. Darüber hinaus verlängert eine niedrige Pumpleistung die Lebensdauer des Farbstoffes und ein niedriger Farbstoff-Druck verbessert die Stabilität des Farbstoff-Laser-Betriebs.

Vor der Fokussierung des Laser-Strahls in den Atomstrahl wird seine Polarisation mit einem Polarisationsstrahlteiler gereinigt und dann mit einem elektrooptischen Modulator so abgeglichen (gekreuzte Polarisatoren), daß der Kreuzterm (vgl. 3.4.3) bestmöglich unterdrückt wird. Vor der Linse befindet sich dann noch ein Neutraldichtefilter, mit dem die Zählrate im Experiment angepaßt werden kann.

6.2.3 Relative Frequenzmessung

Zur relativen Messung von Farbstoff-Laser-Frequenzen wird ein Teil des Strahls mit einem Strahlteiler ausgekoppelt und durch das längenstabilisierte FPI justiert. Dabei wird der Farbstoff-Laser-Strahl ausgehend von guter Modenanpassung leicht verkippt. Auf diese Weise tritt maximale Transmission schon alle 150 MHz auf (vgl. die Ausführungen zur Modenstruktur des FPI in 6.1.2). Ein Photodetektor wandelt die transmittierte Strahlleistung in eine Spannung (Transmissionssignal) um. Bei jedem Schritt der Aufzeichnung des Spektrums wird neben der Zahl der detektierten Anregungsvorgänge auch das Transmissionssignal aufgezeichnet (vgl. 2.5). Bei der Auswertung wird dann ausgehend vom absolut gemessenen Frequenzwert am Anfang des Spektrums durch lineare Interpolation zwischen den Schwerpunkten der Transmissionsspitzen jedem Schritt eine Frequenz zugeordnet.

6.3 Absolute Frequenzmessung

Zur absoluten Frequenzmessung dient ein Michelson-Interferometer. Es gestattet die Bestimmung des Verhältnisses der Wellenlängen zweier Laser-Strahlen. Ist eine dieser Wellenlängen bekannt („Referenz-Laser“), kann aus diesem Verhältnis die andere Wellenlänge absolut bestimmt werden.

Das vorhandene Michelson-Interferometer wurde vollständig überarbeitet. Das Ergebnis ist

1. starke Verminderung statistischer Fehler durch Verbesserungen an Elektronik und optischem Aufbau

2. starke Verminderung systematischer Fehler für Messungen von Dioden-Laser-Frequenzen durch Einsatz eines neuen Eichverfahrens
3. Berechnung der Genauigkeit jeder Messung mit einem neuen Auswertungsverfahren

Damit kann die Übergangsfrequenz der optischen Pumpstufe mit einer Genauigkeit im Bereich von ± 5 MHz (2σ -Konfidenzintervall) bestimmt werden. Dies bildet die Grundlage für die Bestimmung der Stärke der magnetischen Induktion.

Zunächst werden Aufbau und Arbeitsweise des Michelson-Interferometers erklärt. Auf dieser Grundlage werden die Fehlerquellen angegeben, die bei der Fehlerabschätzung für die Meßwerte wichtig sind. Anschließend werden die vorgenommenen Änderungen ausführlich erläutert und die erreichte Genauigkeit untersucht.

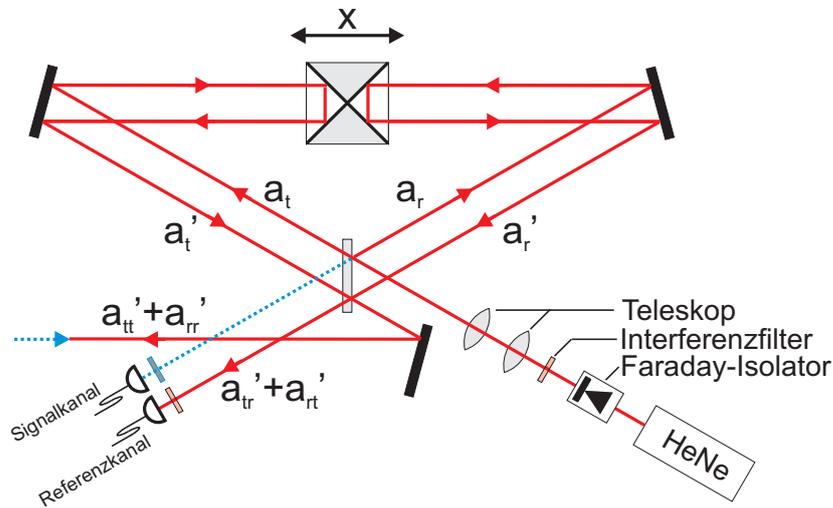


Abbildung 6.7: Aufbau des Michelson-Interferometers

6.3.1 Grundlagen

Das Michelson-Interferometer ist in Abbildung 6.7 dargestellt. Als Referenz-Laser wird wieder der Helium-Neon-Laser benutzt. Der optische Aufbau ist nicht evakuiert und besteht im wesentlichen aus einem Strahlteiler und zwei metallischen Spiegeln, die so angeordnet sind, daß sie ein etwa gleichschenkliges Dreieck bilden. Der Strahlteiler steht an der Spitze. Der transmittierte Teil des Referenz-Laser-Strahls (a_t) fällt auf einen Spiegel, der reflektierte (a_r) auf den anderen. Zwischen den beiden Spiegeln entlang der Basis des Dreiecks befindet sich ein Wagen mit zwei Retroreflektoren, die zu den beiden Spiegeln weisen.

Der Wagen hat einen V-förmigen Ausschnitt, der genau zum Profil einer Schiene paßt. Im Wagen befinden sich Kanäle, durch die von oben zugeführte Druckluft zu mehreren Düsen in beiden Schenkeln des V-förmigen Ausschnitts geleitet wird. Die ausströmende Druckluft bildet ein Luftkissen, auf dem der

Wagen schwingungsarm schwebt. An jedem der Enden der Schiene befindet sich eine Vorrichtung, die den Wagen abbremst und in die entgegengesetzte Richtung beschleunigt. Im wesentlichen handelt es sich dabei um eine Lichtschranke, bei deren Überschreiten eine Elektronik einen mit einem Elektromagneten betriebenen Abstoßer auslöst. Auf diese Weise pendelt der Wagen ohne weiteren äußeren Antrieb zwischen den Schienenenden hin und her.

Die von den Retroreflektoren mit einem Strahlversatz zurückgeworfenen Strahlen (a'_t, a'_r) sollen durch den Strahlteiler unabhängig vom Ort des Wagens x möglichst gut zur Interferenz gebracht werden ($a'_{tr} + a'_{rt}$ bzw. $a'_{tt} + a'_{rr}$). Bei perfekter Retroreflektion sind die zurücklaufenden Strahlen (a'_t/a'_r) parallel zu den einlaufenden Strahlen (a_t/a_r). Durch sorgfältige Justierung der Anordnung muß dann noch sichergestellt werden, daß sich die zurücklaufenden Strahlen unabhängig von der Stellung des Wagens in demselben Punkt auf dem Strahlteiler treffen.

Bei Bewegung des Wagens wird ein Arm des Interferometers in dem Maße verkürzt, in dem der andere verlängert wird. Da linear polarisiertes Licht verwandt wird, gilt am Ort der Detektion (Photodetektor) mit einem Polarisationsinheitsvektor \hat{e} , geeigneten Amplituden \hat{A}_1, \hat{A}_2 und Phasen $\varphi_{tr}, \varphi_{rt}$

$$\mathbf{E}_{tr}(t) = \hat{A}_1 \hat{e} \cos(\omega t + 2k_{\text{ref}}x - \varphi_1) \quad (6.33)$$

$$\mathbf{E}_{rt}(t) = \hat{A}_2 \hat{e} \cos(\omega t - 2k_{\text{ref}}x - \varphi_2) \quad (6.34)$$

Dabei ist $k_{\text{ref}} = 2\pi/\lambda_{\text{ref}} = 2\pi n\nu/c$ der Betrag des Wellenvektors im Medium (hier Luft). Es gibt eine Phase φ , so daß die Überlagerung der beiden Wellen am Ort der Detektion durch

$$\left[1 + 2 \frac{\hat{A}_1 \hat{A}_2}{\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2} \cos(4k_{\text{ref}}x + \varphi_2 - \varphi_1) \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2} \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \varphi\right) \quad (6.35)$$

gegeben ist. Für die Beleuchtungsstärke \mathcal{I} gilt dann

$$\mathcal{I} \propto 1 + 2 \frac{\hat{A}_1 \hat{A}_2}{\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2} \cos(4k_{\text{ref}}x + \varphi_2 - \varphi_1) \quad (6.36)$$

Bei einer Bewegung des Wagens über eine Strecke Δx durchläuft die Beleuchtungsstärke $4\Delta x/\lambda_{\text{ref}}$ Perioden und der Kontrast des Interferenzsignals wird maximal für $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Daher sollten Transmissions- und Reflektionskoeffizient der Strahlteilers gleich sein.

Für einen Laser-Strahl („Signal-Laser“), der so in das Interferometer eingekoppelt wird, daß er entlang von $a'_{tt} + a'_{rr}$, aber in die entgegengesetzte Richtung läuft, können die gleichen Überlegungen durchgeführt werden. Eine der zwei zugehörigen Überlagerungswellen verläßt das Interferometer bei perfekter Einkoppelung parallel zu aber versetzt gegen $a'_{tr} + a'_{rt}$. Die Beleuchtungsstärke wird mit einem weiteren Photodetektor gemessen. Ist λ_{sig} die entsprechende Wellenlänge, so durchläuft die Beleuchtungsstärke $4\Delta x/\lambda_{\text{sig}}$ Perioden. Während sich der Wagen auf die Schiene bewegt, wird eine bestimmten Zeit lang die Anzahl der Perioden von Referenz- und Signal-Laser getrennt bestimmt. Das Verhältnis der Perioden q ist die eigentliche Meßgröße und gleich dem inversen Verhältnis der Wellenlängen:

$$q = \frac{4\Delta x/\lambda_{\text{sig}}}{4\Delta x/\lambda_{\text{ref}}} = \frac{\lambda_{\text{ref}}}{\lambda_{\text{sig}}} \quad (6.37)$$

Die gesuchte Wellenlänge ist also:

$$\lambda_{\text{sig}} = \frac{\lambda_{\text{ref}}}{q} \quad (6.38)$$

Damit ist die grundsätzliche Arbeitsweise des Michelson-Interferometers erklärt. Dioden-Laser und Farbstoff-Laser sind als Signalquellen in das Interferometer eingekoppelt. Bei der Messung einer Quelle muß natürlich stets die andere abgedeckt werden.

6.3.2 Fehlerquellen

Bevor die technische Umsetzung beschrieben wird, wird erklärt, wie sich Unvollkommenheiten im optischen Aufbau auf das Ergebnis auswirken. Folgende Fehlerquellen sind zu berücksichtigen:

1. Kollinearitätsfehler zwischen Wagenbewegung und Wellenvektoren
2. Nicht perfekte Retroreflektion
3. Abweichungen zwischen den Strahlengängen der beiden Laser
4. Beugungseffekte

Die Punkte (1) und (2) lassen sich einheitlich behandeln. Für Referenzwelle ($k = k_{\text{ref}}$) oder Signalwelle ($k = k_{\text{sig}}$) führen sie dazu, daß die vom Wagenort x abhängige Phase in (6.33) und (6.34) nicht mehr durch $\pm 2kx$ gegeben ist. Sie muß durch allgemeinere Ausdrücke $\varphi_{tr}(x)$ bzw. $\varphi_{rt}(x)$ ersetzt werden. Dazu werden die Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des Wagens und den Wellenvektoren für a_t, a'_t, a_r, a'_r eingeführt und mit $\alpha_t, \alpha'_t, \alpha_r, \alpha'_r$ bezeichnet. Damit ergibt sich

$$\varphi_{tr}(x) = +k(\cos \alpha_t + \cos \alpha'_t)x \quad (6.39)$$

$$\varphi_{rt}(x) = -k(\cos \alpha_r + \cos \alpha'_r)x \quad (6.40)$$

Für die Beleuchtungsstärke \mathcal{I} gilt dann

$$\mathcal{I} \propto 1 + 2 \frac{\hat{A}_1 \hat{A}_2}{\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2} \cos(\varphi_{tr}(x) - \varphi_{rt}(x) + \varphi_1 - \varphi_2) \quad (6.41)$$

mit

$$\varphi_{tr}(x) - \varphi_{rt}(x) = k(\cos \alpha_t + \cos \alpha'_t + \cos \alpha_r + \cos \alpha'_r)x \quad (6.42)$$

Bei einer Bewegung des Wagens über eine Strecke Δx durchläuft die Beleuchtungsstärke dann $4\Delta x/\lambda'$ Perioden, wobei λ' durch

$$\lambda' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4\lambda}{\cos \alpha_t + \cos \alpha'_t + \cos \alpha_r + \cos \alpha'_r} \quad (6.43)$$

gegeben ist. Die Unvollkommenheiten (1) und (2) lassen sich also durch Einführung einer effektiven Wellenlänge berücksichtigen, die um einen geometrischen Korrekturfaktor von der tatsächlichen Wellenlänge abweicht. Mit dem Verhältnis

$$q = \frac{\lambda'_{\text{ref}}}{\lambda'_{\text{sig}}} \quad (6.44)$$

ergibt sich als Meßwert $\tilde{\lambda}_{\text{sig}}$ für die Signalwellenlänge

$$\tilde{\lambda}_{\text{sig}} = \frac{\lambda_{\text{ref}}}{q} = \lambda_{\text{ref}} \cdot \frac{\lambda'_{\text{sig}}}{\lambda'_{\text{ref}}} \quad (6.45)$$

Solange Signal- und Referenzwelle antiparallele Ausbreitungsrichtung haben, kürzen sich die Korrekturfaktoren aus (6.45) heraus, und der Meßwert stimmt mit der tatsächlichen Signalwellenlänge überein.

Anders liegen die Verhältnisse bei Punkt (3). Hier ist der Meßwert $\tilde{\lambda}_{\text{sig}}$ fehlerhaft. Die Größenordnung der auftretenden Fehler läßt sich leicht abschätzen. Treten bei der Referenz-Welle keine Fehler auf, so führt ein Winkel δ zwischen den Wellenvektoren von Referenz- und Signalwelle zu einem Meßfehler

$$\tilde{\lambda}_{\text{sig}} - \lambda_{\text{sig}} = \lambda'_{\text{sig}} - \lambda_{\text{sig}} = \left(\frac{1}{\cos \delta} - 1 \right) \lambda_{\text{sig}} = \left[\frac{\delta^2}{2} + O(\delta^4) \right] \lambda_{\text{sig}} \quad (6.46)$$

Weisen z. B. Dioden-Laser-Strahl (Signal) und Helium-Neon-Laser-Strahl (Referenz) eine Winkelabweichung auf, die dazu führt, daß die Strahlen auf einer Strecke von 10 m um 1 mm auseinanderlaufen, so ist die gemessene Frequenz um etwa 1,9 MHz zu niedrig. Daher muß bei der Justierung sehr sorgfältig gearbeitet werden.

Die bisherigen Überlegungen beruhen auf der Beschreibung der Laser-Strahlen durch ebene Wellen. Ein genaueres Bild ergibt sich bei der Verwendung von Gauß-Strahlen. Der einzige Unterschied besteht dann darin, daß die Berechnung von \mathcal{I} am Detektorort durch die (i. allg. unterschiedliche) Krümmung der Wellenfronten der interferierenden Gauß-Strahlen erschwert wird. Handelt es sich um einen fundamentalen Gauß-Strahl, der so schwach fokussiert, daß die entlang des Strahls gemessene Entfernung vom Detektorort zum Fokus für jeden der interferierenden Wege klein gegen die Rayleigh-Länge ist, so ergibt sich bei Abwesenheit von Unvollkommenheiten der Art (1) bis (3) in guter Näherung eine effektive Wellenlänge λ' von

$$\lambda' = \left(1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 w_0^2} \right) \lambda \quad (6.47)$$

Die Ableitung sowie weitere Ergebnisse zu astigmatischen Strahlen und höheren Moden finden sich in [MKT⁺81]. Bei hinreichend aufgeweiteten Strahlen ist die Korrektur (6.47) recht klein. Für den Referenz-Laser-Strahl führt sie bei einem Strahltaillenradius w_0 von 2 mm zu einer relativen Wellenlängenkorrektur $(\lambda' - \lambda)/\lambda$ von etwa $2,5 \cdot 10^{-9}$.

Insgesamt kann die effektive Wellenlänge wie folgt geschrieben werden:

$$\lambda' = \beta\gamma\lambda \quad (6.48)$$

Dabei ist γ der durch die Fehler (1) und (2) verursachte geometrische Korrekturfaktor (6.43) und β ist die Beugungskorrektur (6.47). Schließlich kann die Wellenlänge in Luft λ unter Verwendung der Edlen-Formel (siehe A.1) durch die Frequenz ausgedrückt werden:

$$\lambda' = \eta \frac{c}{\nu} \quad (6.49)$$

mit

$$\eta = \frac{\gamma\beta}{n(\nu; p, T)} \quad (6.50)$$

Damit ist das Ergebnis der Messung (6.44) auch von den Umgebungsbedingungen abhängig.

6.3.3 Verbesserung der Elektronik

Um Perioden von Referenz- bzw. Signal-Laser zu zählen, wird das Beleuchtungsstärkensignal in eine digitale Pulsfolge umgesetzt. Dazu wird es zuerst mit einem analogen Photoverstärker detektiert und anschließend hochpaßgefiltert. Das so erzeugte Signal wird dann von einem nulldurchgangsgetriggerten Komparator digitalisiert. Die positiven Flanken des digitalisierten Signals werden schließlich in kurze Pulse umgesetzt („positive Nulldurchgangspulse“). Auf diese Weise entsteht ein Pulszug, mit dem sich die Anzahl der positiven Nulldurchgänge zählen läßt.

Bei der alten Schaltung führten Rauschen und durch digitale Bausteine verursachte Spannungsspitzen zu unerwünschten Komparatorsignalsprüngen in der Nähe der Nulldurchgänge. Dies verhinderte den bestimmungsgemäßen Einsatz. In der überarbeiteten Elektronik wurden die Spannungsversorgung sorgfältig geglättet und eine Komparatorstufe mit einstellbarer Hysterese verwandt [Mog00]. Zusammen mit einigen weiteren Änderungen erlaubt dies einen zuverlässigen Betrieb. Um eine schnelle und nicht durch Verzerrungen (Kabel) beeinträchtigte Signalverarbeitung zu gewährleisten, befindet sich die gesamte bisher beschriebene Schaltung in demselben Schaltkästchen wie die zur Detektion verwendete Photodiode. Die digitalen Bestandteile wurden als Emitter-Coupled Logic (ECL) aufgebaut. Für Referenz- und Signal-Laser gibt es je ein Schaltkästchen, das die entsprechenden Pulse liefert (Referenz- bzw. Signalkanal, siehe Abbildung 6.7).

Die Pulse können nun gezählt werden. Es muß allerdings sichergestellt werden, daß das Verhältnis der gezählten Pulse n_s/n_r (digitale Signale) gleich dem Verhältnis der während der Zähldauer durchlaufenen Perioden der analogen Signale ist („phasensensitive Auslesung“). Dazu werden beide Kanäle in eine digitale Elektronik eingespeist, die die Weiterleitung der Pulse an die Zählleinheit in Abhängigkeit von einem externen Steuersignal auf die Erfüllung dieser Bedingung abstimmt. Es handelt sich um eine „Torelektronik“, die in Abhängigkeit von dem Steuersignal und den Signalen in den beiden Meßkanälen geöffnet und geschlossen wird. Das Steuersignal („öffnen“ oder „schließen“) bestimmt den Vorgang, und dieser wird erst dann ausgeführt, wenn in beiden Kanälen gleichzeitig ein Puls anliegt („Gleichzeitigkeitsbedingung“). Bei Steuersignal „öffnen“ bleibt die Pulsweiterleitung also solange unterbunden bis die Gleichzeitigkeitsbedingung erfüllt ist. Danach werden die Pulse weitergeleitet und gezählt. Springt das Steuersignal auf „schließen“, wird noch solange weitergezählt, bis die Gleichzeitigkeitsbedingung wieder erfüllt ist. Danach erreichen keine Pulse mehr die Zählleinheit. Die schließenden Pulse werden im Gegensatz zu den öffnenden mitgezählt. Damit ist $q = n_s/n_r$. Streng gilt dies nur für unendlich scharfe Pulse. Daher wurde der Aufbau abgeändert. Die Eingänge der Torelektronik für die Meßkanäle sind nun mit zusätzlichen flankengetriggerten Pulsgeneratoren versehen, die deutlich schmalere Pulse für die weitere Bearbeitung bereitstellen. Die Breite dieser Pulse beträgt nun etwa 9 ns.

Ein PC führt den eigentlichen Zählvorgang und die Auswertung durch. Auf diese Weise ergibt sich etwa alle 2 Sekunden ein Meßwert. Es stehen zwei Betriebsarten zur Verfügung:

1. *Einzelmessungen* mit ständiger Ausgabe des neuesten Meßwertes
2. *Mehrfachmessungen* mit statistischer Auswertung. Dabei werden 100 Messungen in Folge ausgeführt, Meßwerte ausgesondert, die durch die Abstoßungsvorgänge an den Schienenenden verfälscht wurden, und von den restlichen Meßwerten Mittelwert und Varianz bestimmt. Dieses Verfahren dauert etwa 5 min und wird zur genauen Messungen frequenzstabiler Signalquellen verwandt.

6.3.4 Verbesserung des optischen Aufbaus

Der auf hohe passive Stabilität ausgerichtete Aufbau der Optik im Experiment kommt besonders den interferometrischen Bestandteilen zugute. Um ein möglichst sanftes Gleiten des Wagens zu ermöglichen, wurde die Schiene poliert. Da das Interferometer nicht evakuiert ist, können Luftströmungen über Brechungsindexfluktuationen die Strahlrichtungen beeinflussen. Daher wurden die Strahlen stellenweise (z. B. in der Nähe der beheizten Helium-Neon-Laser-Röhre) in Strahlrohren geführt [Urb04].

Zur Verminderung von Beugungseffekten (siehe Punkt 4 der Fehlerquellen) werden Teleskope benutzt, die die Strahlen so aufweiten, daß sie im Interferometer keine merkliche Divergenz mehr aufweisen. Den unterschiedlichen Strahlparametern von Dioden-Laser und Farbstoff-Laser wird mit unterschiedlichen Teleskopen Rechnung getragen. Für den Dioden-Laser-Strahl wird ein Teleskop aus zwei sphärischen und einer zylindrischen Linse verwandt, mit dem der Astigmatismus gut ausgeglichen werden kann.

6.3.5 Statistische Meßfehler

Dank der beschriebenen Verbesserungen konnte der statistische Meßfehler stark vermindert werden. Die Messung des Verhältnisses

$$q_{\text{cal}} = \frac{\lambda'_{\text{ref}}}{\lambda'_{\text{cal}}} \quad (6.51)$$

zwischen der effektiven Referenz-Wellenlänge λ'_{ref} des Helium-Neon-Lasers und der (effektiven) Wellenlänge λ'_{cal} des über das Sättigungssignal stabilisierten Dioden-Lasers wird an jedem Meßtag vor und nach den Messungen am Atomstrahl durchgeführt („Vor- und Nach-Eichung“ des Michelson-Interferometers). Die Abbildung 6.8 zeigt die durch statistische Auswertung von Mehrfachmessungen bestimmten 95,4%-igen Konfidenzintervalle für q (zweiseitiger Student- T -Test).

Aus den Messungen ergeben sich Schlußfolgerungen über das kurz- und langfristige Driftverhalten sowie die Reproduzierbarkeit der Justierung:

1. *Kurzfristiges Driftverhalten (Zeitskala 5 min)*: Eine Messung dauert ungefähr 5 min. Messungen derselben Meßreihe wurden unmittelbar hintereinander aufgenommen. Sie weisen keine signifikanten Abweichungen auf. Sie können daher zur Verbesserung der Statistik vereinigt werden.
2. *Langfristiges Driftverhalten (Zeitskala 6 h)*: Bei den Meßreihen am selben Tag hat die spätere Nach-Eichung (II) ein höheres Ergebnis als die Vor-Eichung (I). Dies ist vermutlich auf die steigende Temperatur (Abwärme

elektronischer Geräte) zurückzuführen. Trotzdem ist die Drift nur von der Größenordnung der statistischen Fehler der Einzelmessungen.

3. *Reproduzierbarkeit der Justierung*: Das Michelson-Interferometer wird i. allg. an jedem Meßtag neu justiert. Die Empfindlichkeit des Ergebnisses bei Justierungsänderungen wurde bereits angegeben (vgl. 6.3.2). Daher ist es nicht verwunderlich, daß die Meßwerte an unterschiedlichen Tagen deutlich voneinander abweichen können.

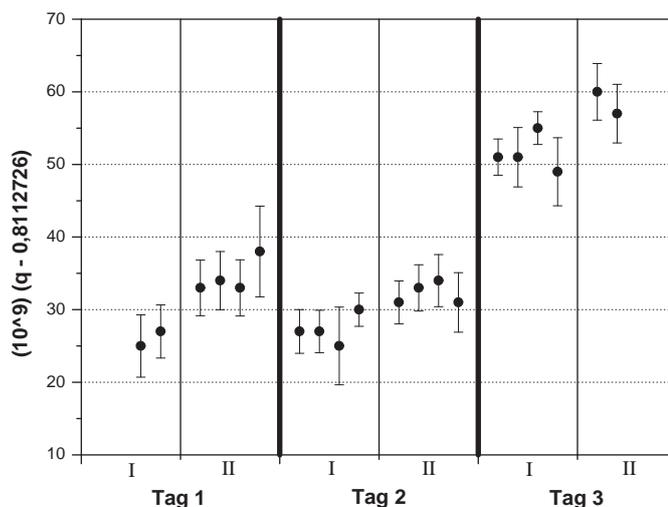


Abbildung 6.8: Eichmessungen mit dem Michelson-Interferometer: Gemessen wird das Verhältnisses q_{cal} zwischen der (effektiven) Referenz-Wellenlänge λ'_{ref} des Helium-Neon-Lasers und der (effektiven) Wellenlänge λ'_{cal} des über das Sättigungssignal stabilisierten Dioden-Lasers. Jeder Punkt ist der Mittelwert einer Mehrfachmessung (aus etwa 85 Einzelmessungen), der Fehlerbalken gibt das zugehörige 95,4%-ige Konfidenzintervall („ 2σ “-Student- T -Konfidenzintervall) an. Die halbe Länge der Fehlerbalken ist im Mittel $3,7 \cdot 10^{-9}$. Die großen römischen Buchstaben (I) und (II) kennzeichnen Meßreihen, die vor (I) bzw. nach (II) Messungen am Atomstrahl durchgeführt werden (Vor- und Nach-eichung). Zwischen den Meßreihen (I) und (II) liegen einige Stunden. In dieser Zeit werden keine Änderungen an der Justierung vorgenommen. Die Umgebungsparameter (Druck, Temperatur) können sich allerdings ändern. Da das Michelson-Interferometer i. allg. an jedem Meßtag neu justiert wird, lassen sich Rückschlüsse auf die Reproduzierbarkeit der Justierung ziehen.

6.3.6 Auflösung der Frequenzmessung

Die Bestimmung der absoluten Frequenz von Dioden- oder Farbstoff-Laser erfolgt in vier Schritten:

1. *Zeitpunkt t_0 : Vor-Eichung:* Messung des Verhältnisses q_{cal} zwischen der effektiven Referenz-Wellenlänge λ'_{ref} des Helium-Neon-Lasers und der (effektiven) Wellenlänge λ'_{cal} des über das Sättigungssignal stabilisierten Dioden-Lasers:

$$q_{\text{cal},0} = \frac{\lambda'_{\text{ref},0}}{\lambda'_{\text{cal},0}} \quad (6.52)$$

2. *Zeitpunkt t : Messung* des Verhältnisses q zwischen der (effektiven) Referenz-Wellenlänge λ'_{ref} und der effektiven Signalwellenlänge λ' :

$$q = \frac{\lambda'_{\text{ref}}}{\lambda'} \quad (6.53)$$

3. *Zeitpunkt t_1 : Nach-Eichung:*

$$q_{\text{cal},1} = \frac{\lambda'_{\text{ref},1}}{\lambda'_{\text{cal},1}} \quad (6.54)$$

4. Auswertung

Es wird nun die Auswertung erklärt. Nach (6.49) und (6.50) gilt

$$q_{\text{cal},j} = \frac{\eta_{\text{ref},j} \nu_{\text{cal},j}}{\eta_{\text{cal},j} \nu_{\text{ref},j}} \quad (j \in \{0, 1\}) \quad (6.55)$$

$$q = \frac{\eta_{\text{ref}} \nu}{\eta \nu_{\text{ref}}} \quad (6.56)$$

Also

$$\frac{q_{\text{cal},1}}{q} = \frac{\eta_{\text{ref},1}}{\eta_{\text{ref}}} \frac{\eta}{\eta_{\text{cal},1}} \frac{\nu_{\text{ref}}}{\nu_{\text{ref},1}} \frac{\nu_{\text{cal},1}}{\nu} \quad (6.57)$$

Dabei sind die gleichen Größen für unterschiedlichen Index i . allg. nicht gleich, da sie zu Messungen gehören, die zu unterschiedlichen Zeiten durchgeführt werden. Driften führen dann zu geringfügigen Abweichungen. Diese Abweichungen können aus $\Delta q_{\text{cal}} = q_{\text{cal},1} - q_{\text{cal},0}$ abgeschätzt werden: (6.57) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{q_{\text{cal},1}}{q} = \frac{q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal}}} \cdot \frac{q_{\text{cal}}}{q} \quad (6.58)$$

Dabei enthält der erste Faktor

$$\frac{q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal}}} = \frac{\eta_{\text{ref},1}}{\eta_{\text{ref}}} \frac{\eta_{\text{cal}}}{\eta_{\text{cal},1}} \frac{\nu_{\text{ref}}}{\nu_{\text{ref},1}} \frac{\nu_{\text{cal},1}}{\nu_{\text{cal}}} \quad (6.59)$$

den Meßwerte der Nacheichung und mit q_{cal} den Erwartungswert einer (nicht durchgeführten) Eichmessung zum Zeitpunkt t . Beim zweiten Faktor vereinfacht sich (6.57), da sich die Werte in Zähler und Nenner auf den selben Zeitpunkt beziehen. Es ergibt sich:

$$\frac{q_{\text{cal},1}}{q} = \underbrace{\frac{q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal}}}}_{\text{Drift}} \cdot \underbrace{\frac{\beta\gamma}{\beta_{\text{cal}}\gamma_{\text{cal}}}}_{\text{Aufbau}} \cdot \underbrace{\frac{n(\nu_{\text{cal}}; p, T)}{n(\nu; p, T)}}_{\text{Umgebung}} \cdot \frac{\nu_{\text{cal}}}{\nu} \quad (6.60)$$

Wenn alle Korrekturfaktoren Eins sind, muß lediglich für ν_{cal} der Wert ν_0 aus (6.7) eingesetzt werden, und die absolute Frequenz des Signal-Lasers ist bestimmt. Allgemein definiert die Gleichung (6.60) in der Form

$$n(\nu; p, T) \nu = \frac{q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal}}} \frac{\beta\gamma}{\beta_{\text{cal}}\gamma_{\text{cal}}} n(\nu_{\text{cal}}; p, T) \nu_{\text{cal}} \cdot \frac{q}{q_{\text{cal},1}} \quad (6.61)$$

die Frequenz des Signal-Lasers implizit:

$$\nu = \nu \left(\frac{q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal}}}, \frac{\beta\gamma}{\beta_{\text{cal}}\gamma_{\text{cal}}}, \nu_{\text{cal}}; p, T; \frac{q}{q_{\text{cal},1}} \right) \quad (6.62)$$

Die Abschätzung der Abweichungen der Argumente von $(1, 1, \nu_0; p, T; q/q_{\text{cal},1})$ liefert die Grundlage für die Fehlerabschätzung.

1. *Drift*: Das Verhältnis

$$\frac{q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal}}} \quad (6.63)$$

kann unter Verwendung von $\Delta q_{\text{cal}} = q_{\text{cal},1} - q_{\text{cal},0}$ abgeschätzt werden. Da zwischen t und t_1 etwa 1 h, zwischen t_0 und t i. allg. 5 h und mehr vergehen, wird folgende konservative Fehleransetzung vorgenommen:

$$\left| \frac{q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal}}} - 1 \right| \approx \left| \frac{q_{\text{cal},1} - q_{\text{cal}}}{q_{\text{cal},1}} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|\Delta q_{\text{cal}}|}{q_{\text{cal},1}} \quad (6.64)$$

2. Das Verhältnis

$$\frac{\beta\gamma}{\beta_{\text{cal}}\gamma_{\text{cal}}} \quad (6.65)$$

enthält die Korrekturen für die Signal- und Eichwellenlänge zum Zeitpunkt t .

- (a) Auswertung für den Dioden-Laser: Wird die Signalwellenlänge vom Dioden-Laser geliefert, dann beziehen sich diese Größen auf denselben Strahlengang und es bleibt

$$\frac{\beta\gamma}{\beta_{\text{cal}}\gamma_{\text{cal}}} = \frac{1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 w_0^2}}{1 + \frac{\lambda_{\text{cal}}^2}{4\pi^2 w_0^2}} \quad (6.66)$$

Differentielle Auswertung bei $\lambda = \lambda_{\text{cal}}$ liefert:

$$d \frac{\beta\gamma}{\beta_{\text{cal}}\gamma_{\text{cal}}} = -2 \frac{\frac{\lambda_{\text{cal}}^2}{4\pi^2 w_0^2}}{1 + \frac{\lambda_{\text{cal}}^2}{4\pi^2 w_0^2}} \cdot \frac{d\nu}{\nu_{\text{cal}}} \quad (6.67)$$

Bei den Messungen ist $d\nu < 50$ GHz. Damit ergibt sich für den Ausdruck (6.67) ein Wert von weniger als 10^{-10} .

- (b) Auswertung für den Farbstoff-Laser: Wird die Signalwellenlänge vom Farbstoff-Laser geliefert, beziehen sich die Korrekturen auf unterschiedliche Strahlengänge und Moden. Daher kann nicht wie für den Dioden-Laser vorgegangen werden. Die Abweichung des Ausdrucks (6.65) von Eins wird später grob abgeschätzt.

3. *Abweichung der Eichwellenlänge vom Literaturwert:* Die Frequenz ν_{cal} wird vom Dioden-Laser geliefert, der mit Hilfe der Sättigungsspektroskopie auf das „Lamb-Loch“ für den optischen Pumpübergang stabilisiert ist. Dabei können geringfügige Abweichungen von dem Literaturwert (6.7) auftreten (doppler-verbreiteter Untergrund des Sättigungssignals, Offsets in der Regelung, Reststrefelder). Daher wird ein Fehler von der halben natürlichen Linienbreite dieses Übergangs angesetzt. Also

$$|\nu_{\text{cal}} - \nu_0| < 3 \text{ MHz} \quad (6.68)$$

Mit der Frequenz ν_{cal} können die Atome im Atomstrahl bei Abwesenheit von äußeren Feldern mit befriedigender Effizienz gepumpt werden. Dies liefert einen unabhängigen Anhaltspunkt dafür, daß ν_{cal} nahe bei der tatsächlichen feldfreien atomaren Übergangsfrequenz liegt.

4. *Umgebungsparameter:* Die Abbildung

$$\nu \rightarrow n(\nu; p, T) \nu = \frac{c}{\lambda_{\text{Luft}}} \quad (6.69)$$

ist durch die Edlen-Formel (siehe A.1) gegeben. Bei festgelegten Umgebungsparametern p und Temperatur T kann für vorgegebenes c/λ_{Luft} die implizit gegebene Frequenz ν aus (6.61) mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden. Es werden für die Umgebungsparameter konstante Werte angesetzt, die den Verhältnissen im Labor im Mittel nahe kommen, nämlich $p = 1013, 25 \text{ hPa}$ und $T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.

Auswertung von (6.62) an der Stelle $(1, 1, \nu_0; p, T; q/q_{\text{cal},1})$ liefert:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \left(\frac{q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal}}} \right)} = \frac{n(\nu_0; p, T)}{n(\nu; p, T) + \frac{\partial n(\nu; p, T)}{\partial \nu} \nu} \cdot \frac{q}{q_{\text{cal},1}} \nu_0 \quad (6.70)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \left(\frac{\beta \gamma}{\beta_{\text{cal}} \gamma_{\text{cal}}} \right)} = \frac{n(\nu_0; p, T)}{n(\nu; p, T) + \frac{\partial n(\nu; p, T)}{\partial \nu} \nu} \cdot \frac{q}{q_{\text{cal},1}} \nu_0 \quad (6.71)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \nu_{\text{cal}}} = \frac{n(\nu_0; p, T) + \frac{\partial n(\nu_0; p, T)}{\partial \nu} \nu_0}{n(\nu; p, T) + \frac{\partial n(\nu; p, T)}{\partial \nu} \nu} \cdot \frac{q}{q_{\text{cal},1}} \quad (6.72)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial p} = \left[\frac{1}{n(\nu_0; p, T)} \frac{\partial n(\nu_0; p, T)}{\partial p} - \frac{1}{n(\nu; p, T)} \frac{\partial n(\nu; p, T)}{\partial p} \right] \cdot \frac{n(\nu; p, T) \nu}{n(\nu; p, T) + \frac{\partial n(\nu; p, T)}{\partial \nu} \nu} \quad (6.73)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial T} = \left[\frac{1}{n(\nu_0; p, T)} \frac{\partial n(\nu_0; p, T)}{\partial T} - \frac{1}{n(\nu; p, T)} \frac{\partial n(\nu; p, T)}{\partial T} \right] \cdot \frac{n(\nu; p, T) \nu}{n(\nu; p, T) + \frac{\partial n(\nu; p, T)}{\partial \nu} \nu} \quad (6.74)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \left(\frac{q}{q_{\text{cal},1}} \right)} = \frac{n(\nu_0; p, T)}{n(\nu; p, T) + \frac{\partial n(\nu; p, T)}{\partial \nu} \nu} \cdot \nu_0 \quad (6.75)$$

Die eckigen Klammern werden zur Abkürzung mit $[\dots]_p$ bzw. $[\dots]_T$ bezeichnet. Im Experiment ist für alle Laser-Frequenzen $n - 1 \sim 3 \cdot 10^{-4}$ und $(\partial n / \partial \nu) \lesssim$

$1 \cdot 10^{-5}$. Daher werden Verhältnisse von Ausdrücke der Form $n, n + (\partial n / \partial \nu') \nu'$ gegen Eins vernachlässigt. In dieser Näherung gilt:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \left(\frac{q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal}}} \right)} = \frac{q}{q_{\text{cal},1}} \nu_0 \quad (6.76)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \left(\frac{\beta \gamma}{\beta_{\text{cal}} \gamma_{\text{cal}}} \right)} = \frac{q}{q_{\text{cal},1}} \nu_0 \quad (6.77)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \nu_{\text{cal}}} = \frac{q}{q_{\text{cal},1}} \quad (6.78)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial p} = [\dots]_p \nu \quad (6.79)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial T} = [\dots]_T \nu \quad (6.80)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \left(\frac{q}{q_{\text{cal},1}} \right)} = \nu_0 \quad (6.81)$$

Für die eckigen Klammern ergeben sich bei Farbstoff-Laser-Frequenzen Werte von $-4,2 \cdot 10^{-9} / \text{hPa}$ bzw. $1,4 \cdot 10^{-8} / ^\circ\text{C}$. Für Dioden-Laser-Frequenzen sind die Klammern wegen $\nu \approx \nu_0$ vernachlässigbar. Die ersten fünf Zeilen werden zum systematischen Fehler zusammengefaßt, die letzte Zeile liefert den statistischen Fehler. Ist ν^* die mit dem Newton-Verfahren bestimmte Lösung von (6.61) mit den Parametern $(1, 1, \nu_0; p, T)$, also

$$\nu^* = \nu(1, 1, \nu_0; p, T; q/q_{\text{cal},1}) \quad (6.82)$$

dann ergibt sich schließlich

$$|\nu^* - \nu| \leq \Delta \nu + \delta \nu \quad (6.83)$$

mit dem systematischen Fehler (es wird $(q/q_{\text{cal},1})\nu_0 \approx \nu^*$ verwandt)

$$\Delta \nu \leq \nu^* \left\{ \left| \frac{q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal}}} - 1 \right| + \left| \frac{\beta \gamma}{\beta_{\text{cal}} \gamma_{\text{cal}}} - 1 \right| + \frac{|\nu_{\text{cal}} - \nu_0|}{\nu_0} + [\dots]_p \Delta p + [\dots]_T \Delta T \right\} \quad (6.84)$$

und dem statistischen Fehler

$$\delta \nu = \nu_0 \delta \left(\frac{q}{q_{\text{cal},1}} \right) \quad (6.85)$$

Wird die Konfidenz mit $\alpha \in (0, 1)$ bezeichnet, so ergibt sich

$$\delta_\alpha \nu = \nu^* \left\{ \frac{\delta \sqrt{\alpha} q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal},1}} + \frac{\delta \sqrt{\alpha} q}{q} \right\} \quad (6.86)$$

Nun werden die Abschätzungen für die auftretenden systematischen Fehler eingesetzt. Er ergibt sich für Dioden-Laser-Frequenzen:

$$\Delta \nu_{\text{Diode}} \leq 3 \text{ MHz} + \nu_{\text{Diode}} \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta q}{q_{\text{cal},1}} \right| + 10^{-10} \right\} \quad (6.87)$$

$$\approx 3 \text{ MHz} + \nu_{\text{Diode}} \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta q}{q_{\text{cal},1}} \right| \quad (6.88)$$

Die Auflösung von Dioden-Laser-Frequenzen wird bei Berücksichtigung aller Fehlerquellen dann i. allg. unter 10 MHz liegen.

Bei Farbstoff-Laser-Frequenzen werden Druckabweichungen von weniger als 40 hPa und Temperaturabweichungen von weniger als 5 °C angenommen. Damit wird der Betrag der Summe der eckigen Klammern nach oben gegen $2,3 \cdot 10^{-7}$ abgeschätzt. Beugungskorrekturen können dagegen vernachlässigt werden. Die durch geometrische Korrekturen verursachten Fehler eingeschlossen, wird als systematischer Fehler $\Delta\nu_{C102} \leq 200$ MHz angesetzt. Die statistischen Fehler ergeben sich wie für Dioden-Laser-Frequenzen. Da Farbstoff-Laser-Frequenzen stets aus weniger als zehn Einzelmessungen bestimmt werden, sind die allerdings größer als bei den Dioden-Laser-Frequenzen. Damit:

$$\Delta\nu_{C102} \leq 200 \text{ MHz} \quad (6.89)$$

Aus dem Vergleich der systematischen Fehler ist ersichtlich, wie viel durch das besondere Meßverfahren gewonnen wird.

6.3.7 Messung der Stärke der magnetischen Induktion

Die hohe Auflösung der absoluten Frequenzmessung für Dioden-Laser-Frequenzen bildet die Grundlage für die Messungen des tatsächlichen Wertes der magnetischen Induktion: Die Frequenz der optischen Pumpstufe wird mit dem in 6.1.4 geschilderten Verfahren vor der Aufzeichnung eines Spektrums optimiert. Wird der Einfluß von magnetischer Induktion und elektrischem Feld auf den optischen Pumpvorgang in erster Ordnung berücksichtigt (Vernachlässigung des diamagnetischen Zeeman-Effektes und des quadratischen Stark-Effektes), dann ist die Frequenz mit maximalem Wirkungsquerschnitt für die Pumpstufe durch Formel (6.6) gegeben. Als systematischer Fehler bei der Einstellung dieser Frequenz wird die halbe Linienbreite des feldfreien Übergangs angesetzt, also 3 MHz. Darüber hinaus wurde folgende Beobachtung gemacht: Werden bei geschlossenem supraleitenden Schalter mehrere Spektren aufgenommen, so verschiebt sich diese Frequenz von Spektrum zu Spektrum geringfügig nach oben. Dies liegt wahrscheinlich daran, daß die Verbindungen zwischen supraleitendem Schalter und supraleitender Spule (Lötstellen) nicht supraleitend sondern nur sehr niederohmig sind. Dies führt zu einer langsamen exponentiellen Abnahme der Stromstärke in der aus Schalter und Magnet bestehenden Schleife und damit der magnetischen Induktion. Die zugehörige Zerfallskonstante kann aufgrund der Frequenzanpassungen grob abgeschätzt werden und hat einen Wert von etwa 1,5 Monaten. Dem entspricht eine relative Änderung der magnetischen Induktion während eines Spektrums von etwa $-1,2 \cdot 10^{-4}$. Um dem Rechnung zu tragen, wird ein zusätzlicher relativer Fehler der magnetischen Induktion von $2 \cdot 10^{-4}$ angesetzt. Damit kann der Fehler bei der Bestimmung der magnetischen Induktion angegeben werden. Wird für die Frequenz mit maximalem Wirkungsquerschnitt für die Pumpstufe der Wert ν_{Diode} gemessen, so ergibt sich für die Stärke der magnetischen Induktion

$$B = \frac{\nu_0 - \nu_{\text{Diode}}}{\mu_B} \quad (6.90)$$

mit dem systematischen Fehler

$$\Delta B = \frac{1}{\mu_B} (3 \text{ MHz} + \Delta\nu_{\text{Diode}}) + 2 \cdot 10^{-4} B \quad (6.91)$$

$$= \frac{1}{\mu_B} \left\{ 3 \text{ MHz} + \nu_{\text{Diode}} \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta q}{q_{\text{cal},1}} \right| \right\} + 2 \cdot 10^{-4} B \quad (6.92)$$

und dem statistischen Fehler

$$\delta_\alpha B = \frac{\nu_{\text{Diode}}}{\mu_B} \left\{ \frac{\delta_{\sqrt{\alpha}} q_{\text{cal},1}}{q_{\text{cal},1}} + \frac{\delta_{\sqrt{\alpha}} q}{q} \right\} \quad (6.93)$$

6.3.8 Energieskala für experimentelle Spektren

Die theoretische Beschreibung des Rubidiumatoms gemäß Kapitel 3 liefert als Nullpunkt der Energieskala die Ionisationsschwelle bei Abwesenheit sämtlicher äußerer Felder („feldfreie Ionisationsschwelle“). Deswegen werden experimentelle Photoabsorptionsspektren von der Skala der Photonenenergie des Farbstoff-Laser-Lichtes auf diese Skala umgerechnet. Dies geschieht aufgrund der Beschreibung der optischen Pumpstufe in 6.1.1 und unter Verwendung der spektroskopisch ermittelten Ionisationsschwelle für ^{85}Rb .

Die absolute Frequenz der optischen Pumpstufe ν_{Diode} wird gemessen und bestimmt den Wert für die magnetische Induktion B . Sei \mathcal{E}_B die auf die feldfreie Ionisationsschwelle bezogene Energie des Zustandes $|^{85}\text{Rb}; 5s_{1/2}; m_f = -3\rangle$. Einer Farbstoff-Laser-Frequenz ν_{C102} entspricht dann die auf die feldfreie Ionisationsschwelle bezogene Energie

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B + h(\nu_{\text{Diode}} + \nu_{\text{C102}}) \quad (6.94)$$

Die Energie \mathcal{E}_B läßt sich nach (6.4) auf die feldfreie Energie zurückführen:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - B \left[\mu_B \left(l + \frac{g_s}{2} \right) - \mu_K \frac{5g_i}{2} \right] + h(\nu_{\text{Diode}} + \nu_{\text{C102}}) \quad (6.95)$$

Dabei ist \mathcal{E}_0 die Ionisationsenergie des Zustandes $|^{85}\text{Rb}; 5s_{1/2}; m_f = -3\rangle$ bei Abwesenheit sämtlicher äußerer Felder. Diese kann aus spektroskopischen Daten bestimmt werden ([LN83] für die Feinstrukturionisationsenergie und [BGR91] für die Hyperfeinstrukturaufspaltung). Es ergibt sich:

$$\mathcal{E}_0 = -33690,75671(5) \text{ cm}^{-1} \quad (6.96)$$

Damit kann die Skala umgerechnet werden. Die Fehler der spektroskopischen Daten können gegen den systematischen Fehler bei der Messung der Farbstoff-Laser-Frequenzen vernachlässigt werden. Dieser liefert auch den systematischen Fehler für die Bestimmung des Energieskala. Spektren auf dieser Skala können also eine gleichförmige systematische Energieverschiebung von 200 MHz aufweisen.

Systematische und statistische Fehler bei der absoluten Bestimmung des Farbstoff-Laser-Frequenz zu Beginn des Spektrums haben einen unterschiedlichen Einfluß auf die Reproduzierbarkeit der Energieskala. Der systematische Fehler kann für Messungen, die am selben Meßtag und ohne Änderungen an der Justierung des Michelson-Interferometers durchgeführt werden, in guter

Näherung als konstant angenommen werden. Unter diesen Bedingungen wird die Reproduzierbarkeit der Energieskala im wesentlichen durch die folgenden Fehler beschränkt:

1. *Statistischer Fehler der Bestimmung der Farbstoff-Laser-Frequenz:* Da dazu stets zehn oder weniger Einzelmessungen dienen, ist dieser Fehler deutlich größer als der für die Bestimmung der Dioden-Laser-Frequenz (etwa 85 Einzelmessungen).
2. *Driften der Farbstoff-Laser-Strahlage:* Der Farbstoff-Laser-Resonator erfordert auf der Zeitskala von 1 h eine geringfügige Nachjustierung. Dies ist ein Anzeichen für eine langsame Drift der Resonator-Geometrie und damit der Farbstoff-Laser-Strahlage. Diese beeinflusst den geometrischen Faktor der effektiven Wellenlänge und damit das Ergebnis der Messung mit dem Michelson-Interferometer.

Wird das gleiche Spektrum am selben Meßtag zweimal aufgenommen, so kann aus dem Vergleich der Spektren die Verschiebung der Frequenz-Skala ermittelt werden. Erfahrungsgemäß ergibt sich eine Streuung von etwa 10 MHz.

6.3.9 Strukturauflösung in experimentellen Spektren

Eine ideale experimentelle Auflösung der fundamentalen Eigenschaften eines Rubidium-Atoms (u. U. in statischen äußeren Feldern) wäre dann erreicht, wenn die experimentelle Anregungsfunktion nur von dem Anfangszustand des Atoms und dem seine Dynamik beschreibenden Hamilton-Operator abhängt. Die Formel von Rescigno-McKoy hat diese Gestalt (siehe eine der Formen (4.91), (4.93) oder (4.95) in 4.5). In 4.6 wird die experimentelle Anregungsfunktion durch diese Formel dargestellt. Mit Blick auf die Herleitungen in Kapitel 4 und die Vorbereitungen in Kapitel 3 können die Effekte angegeben werden, die eine im erklärten Sinne nichtideale Auflösung verursachen.

Werden diese Effekte einzeln betrachtet, so führen viele dazu, daß das experimentelle Spektrum als Faltung der ideal aufgelösten Anregungsfunktion mit einer weiteren Funktion dargestellt werden kann. Meist ist ein bestimmter Effekt mit einem kennzeichnenden Verlauf („Verbreiterungsprofil“) dieser Funktion (z. B. Lorentz- oder Gauß-Profil) verbunden, während die Parameter des Effektes nur Einfluß auf die Ausprägung der Profils (Breite, Höhe) haben. Bei einem Lorentz-Profil wird von einer homogenen andernfalls von einer inhomogenen Verbreiterung gesprochen. In jedem Fall ist die Breite dieser Funktion eine Schranke für die Strukturauflösung im experimentellen Spektrum. Die nachfolgende Liste nennt die wesentlichen Effekte, die beim Experiment zu einer Beschränkung der Auflösung führen. Weitergehende theoretische Untersuchung finden sich z. B. in [Dem98]:

1. *Geometrische und relativistische Effekte:* Die Geometrie des Experiments wurde so gewählt, daß der Einfluß der statistischen Verteilung der Schwerpunktsbewegung der Atome bestmöglich unterdrückt wird. Eine vollständige Auslöschung ist aufgrund relativistischer Effekte nicht möglich. Ferner wird die Unterdrückung durch geometrische Unvollkommenheiten begrenzt. Daher sind die einzelnen Punkte des experimentellen Spektrums stets das Ergebnis einer geringfügigen Mittelung über von der Schwerpunktsbewegung abhängige Wirkungsquerschnitte. Insbesondere ist mit

einem geringen Doppler-Effekt erster Ordnung (inhomogene Verbreiterung) zu rechnen.

2. *Endliche Linienbreiten der Laser (homogen)*: In den theoretischen Überlegungen zur Anregungsfunktion wurde von vollkommen monochromatischen Wellen oder Strahlen ausgegangen.
3. *Beugungseffekte (inhomogen)*: Die hier gewählte Beschreibung der Atom-Licht-Wechselwirkung vernachlässigt die mit der Rayleigh-Länge skalierenden Eigenschaften der Laser-Strahlen. Wenn sich die Fokusse genau im Atomstrahl befinden, wird diese Näherung sehr gut sein. Im Experiment können Abweichungen von dieser Bedingung auftreten.
4. *Unschärfe-Effekte (inhomogen)*: Die Formel von Rescigno-McKoy gilt im Grenzfall unendlich langer Wechselwirkungszeit zwischen Atom und Laser-Strahlen. Eine endliche Wechselwirkungszeit begrenzt die Energieauflösung („Flugzeitverbreiterung“, „Energie-Zeit-Unschärfe“). Auch die durch die endliche Statistik der Messungen verursachten Fehler können als Unschärfe-Effekt verstanden werden.
5. *Sättigungseffekte*: Die Atom-Licht-Wechselwirkung wurde in erster Ordnung in der Intensität behandelt. Höhere Ordnungen führen zu Sättigungseffekten bei der Photoabsorption. Bei Zuständen, deren Dynamik durch spontanen Zerfall beherrscht wird, hat dies eine homogene Verbreiterung zur Folge. Diese skaliert mit der sog. Sättigungsintensität. Für die D2-Übergänge von Rubidium liegt diese bei wenigen mW/cm^2 . Daher wird eine Sättigung dieser Übergänge selbst bei geringen Strahlleistungen von wenigen $100 \mu\text{W}$ leicht erreicht. Unabhängig davon weist der Elektronendetektor bei hohen Zählraten ein durch Raumladungen verursachtes Sättigungsverhalten auf.

Um eine starke Sättigung des optisch gepumpten Übergangs auszuschließen, wurde anhand von Photoabsorptionsspektren in gekreuzten Feldern der Einfluß der entsprechenden Strahlleistung auf die Strukturauflösung folgendermaßen untersucht: Die Stärke der statischen Felder und das zu überstreichende Energieintervall wurden in der Nähe der Werte aus 3.3 gewählt. Zunächst wurde die Strahlleistung des Dioden-Lasers soweit abgesenkt, daß die Zählrate empfindlich auf weitere Änderungen antwortet. Dann wurden Spektren aufgezeichnet wobei schrittweise die Leistungsbalance verschoben wurde, d. h. die Strahlleistung des Dioden-Lasers wurde abgesenkt und der Zählratenverlust durch eine Erhöhung der Strahlleistung des Farbstoff-Lasers ausgeglichen. Anschließend wurde die Breite der (energiebezogenen) Autokorrelationsfunktion der Fluktuation dieser Spektren berechnet. Sämtliche Verbreiterungen tragen zu dem so ermittelten Wert bei. Wenn ein Wert für die Strahlleistung des Dioden-Lasers gefunden wurde, bei dem eine deutliche Erhöhung der Leistung bei entsprechender Absenkung der Strahlleistung des Farbstoff-Lasers keinen merklichen Einfluß auf die Breite hat, so liefert dies einen guten Anhaltspunkt dafür, daß bei beiden Anregungsstufen keine ausgeprägten Sättigungseffekte vorliegen. Da bei etwa gleicher Zählrate gemessen wird kann eine mögliche Sättigung des Elektronendetektors das Ergebnis nicht verfälschen. Auf diese Weise wurde der Wert von $\sim 50 \mu\text{W}$ für die Strahlleistung des Dioden-

Lasers ermittelt. Eine merkliche Abhängigkeit der Breite der Autokorrelationsfunktion von der Farbstoff-Laser-Leistung konnte nicht festgestellt werden. Im übrigen wird bei hohen Strahlleistungen des Dioden-Lasers die Autler-Townes-Aufspaltung des optisch gepumpten Übergangs sichtbar.

6. *Atom-Atom-Wechselwirkungen:* In sämtlichen theoretischen Überlegungen wurde davon ausgegangen, daß keinerlei Wechselwirkung zwischen den einzelnen Atomen im Atomstrahl besteht. Der Atomofen wurde bei verhältnismäßig niedriger Temperatur betrieben, um die Wahrscheinlichkeit von Stößen gering zu halten.

Im Experiment wird die Strukturauflösung experimentell bestimmt.

Kapitel 7

Messungen am Atomstrahl

Für dieses Kapitel sind folgenden Feststellungen von allgemeiner Bedeutung:

1. Bei experimentellen und theoretischen Photoabsorptionsspektren beziehen sich die absoluten Energieangaben stets auf die Ionisationsschwelle von ^{85}Rb bei Abwesenheit sämtlicher Felder („feldfreie Ionisationsschwelle“) (vgl. 6.3.8).
2. Der Energieabstand der Meßpunkte (Frequenzschrittweite), aus denen sich die Spektren zusammensetzen, beträgt etwa 10 MHz. Nur die Spektren, anhand derer in 7.1 die experimentelle Auflösung ermittelt wird (Abbildungen 7.1 und 7.2), wurden mit halbiertes Schrittweite aufgezeichnet.
3. Zur Darstellung der Spektren werden bezüglich der Energie benachbarte Meßpunkte durch eine gerade Strecke verbunden.
4. Die experimentellen Spektren werden keinerlei Glättung unterworfen. Dies gilt für die Abbildung ebenso wie für die Auswertung.
5. Sämtliche Ausgleichsaufgaben wurden durch gleichmäßig gewichtete χ^2 -Optimierung im Rahmen des Levenberg-Marquardt-Verfahrens¹ gelöst.

7.1 Experimentelle Auflösung

Bei der experimentellen Auflösung sind zwei Größen zu unterscheiden: Die experimentelle Linienbreite (besser: „Strukturauflösung“) und die absolute Energieauflösung. Beide werden durch Spektroskopie im Rydberg-Bereich bei Abwesenheit der statischen äußeren Felder ermittelt.

Da bei den in diesem Abschnitt beschriebenen Messungen der supraleitende Magnet nicht betrieben werden mußte, wurde der Kryostat statt mit flüssigem Helium mit flüssigem Stickstoff befüllt.

7.1.1 Strukturauflösung

Abbildung 7.1 zeigt die Spektroskopie der $42s_{1/2}$ -Linie. Die experimentelle Linienbreite beträgt 20 MHz (FWHM). Da die natürliche Linienbreite im Rydberg-

¹Programm Origin 6.0 des Herstellers Microcal Software, Inc.

Bereich gegen diesen Wert vernachlässigt werden kann, beträgt die Strukturauflösung hier 20 MHz (FWHM). Der experimentelle Linienverlauf entspricht mit einem Korrelationskoeffizienten von 99,356% dem einer Gauß-Kurve.

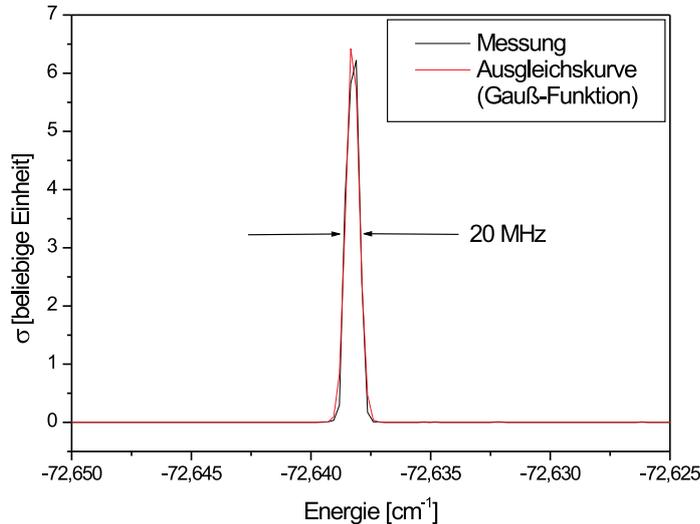


Abbildung 7.1: Spektroskopie der $42s_{1/2}$ -Linie bei Abwesenheit statischer äußerer Felder (schwarze Linie): Die experimentelle Linienbreite beträgt knapp 20 MHz. Eine Gauß-Kurve (rote Linie) kann mit einem Korrelationskoeffizienten von 99,356% an den experimentellen Verlauf angeglichen werden.

In 6.3.9 werden verschiedene Begrenzungen der Strukturauflösung genannt. Im vorliegenden Fall ist die Sättigungsverbreiterung des optisch gepumpten Übergangs am wichtigsten. Für ^{87}Rb wird in [Lew02] eine Sättigungsintensität von $1,6 \text{ mW/cm}^2$ angegeben. Unter der Annahme, daß der Wert für ^{85}Rb ähnlich ist, ergibt sich für die hier benutzte Laser-Strahlleistung von $25 \mu\text{W}$ und einen Strahltaillenradius von $100 \mu\text{m}$ bereits eine Linienbreite, die über der hier gemessenen Strukturauflösung liegt. Vermutlich ist daher der tatsächliche Strahltaillenradius größer als der angenommene Wert. Ist die Sättigungsverbreiterung gering, aber immer noch deutlich größer als der Beitrag anderer Verbreiterungen, sollte die Spitze in Abbildung 7.1 Lorentz-förmig sein. Bei stärkerer Sättigungsverbreiterung kommt es allerdings zu Abweichungen von der Lorentz-Form (Autler-Townes-Aufspaltung). Außerdem treten bei der Spektroskopie von gebundenen Zuständen hohe Zählraten auf. Dies ist i. allg. mit mehr oder weniger ausgeprägten Sättigungseffekten im Elektronendetektor verbunden, die die Form der Spitze verzerren. Die Beobachtung einer Gauß-förmigen Spitze spricht also nicht zwangsläufig gegen das Vorherrschen einer Sättigungsverbreiterung. Die Frequenzschrittweite bei der Messung ist hier nicht klein genug, um genauere Untersuchungen zur Linienform zuzulassen. Neben der Sättigung des Übergangs liefern vermutlich Flugzeit- und Doppler-Verbreiterung noch einen im MHz-Bereich liegenden Beitrag zur Gesamtbreite.

Bei den Messungen in gekreuzten Feldern wird die optische Pumpstufe mit einer Strahlleistung von $50 \mu\text{W}$ betrieben. Wird für den optisch gepumpten Zeeman-verschobenen Hyperfeinstrukturübergang von einer ähnlichen Sättigungsintensität ausgegangen, so ist keine Verschlechterung der Strukturauflösung zu erwarten. Bei dem Übergang ändert sich nämlich die magnetische Quantenzahl des Hyperfeinstrukturereimpulses um -1 . Zur Anregung wird linear polarisiertes σ -Licht verwandt. Daher wird nur mit der halben Strahlleistung gepumpt.

7.1.2 Absolute Energieauflösung

Abbildung 7.2 zeigt zwei unabhängige Spektroskopien der $42s_{1/2}$ Linie. Der Abstand der Linienschwerpunkte („center of gravity“) beträgt 10 MHz . Dies entspricht der typischen Streuung bei der Bestimmung der absoluten Energieskala (siehe 6.3.8).

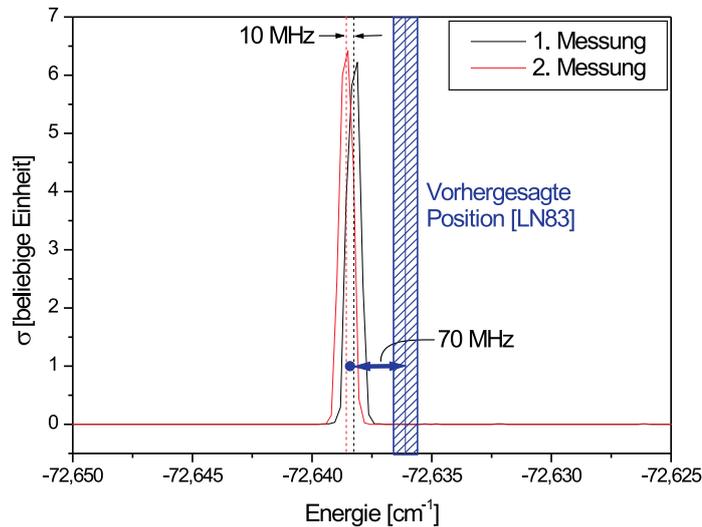


Abbildung 7.2: Streuung und systematischer Fehler bei der Bestimmung der Energieskala lassen sich anhand zweier unabhängiger Spektroskopien der $42s_{1/2}$ Linie veranschaulichen. Der Abstand der experimentellen Linienschwerpunkte beträgt 10 MHz und spiegelt die typische Streuung bei der Bestimmung der Energieskala wider. Der Literaturwert für die Lage der Linie wird bis auf 70 MHz getroffen. Dieser Fehler liegt deutlich unter dem in 6.3.8 abgeschätzten systematischen Fehler bei der Bestimmung der Energieskala.

Der systematische Fehler der Energieskala für die experimentellen Spektren ist nach 6.3.6 durch den systematischen Fehler bei der Bestimmung der Farbstoff-Laser-Frequenz gegeben und wurde in 6.3.6 mit 200 MHz abgeschätzt. Zur Überprüfung wird die experimentell ermittelte Lage der $42s_{1/2}$ -Linien mit dem Literaturwert aus [LN83] verglichen. Die Abweichung zwischen dem Mittelwert der beiden Messungen und dem vorhergesagten Wert beträgt 70 MHz .

und liegt damit deutlich unter dem abgeschätzten Wert für den Fehler der Energieskala.

Nach 6.3.8 hat die Energieskala für experimentelle Spektren einen festen systematischen Fehler. Bei absoluten Energieangaben, die sich auf diese Spektren beziehen, unterbleibt daher im folgenden die Kennzeichnung dieses Fehlers. Nach den Ausführungen in 6.3.8 und den vorangegangenen Betrachtungen ist klar, welche Fehler bei diesen Angaben zu berücksichtigen sind.

7.2 Stark-Spektren und elektrische Feldeichung

Im Experiment wird das homogene statische elektrische Feld in der Photoabsorptionszone mit einem Plattenkondensator erzeugt (siehe Abbildung 5.3). Nach den Erklärungen in 5.4.2 ist die an den Kondensator angelegte Spannung U mit der tatsächlich erzeugten Feldstärke über die Formel

$$E = E_0 + \frac{U}{d} \quad (7.1)$$

verknüpft. Dabei ist d der Plattenabstand und E_0 das Streufeld am Ort der Photoabsorption. Die Felderzeugung wird geeicht, indem die Eichparameter d und E_0 bestimmt werden.

Im Experiment wird U mit einem Digitalmultimeter gemessen. Dabei auftretende Linearitätsfehler können durch Einführung effektiver Eichparameter d' und E'_0 berücksichtigt werden, die den *Meßwert* U_M für die Spannung U mit der tatsächlich erzeugten Feldstärke gemäß

$$E = E'_0 + \frac{U_M}{d'} \quad (7.2)$$

verknüpfen. Bis auf weiteres wird im folgenden nur von den effektiven Eichparametern gesprochen. Die zusätzliche Kennzeichnung als effektiv unterbleibt daher.

7.2.1 Stark-Spektren und Stark-Karten

Die Eichparameter werden durch den Vergleich von numerisch berechneten und experimentellen Stark-Karten in der Nähe einer sog. verhinderten Kreuzung bestimmt.

Ein Photoabsorptionsspektrum für ein Atom in einem homogenen statischen elektrischen Feld wird als Stark-Spektrum bezeichnet. Es ist daher durch zwei Größen bestimmt: Die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und das bei dem Spektrum überstrichene Energieintervall $I_{\mathcal{E}}$. Im Experiment ist die Richtung des elektrischen Feldes durch die Geometrie der Elektrodeneinsatzen vorgegeben (siehe Abbildung 5.3). Es genügt daher die Angabe der Projektion $E = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y$ von \mathbf{E} auf die y -Achse (Koordinatensystem wie in Abbildung 3.2). Wenn $I_{\mathcal{E}}$ im Rydberg-Bereich, aber deutlich unterhalb der Energie des zu E gehörenden Stark-Sattels liegt, sind die Stark-Spektren i. allg. durch klar auflösbare Spitzen gekennzeichnet. Werden für mehrere Werte E aus einem elektrischen Feldstärkeintervall I_E Stark-Spektren aufgenommen, bei denen immer dasselbe Energieintervall $I_{\mathcal{E}}$ überstrichen wird, so läßt sich eine experimentelle Stark-Karte anfertigen. Dabei handelt es sich um eine zweidimensionale Darstellung, bei der I_E die

Abszisse und $I_{\mathcal{E}}$ die Ordinate bildet und in die für jeden Wert E , für den ein Stark-Spektrum aufgenommen wurde, die Energiemittelwerte \mathcal{E} der in diesem Spektrum aufgelösten Spitzen in Form von Punkten an den Stellen (E, \mathcal{E}) eingetragen werden. Stehen Spektren für hinreichend viele Werte der Feldstärke aus I_E zur Verfügung, so vermittelt die zugehörig Stark-Karte einen sehr anschaulichen Eindruck von der Verschiebung der Spitzen mit der Änderung der Feldstärke.

Stark-Karten können numerisch berechnet werden. Das Verfahren beruht auf der Reduzierung des Hamilton-Operators durch einen geeignet gewählten Unterraum, der durch endlich viele Eigenfunktionen des feldfreien Feinstruktur-Hamilton-Operators aufgespannt wird. Eine numerische Stark-Karte ergibt sich ähnlich wie eine experimentelle: Für Feldstärkewerte E aus I_E werden die in das Intervall $I_{\mathcal{E}}$ fallenden Eigenwerte \mathcal{E} des entsprechenden reduzierten Hamilton-Operators als Punkte an den Stellen (E, \mathcal{E}) eingetragen. Für einen hinreichend dichten Satz von Werten aus I_E ergeben sich dann zahlreiche Linien, die die Verschiebung der Energieeigenwerte mit der Feldstärke beschreiben. Die Einzelheiten dazu sind der Literatur zu entnehmen.² Für das weitere sind lediglich die folgenden Feststellungen wichtig:

1. Wird die Quantisierungsachse in Richtung der y -Achse gewählt, also kollinear zum elektrischen Feld, so ist die magnetische Quantenzahl m_j des Feinstruktur Drehimpulses j aus Symmetriegründen eine strenge Erhaltungsgröße.
2. Aufgrund diskreter Symmetrien hängen die Energieeigenwerte weder vom Vorzeichen von m_j noch dem von E ab.

Für die Berechnung einer numerischen Stark-Karte für das Experiment genügt es daher, neben den Bestimmungsgrößen I_E und $I_{\mathcal{E}}$ noch alle Beträge von magnetischen Quantenzahlen $|m_j|$ anzugeben, die durch die zweistufige Laser-Anregung erreicht werden können. Dann wird zu jedem dieser Beträge die numerische Stark-Karte für I_E und $I_{\mathcal{E}}$ berechnet. Schließlich werden diese Stark-Karten übereinander gelegt. Da nur die Eigenwerte selbst eingehen, gestatten diese Karten keine Vorhersage über die Stärke der experimentellen Übergänge.³

Im Experiment ist das Dioden-Laser-Licht in Richtung der y -Achse und das Farbstoff-Laser-Licht in Richtung der z -Achse polarisiert (siehe Abbildung 3.2). Bei dem optischen Pumpvorgang handelt es sich also um eine π -Anregung,

²[ZLKK79] enthält das numerische Verfahren und den Vergleich seiner Ergebnisse mit gemessenen Stark-Karten. Um die Matrixelemente des reduzierten Hamilton-Operators für einen gegebenen Feldstärkewert zu bestimmen, müssen für die den reduzierenden Unterraum aufspannenden feldfreien Eigenfunktionen die feldfreien Eigenenergien ermittelt und die Dipolmatrixelemente ausgewertet werden. Beides gelingt aufgrund der Beschreibung dieser Eigenfunktionen im Rahmen der sog. Quantendefekttheorie [Sea83, Sta99]. Sie liefert Darstellungen der feldfreien Eigenenergien in Abhängigkeit von den Quantenzahlen der zugehörigen Eigenfunktionen und freien Parametern („Rydberg-Ritz-Formeln“). Letztere können durch spektroskopische Untersuchungen bestimmt werden. Hier wird zur Berechnung der feldfreien Eigenenergien eine „modifizierte“ Rydberg-Ritz-Formel aus [LN83] mit den dort angegebenen Parameterwerten verwandt. Im Rahmen der Quantendefekttheorie können auch die Dipolmatrixelemente in guter Näherung entweder numerisch [ZLKK79] oder mit einem analytischen Verfahren [vRDP79] ausgewertet werden. Hier wird das analytische Verfahren benutzt. Die eigentliche Diagonalisierung wird durch Transformation auf Tridiagonalgestalt (Householder-Verfahren) und anschließende Anwendung des QR-Algorithmus durchgeführt.

³Eine Berechnung der Stärke ist ebenfalls möglich, allerdings ist der numerische Aufwand größer.

während der Farbstoff-Laser σ -Licht liefert. Aufgrund der Eigenschaften der optischen Pumpstufe trägt nur das Isotop ^{85}Rb zu den Stark-Spektren bei (vgl. 6.1). Das Anregungsschema ist

$$|^{85}\text{Rb}; 5s_{1/2}; f = 3\rangle \xrightarrow{\pi} |^{85}\text{Rb}; 5p_{3/2}; f = 4\rangle \xrightarrow{\sigma} |\text{Rydberg}\rangle \quad (7.3)$$

Anschaulicher ist Abbildung 7.3, aus der die Bedeutung der Feinstrukturquantenzahlen hervorgeht.

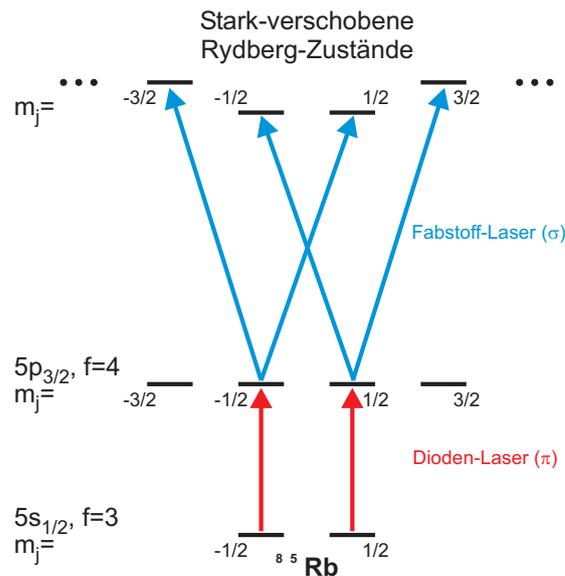


Abbildung 7.3: Anregungsschema bei der Aufzeichnung experimenteller Stark-Karten: In Dipolnäherung für die beiden Anregungen können die erreichbaren magnetischen Quantenzahlen m_j des Feinstruktur Drehimpulses j angegeben werden. Die Hyperfeinstruktur kann nur im Rydberg-Bereich vernachlässigt werden. Für die Behandlung der optischen Pumpstufe, müssen die beteiligten Hyperfeinstrukturzustände in der entkoppelten Basis („Feinstruktur \otimes Kerneigen Drehimpuls“) dargestellt werden. Die Abbildung ist in diesem Sinne zu verstehen und reicht für die Bestimmung der erreichbaren m_j -Werte aus.

Dipolübergänge führen also nur zu Zuständen mit $|m_j| \in \{1/2, 3/2\}$ von ^{85}Rb . Die Abbildungen 7.4 und 7.5 auf Seite 122 zeigen die entsprechenden numerischen Stark-Karten, die eine anschauliche Vorstellung vom Stark-Effekt vermitteln. Sie enthalten insbesondere die Linien, die aus den $42p$ -Zuständen für Feldstärkewerte bis 25 V/cm hervorgehen. In beiden Stark-Karten ist der für die Bestimmung der Eichparameter wichtige Teil umrahmt. Bei den Experimenten in gekreuzten Feldern wird später eine Feldstärke von etwa 220 V/cm bei etwas höherer Energie verwandt. Mit Blick auf die beiden Stark-Karten ist klar, daß eine solche Feldstärke als hoch einzustufen ist.

Im folgenden werden die Linien, die aus den feldfreien $42p$ -Zuständen hervorgehen, einfach als $42p$ -Linien bezeichnet. In dem Feldstärkebereich, in dem diese Linien auf den Fächer treffen (der aus Zuständen mit $n = 39$ hervorgeht),

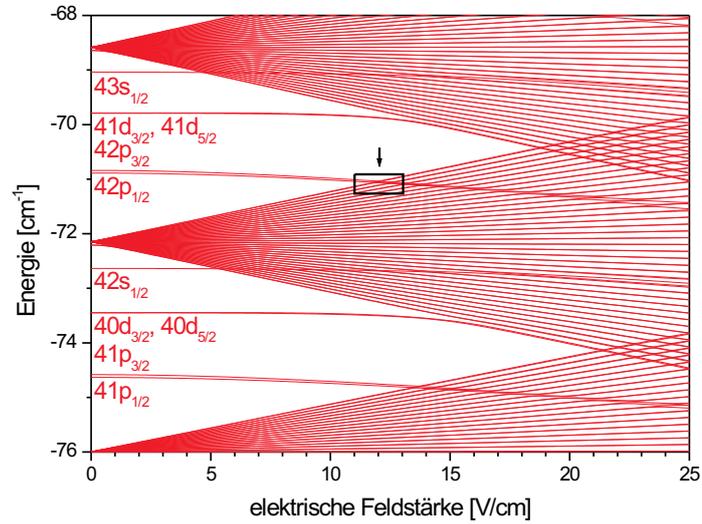


Abbildung 7.4: Numerische Stark-Karte für ^{85}Rb , $|m_j| = 1/2$.

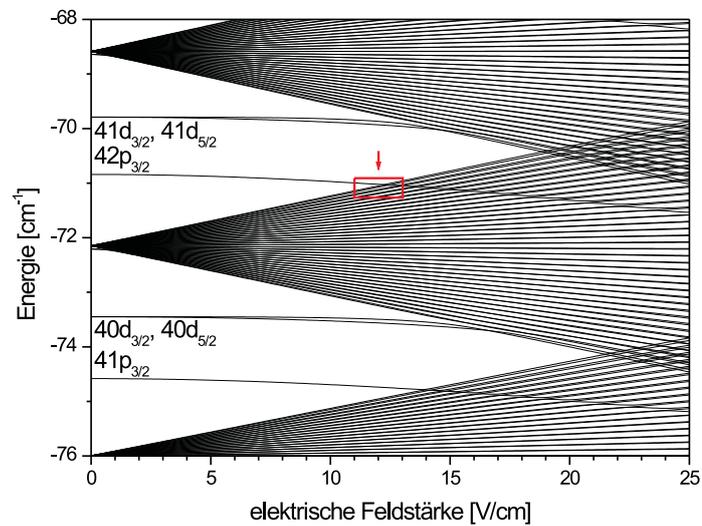


Abbildung 7.5: Numerische Stark-Karte für ^{85}Rb , $|m_j| = 3/2$. In beiden Stark-Karten kennzeichnen die Rahmen den Teil, der für die Bestimmung der Eichparameter herangezogen wird.

kann der Linienverlauf nicht mehr aufgelöst werden. Deswegen werden die umrahmten Teile der beiden Stark-Karten vergrößert und übereinandergelegt. Das Ergebnis ist Abbildung 7.6.

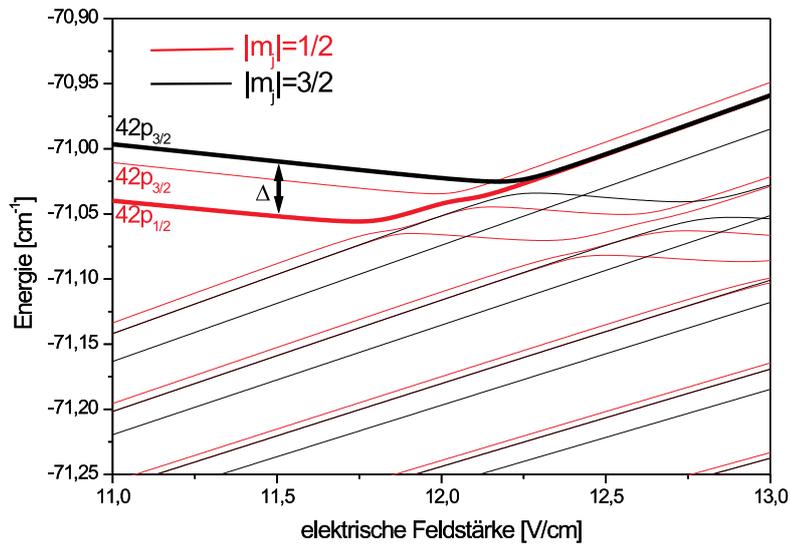


Abbildung 7.6: Vergrößerte Stark-Karte für ^{85}Rb , $|m_j| \leq 3/2$: Während die elektrische Feldstärke von 11,6 auf 12,4 V/m wächst, werden die $42p$ -Linien nacheinander umgebogen, anstatt den Fächer zu durchstoßen. Eine solche Erscheinung wird als verhinderte Kreuzung bezeichnet. Die starke Feldstärkeabhängigkeit des Energieabstandes Δ zwischen den verstärkt dargestellten Linien bildet die Grundlage für das neue Eichverfahren.

Jede der $42p$ -Linien weist bei ihrer verhinderten Kreuzung (Erklärung bei Abbildung 7.6) eine große Empfindlichkeit bezüglich Änderungen der elektrischen Feldstärke auf. Besonders klar wird dies beim Blick auf die Abbildungen 7.4 und 7.5, in denen die verhinderten Kreuzungen als kaum aufzulösende Knicke erscheinen. Diese Empfindlichkeit wird bei der Bestimmung der Eichparameter ausgenutzt.

7.2.2 Das neue Eichverfahren

Das Verfahren beruht auf der Aufzeichnung einer experimentellen Stark-Karte, bei der die Spannung U_M die Abszisse bildet. Die Stark-Karte enthält die Linien $|42p_{3/2}, |m_j| = 3/2\rangle$ und $|42p_{1/2}, |m_j| = 1/2\rangle$ (verstärkte schwarze und rote Linie in Abbildung 7.6) und löst die verhinderte Kreuzung der $|42p_{1/2}, |m_j| = 1/2\rangle$ -Linie (verstärkte rote Linie) auf. Zur Vereinfachung wird im folgenden einfach von der schwarzen und der roten Linie gesprochen. Im folgenden werden Idee und Durchführung des Verfahrens beschrieben.

Idee

Als Größe, die die Eichparameter festlegt, wird der Energieabstand Δ von schwarzer und roter Linie gewählt. Dieser weist bei der verhinderten Kreuzung der roten Linie eine starke Abhängigkeit von der Feldstärke auf. Die numerische Stark-Karte liefert den Energieabstand Δ als Funktion der Feldstärke $\Delta = \Delta(E)$ an einem Satz von *endlich vielen* Stützstellen. Also in der Form

$$\{(E_p, \Delta_p)\}_{p \in \{1, \dots, m\}} \quad (m: \text{Anzahl der Stützstellen}) \quad (7.4)$$

Für jeden Spannungswert U_M , für den ein Stark-Spektrum aufgezeichnet wurde, kann der Abstand Δ_M aus dem Spektrum bestimmt werden. Dies liefert einen Datensatz von Meßwerten

$$\{(U_{M,q}, \Delta_{M,q})\}_{q \in \{1, \dots, n\}} \quad (n: \text{Anzahl der Messungen}) \quad (7.5)$$

Wenn eine *kontinuierlich definierte* Funktion $\Delta = \Delta(E)$ angegeben werden kann, die den Abstand für jeden Feldstärkewert E liefert, dann gilt offenbar für die gemessenen Abstände

$$\Delta_{M,q} = \Delta(E(U_{M,q})) \stackrel{(7.2)}{=} \Delta\left(E'_0 + \frac{U_{M,q}}{d'}\right) \quad (q \in \{1, \dots, n\}) \quad (7.6)$$

Ist die kontinuierlich definierte Funktion Δ hinreichend regulär, so können aus der als Ausgleichsaufgabe verstandenen Bedingung (7.6) die Eichparameter bestimmt werden. Damit ist das Eichverfahren auf das Auffinden der Funktion Δ zurückgeführt.

Bestimmung von Δ

Für die Bestimmung von Δ wird von einem einfachen Modellen für den Abstand zwischen der schwarzen und der roten Linie ausgegangen. Um den Verlauf der beiden Linien in der Nähe der verhinderte Kreuzung der roten Linie zu beschreiben, werden mit Blick auf Abbildung 7.6 folgende Modellannahmen gemacht:

1. *Ein-Niveau-Modell für die schwarze Linie:*
Feldstärkeabhängigkeit der Energie eines Eigenzustandes bei Vernachlässigung sämtlicher feldvermittelter Koppelungen an andere Zustände.
2. *Zwei-Niveau-Modell für die rote Linie:*
Feldstärkeabhängigkeit der Energie eines Eigenzustandes, der über das Feld nur mit einem weiteren Eigenzustand gekoppelt ist.

Als einfachstes aller Modelle gestattet ein Ein-Niveau-Modell lediglich einen linearen Zusammenhang zwischen Energie und Feldstärke. Daher wird für die Linie, die die verhinderte Kreuzung aufweist, ein Zwei-Niveau-Modell angesetzt. In diesem Sinne wird von der einfachsten Beschreibungsgrundlage für das Ergebnis der numerischen Rechnung ausgegangen. Es ist wichtig, daß es lediglich um eine Beschreibung des Linienverlaufs in der Nähe der verhinderten Kreuzung geht. Die Modelle werden nun näher untersucht.

Wird ein Satz \mathcal{Z} von Eigenzuständen vorgegeben, dann entspricht die Vernachlässigung sämtlicher Koppelungen dieser Zustände an solche, die nicht in \mathcal{Z} enthalten sind, der Reduzierung des Hamilton-Operators auf den durch \mathcal{Z} aufgespannten Unterraum.

Beim Ein-Niveau-Modell besteht \mathcal{Z} aus einem Zustand ψ . Es ergibt sich dann ein eindimensionaler Hamilton-Operator. ψ bleibt in diesem Modell unabhängig von der Feldstärke Eigenzustand des reduzierten Hamilton-Operators, und die lineare Abhängigkeit des nicht reduzierten Hamilton-Operators von der Feldstärke führt nach der Reduzierung zu einer linearen Feldstärkeabhängigkeit der Energie von ψ .

Beim Zwei-Niveau-Modell besteht \mathcal{Z} aus zwei Zuständen ψ_1, ψ_2 . Wird der reduzierte Hamilton-Operator als Matrix bezüglich der Basis \mathcal{Z} geschrieben, so ergibt sich die von der elektrischen Feldstärke E abhängige Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 + \alpha_1 E & \beta E \\ \beta E & \mathcal{E}_2 + \alpha_2 E \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

mit Energien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ und geeigneten Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \beta$. Die feldstärkeabhängigen Eigenwerte dieser Matrix liefern zwei Linien:

$$\mathcal{E}(E) = a + bE \mp c \sqrt{1 - \left(\frac{E - E_x}{\varepsilon} \right)^2} \quad (7.8)$$

mit

$$a = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \quad (7.9)$$

$$b = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (7.10)$$

$$c = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \beta}{\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\beta^2}} \quad (7.11)$$

$$E_x = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) (\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\beta^2} \quad (7.12)$$

$$\varepsilon = \frac{2 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \beta}{\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\beta^2}} \quad (7.13)$$

Wird der Abstand zwischen einer der beiden durch (7.8) gegebenen Linien und einer durch das Ein-Niveau-Modell beschriebenen Linie gebildet, so ist das Ergebnis wieder von der Gestalt (7.8). Um schließlich noch die Unabhängigkeit des Stark-Effektes vom Vorzeichen der Feldstärke zu berücksichtigen, wird als Modell für $\Delta = \Delta(E)$ die Funktion

$$\Delta(E) = a + b|E| - c \sqrt{1 - \left(\frac{|E| - E_x}{\varepsilon} \right)^2} \quad (7.14)$$

angesetzt, und die fünf Parameter werden durch Angleichung an die Werte (7.4) aus der numerischen Stark-Karte bestimmt. Das Ergebnis ist erstaunlich gut: Bei 191 äquidistanten Stützstellen im Intervall $[11,0 \text{ V/cm}; 11,95 \text{ V/cm}]$ wird ein Korrelationskoeffizient von mehr als 99,999% erreicht. Abbildung 7.7 zeigt die Übereinstimmung zwischen den durch Diagonalisierung bestimmten Stützstellen und der kontinuierlich definierten Funktion (7.14) nach Optimierung der Parameter. Aufgrund der außergewöhnlich guten Übereinstimmung kann für Feldstärkewerte mit Betrag im bei der Angleichung zugrunde liegenden Intervall $[11,0 \text{ V/cm}; 11,95 \text{ V/cm}]$ ohne weiteres die angegliche Formel 7.14 anstelle der durch numerische Diagonalisierung gewonnenen Abstandswerte benutzt werden. In diesem Intervall fällt der Abstand von $4,34 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ (1,30 GHz) auf $2,43 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ (0,73 GHz):

$$\text{Wertebereich des angeglichenen Modells: } 2,43 \cdot 10^{-2} \dots 4,34 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} \quad (7.15)$$

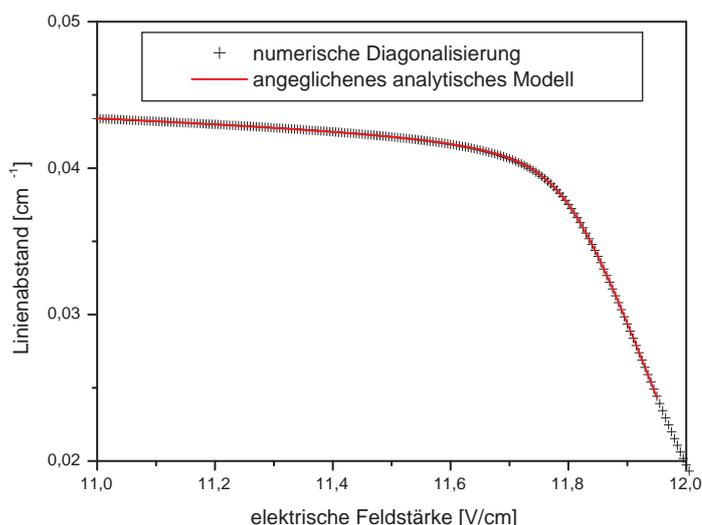


Abbildung 7.7: Analytisches Modell für den Linienabstand in der Nähe der (ersten) verhinderten Kreuzung der $|42p_{1/2}; |m_j| = 1/2\rangle$ -Zustände: Die Grundlage für die Angleichung der freien Parameter des Modells (7.14) bilden 191 äquidistante Stützstellen im Feldstärkeintervall $[11,0 \text{ V/cm}; 11,95 \text{ V/cm}]$ (Stützstellenabstand: 5 mV/cm). Bei jeder Stützstelle wird der Hamilton-Operator für diesen Feldstärkewert numerisch diagonalisiert (numerische Stark-Karte in Abbildung 7.6) und der entsprechenden Linienabstand bestimmt. Die Angleichung des analytischen Modells an die numerische Stark-Karte erfolgt durch χ^2 -Minimierung über die freien Parameter. Der erreichte Korrelationskoeffizient ist größer als 99,999%.

Die Darstellung (7.14) ist auch bei negativen Feldstärkewerten („negative“ verhinderte Kreuzung) gültig. So können Stark-Spektren, die bei der negativen und bei der positiven verhinderten Kreuzung aufgezeichnet werden, gleichermaßen zur Bestimmung des Eichparameter beitragen. Dies verbessert die Konvergenz des Ausgleichsverfahrens zur Bestimmung der Eichparameter.

Vorteile des Verfahrens

Das geschilderte Verfahren hat folgende Vorteile:

1. Die ausschließliche Verwendung relativer Frequenz-Messungen (Linienabstand) verhindert Beeinträchtigungen durch statistische oder systematische Fehler bei der Bestimmung der absoluten Frequenz zu Beginn der Stark-Spektren.
2. Es tragen alle Spektren zur Bestimmung der Eichparameter bei, die hinreichend nahe bei der negativen oder positiven verhinderten Kreuzung liegen.
3. Beide Eichparameter werden gleichzeitig bestimmt.
4. Durch die Bestimmung der Eichparameter im Rahmen eines Ausgleichsverfahrens können die Standard-Fehler für diese Parameter gleich mitbestimmt werden.

Durchführung

Bei den Messungen in gekreuzten Feldern sind die beiden Kappenelektroden leitend verbunden, und das Verhältnis zwischen der Spannung an der inneren Elektrode und der an den Kappenelektroden ist für alle Messungen gleich (zur Geometrie der Elektrodenanordnung siehe Abbildung 5.3). Um einen Einfluß der Spannungen der Kappenelektroden auf das Feld am Photoabsorptionsort zu berücksichtigen, wird bei der Aufzeichnung der Stark-Spektren dieses Spannungsverhältnis beibehalten. Bei den Messungen wurde der Kryostat statt mit flüssigem Helium mit flüssigem Stickstoff befüllt. Später wird gezeigt, daß die bei dieser Temperatur ermittelten Eichparameter auch bei tieferen Temperaturen benutzt werden können. Die experimentellen Stark-Karten, die die positive und negative verhinderte Kreuzung der roten Linie auflösen, sind in Abbildung 7.8 dargestellt.

Insgesamt wurden für 13 Spannungen $\{U_{M,q}\}_{q \in \{1, \dots, 13\}}$ Stark-Spektren aufgenommen. Mit Blick auf Abbildung 7.6 lassen sich den $42p$ -Linien leicht experimentelle Spitzen zuordnen. Die verhinderte Kreuzung wird klar aufgelöst. In ihrer unmittelbaren Umgebung findet eine Umverteilung der Oszillatorstärke von der $|42p_{1/2}; |m_j| = 1/2\rangle$ -Linie auf andere Linien statt. Der Abstand zwischen $|42p_{3/2}; |m_j| = 3/2\rangle$ und $|42p_{1/2}; |m_j| = 1/2\rangle$ -Linie wird als Differenz der Schwerpunkte („centers of gravity“) der zugehörigen Spitzen aus den Spektren ermittelt. Damit stehen Wertepaare $\{(U_{M,q}, \Delta_{M,q})\}_{q \in \{1, \dots, 13\}}$ für die Bestimmung der Eichparameter d' und E'_0 gemäß (7.6) zur Verfügung.

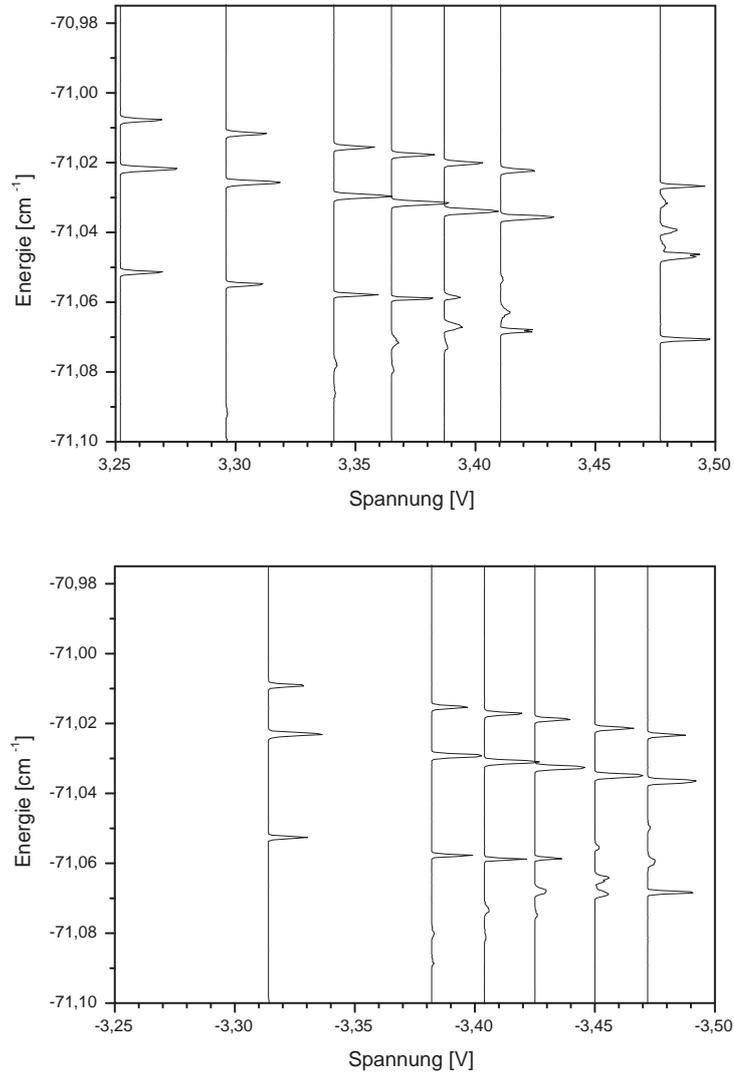


Abbildung 7.8: Experimentelle Stark-Karten für die erste verbotene Kreuzung der $|42p_{1/2}; |m_j| = 1/2)$ -Linie bei positiven (obere Abbildung) und negativen Spannungen (untere Abbildung). Sämtliche Spektren wurden mit einer Strahlleistung von $25 \mu\text{W}$ für die optische Pumpstufe und $\sim 100 \mu\text{W}$ für den Farbstoff-Laser aufgezeichnet. Das durch die numerische Berechnung (Abbildung 7.6) vorhergesagte qualitative Verhalten ist klar zu erkennen.

Wichtig sind folgende Feststellungen:

1. Bei der numerischen Diagonalisierung werden die Energien der feldfreien Eigenfunktionen mit Hilfe der modifizierten Rydberg-Ritz-Formel aus [LN83] berechnet. Dort wird die Genauigkeit dieser Formel für p -Zustände mit $\pm 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ (das sind 90 MHz) angegeben. Um einen möglichen

Fehler dieser Art zu berücksichtigen, wird ein zusätzlicher freier Parameter δ' zu Δ hinzugezählt.

2. Es werden nur solche Wertepaare herangezogen, bei denen der Abstand im Wertebereich des Modells liegen. Da sich der Wertebereich (7.15) mit dem noch nicht bestimmten Parameter δ' verschiebt, wird folgendermaßen vorgegangen: Zuerst werden die Eichparameter d' , E'_0 und der Korrekturparameter δ' nur mit solchen Wertepaaren bestimmt, bei denen der Abstand im Wertebereich (7.15) liegt (1. Schritt). Anschließend wird der Wertebereich um δ' verschoben und das gleich Verfahren noch einmal durchgeführt (2. Schritt). Beim zweiten Schritt wird δ' erneut bestimmt. Auf diese Weise wird eine bestmögliche Ausnutzung der Meßwerte gewährleistet. Es zeigt sich, daß der zweite Schritt keine signifikant anderen Ergebnisse liefert als der erste. Nur der Fehler ist aufgrund der breiteren Datengrundlage kleiner. Dies rechtfertigt die geschilderte Herangehensweise.

Die Ausgleichsaufgabe lautet also:

$$\Delta_{M,q} \stackrel{!}{=} \Delta \left(E'_0 + \frac{U_{M,q}}{d'} \right) + \delta' \quad (7.16)$$

$$\text{für } q \in \{1, \dots, 13\} \quad \text{mit } \Delta_{M,q} \text{ im verschobene Wertebereich} \quad (7.17)$$

Die effektiven Eichparameter werden nun durch χ^2 -Minimierung bestimmt. Das Ergebnis ist graphisch und numerisch in Abbildung 7.9 zusammengefaßt. Das Ergebnis des Eichverfahrens sowie die für die Eichparameter ermittelten Werte finden sich in Tabelle 7.1.

Zur endgültigen Prüfung der Eichung werden die Spannungen, bei denen Stark-Spektren aufgezeichnet wurden, mit den neu bestimmten effektiven Eichparametern in die entsprechenden Feldstärken umgerechnet. Anschließend werden experimentelle und numerische (siehe Abbildung 7.6) Stark-Karte verglichen. Dies geschieht in Abbildung 7.10 auf Seite 131. Um den systematischen Fehler der Energieskala für die experimentellen Spektren auszugleichen, wird auf die am selben Meßtag aufgezeichnete Spektroskopie der $42s_{1/2}$ -Linie bei Abwesenheit eines statischen elektrischen Feldes zurückgegriffen. Das Ergebnis wurde in 7.1.2 (besonders Abbildung 7.2) ausführlich besprochen. Dabei wurde für den systematischen Fehler der Energieskala ein Wert von $2,3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ ermittelt. Nach den Ausführungen in 6.3.8 ist bei Messungen, die am selben Meßtag durchgeführt werden, keine wesentliche Veränderung des systematischen Fehlers zu erwarten. Daher wurden alle Stark-Spektren um den für die $42s_{1/2}$ -Linie ermittelten Wert verschoben (Genauer: Die Energieskala wurde verschoben). Diese Korrektur wurde also vollkommen unabhängig von den Stark-Spektren und ihrer Auswertung bestimmt.

Um zu prüfen, ob die Eichparameter zeitlichen Schwankungen unterworfen sind, wurde eines der zuerst aufgenommenen Stark-Spektren nach etwa zwei Stunden erneut aufgenommen. Der Vergleich samt Erläuterung findet sich in Abbildung 7.11. Es konnte keine signifikante Änderung der Eichparameter festgestellt werden. Aufgrund der Abbildung 7.10 und 7.11 können die Ergebnisse der neuen Feldeichung mit gutem Gewissen benutzt werden.

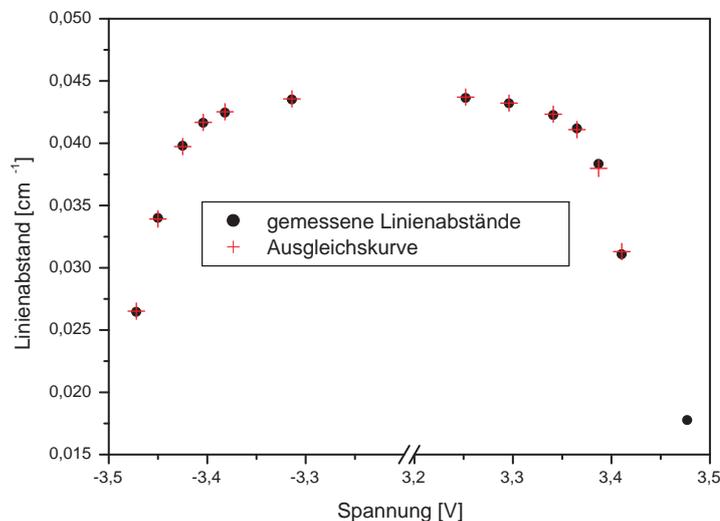


Abbildung 7.9: Bestimmung der Eichparameter: Aufgetragen sind die aus den gemessenen Stark-Spektren ermittelten Linienabstände („center of gravity“-Abstände) über der an der inneren Elektrode anliegenden Spannung (schwarze Punkte). Der Linienabstand für die größte Spannung liegt nicht im verschobenen Wertebereich und bleibt daher bei der Lösung der Ausgleichsaufgabe unberücksichtigt. Die Werte der Ausgleichskurve sind an den bei ihrer Bestimmung herangezogenen experimentellen Spannungswerten mit roten Kreuzen eingetragen. Der Korrelationskoeffizient beträgt 99,968%.

Funktion	:	$y = \Delta \left(E'_0 + \frac{U_M}{d'} \right) + \delta'$		
Korrelationskoeffizient	:	$R = 99,968\%$		
Parameter	Wert	Standardfehler	Einheit	
d'	0,2888	$\pm 3 \cdot 10^{-5}$	cm	
E'_0	0,08253	$\pm 8,6 \cdot 10^{-4}$	V/cm	
δ'	$1,05 \cdot 10^{-3}$	$\pm 6 \cdot 10^{-5}$	cm ⁻¹	

Tabelle 7.1: Das Ergebnis des neuen Eichverfahrens: Aufgrund der erstaunlich hohen Korrelation sind die Standardfehler sehr klein. So liegt der Standardfehler für den effektiven Plattenabstand d' mit $0,3 \mu\text{m}$ in einem Bereich, der sonst nur mit interferometrischen Verfahren zugänglich ist. Der relative Standardfehler ist nur noch $1 \cdot 10^{-4}$. Das Streufeld E'_0 liegt unter 10 V/m . Der Korrekturparameter δ' liegt mit $31,5 \text{ MHz}$ bei etwa einem Drittel des Fehlers, der laut [LN83] bei der Berechnung der Energien der feldfreien p -Zustände mit der hier verwandten modifizierten Rydberg-Ritz-Formel auftreten kann.

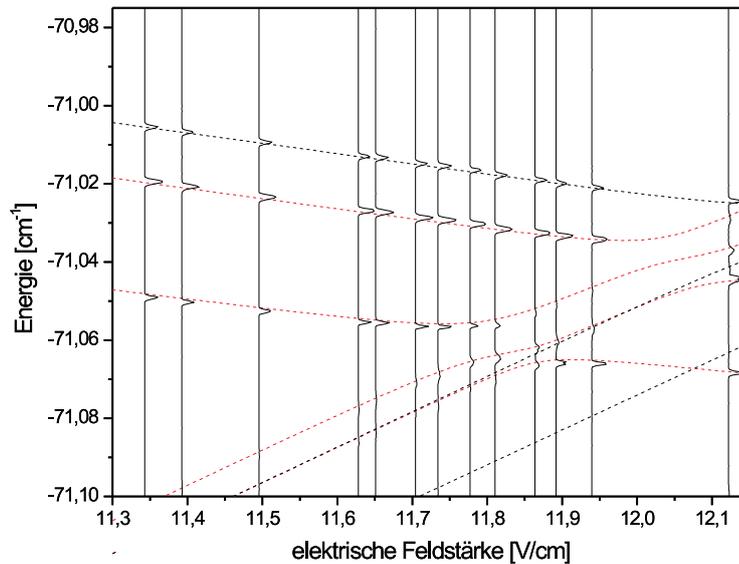


Abbildung 7.10: Vergleich der geeichten Stark-Spektren (durchgezogene Linien) mit der numerischen Rechnung (gestrichelte Linien): Der systematische Fehler der Energieskala wurde ausgeglichen. Dazu wurde der Fehler aus der am selben Tag aufgezeichneten feldfreien Spektroskopie der $42s_{1/2}$ -Linie bestimmt und alle Stark-Spektren um den ermittelten Wert von 69 MHz verschoben. Da der Stark-Effekt unabhängig vom Vorzeichen des Feldstärkewertes ist, wurden die Spektren bei negativen Feldstärken beim Betrag dieser Größe eingetragen. Ein Fehler bei der Bestimmung des Streufeldes kann dann leicht erkannt werden. Die Übereinstimmung ist ersichtlich sehr gut.

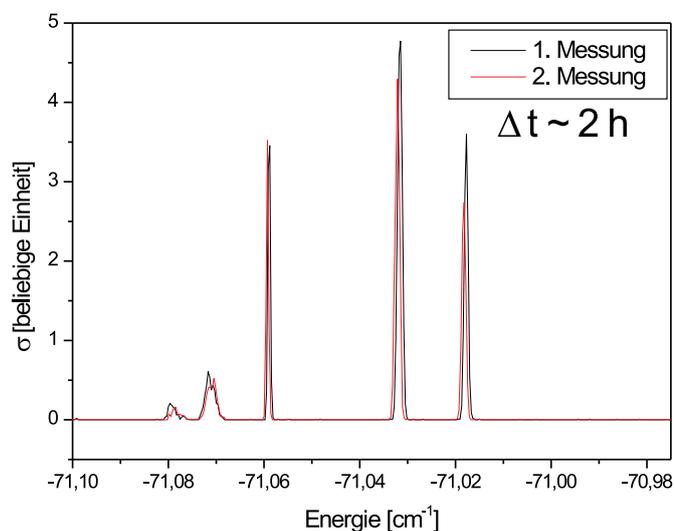


Abbildung 7.11: Zeitliche Konstanz der Eichparameter: Die beiden Spektren (schwarz und rot) wurden im zeitlichen Abstand von etwa zwei Stunden aufgezeichnet. In dieser Zeit wurde das Atomstrahlexperiment betrieben. Dies ist wichtig, da an den Elektroden kondensierendes Rubidium als wahrscheinlichste Ursache für eine Veränderung der Eichparameter gilt. Eine Änderung der Spektren ist kaum festzustellen. Bei genauer Vermessung ergibt sich eine Veränderung des Linienabstandes Δ von 4,5 MHz (Linien bei $-71,06 \text{ cm}^{-1}$ und $-71,02 \text{ cm}^{-1}$). Dies entspricht einer Feldänderung von 5 mV/cm oder einer Potentialänderung der inneren Elektrode von 1,5 mV. Dies liegt im Fehlerbereich des zur Spannungsmessung verwandten Digitalmultimeters.

Tatsächliche Eichparameter

Die tatsächlichen Eichparameter unterscheiden sich von den effektiven nur in ihrem Fehler. Zusätzlich zu den Standard-Fehlern der effektiven Eichparameter sind noch folgende Fehlerquellen zu berücksichtigen:

1. *Fehler durch Temperaturänderung:* Bei den Messungen in gekreuzten Feldern wird der Elektrodeneinsatz auf 4,2 K (Siedepunkt von flüssigem Helium) abgekühlt. Dies führt zu einer Veränderung des Elektrodenabstandes gegenüber dem Wert, der bei einer Temperatur von 77,3 K bestimmt wurde. Nach [Whi59] gilt für die lineare Ausdehnung l eines Messingwerkstücks bei Abkühlung von 75 K auf 0 K:

$$l_{0 \text{ K}} = l_{25 \text{ K}} = (1 + 2,9 \cdot 10^{-4}) l_{75 \text{ K}} \quad (7.18)$$

Bei Kühlung auf den Siedepunkt von flüssigem Helium wird daher für den Plattenabstand ein zusätzlicher relativer Fehler von $3 \cdot 10^{-4}$ angesetzt.

2. *Fehler der Digitalmultimeter:* Die über dem Plattenkondensator anliegenden Spannungen werden mit einem Digitalmultimeter gemessen. Dabei treten relative und absolute Meßfehler auf. Es werden zwei Digitalmultimeter verwandt. Eines für niedrige Spannungen⁴ und eines für höhere Spannungen⁵. Die Fehler werden von den Herstellern gemäß Tabelle 7.2 spezifiziert. Für die Bestimmung der effektiven Eichparameter wurde das

Gerät	relativer Fehler	absoluter Fehler
Modell 4650B	$\pm 5 \cdot 10^{-4}$	$\pm 3 \text{ mV}$
Model 2000	$\pm 5 \cdot 10^{-5}$	$\pm 0,7 \text{ mV}$

Tabelle 7.2: Fehler der Digitalmultimeter laut Spezifikation der Hersteller.

Modell 4650B verwandt. Der absolute Fehler läßt sich bei den angelegten Spannungen von mehr als 3 V nach oben gegen einen relativen Fehler von $1 \cdot 10^{-3}$ abschätzen. Zusätzlich wird die Herstellerangabe für den relativen Fehler verdoppelt, um einer möglichen Verschlechterung während des langjährigen Betriebs Rechnung zu tragen. Damit können die vom Digitalmultimeter bei der Bestimmung der Eichparameter verursachten Fehler zu einem relativen Fehler von $2 \cdot 10^{-3}$ zusammengefaßt werden.

Nun werden relativer Standardfehler des effektiven Plattenabstandes (vgl. Tabelle 7.1), Temperaturausdehnungskoeffizient und die Fehler des Modell 4650B zu einem relativen Fehler von $2,4 \cdot 10^{-3}$ für den tatsächlichen Plattenabstand d zusammengezählt. Das tatsächliche Streufeld ist dann gleich dem effektiven. Insgesamt ergibt sich

$$E = E_0 + \frac{U}{d} \quad (7.19)$$

mit (Standardfehler)

$$d = d' (1 \pm 2,4 \cdot 10^{-3}) = 0,2888(7) \text{ cm} \quad (7.20)$$

$$E_0 = E'_0 = 0,08253(86) \text{ V/cm} \quad (7.21)$$

Diese Beziehung gilt mit den angegebenen Fehlern bei Kühlung auf den Siedepunkt von flüssigem Helium oder flüssigem Stickstoff.

Um den Fehler bei der Bestimmung der elektrischen Feldstärke anzugeben, muß nun nur noch der Fehler bei der Messung der an die innere Elektrode angelegten Spannungen berücksichtigt werden. In gekreuzten Feldern betragen die Spannungen mehr als 60 V und zur Messung wird das Model 2000 verwandt. Dessen Fehler (siehe Tabelle 7.2) können gegen einen relativen Fehler von $1 \cdot 10^{-4}$ abgeschätzt und dann mit dem relativen Fehler des Plattenabstandes zu einem effektiven relativen Fehler der Spannungsmessung von $2,5 \cdot 10^{-3}$ zusammengezählt werden. Bei Spannungen von mehr als 60 V kann der Fehler des Streufeldes vernachlässigt werden. Zusammenfassend gilt für Messungen in gekreuzten Feldern:

$$E = 8 \text{ V/m} + \frac{U}{2,888 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \pm 0,9 \frac{U}{\text{m}} \quad (7.22)$$

⁴Modell 4650B des Herstellers Voltcraft

⁵Model 2000 Multimeter des Herstellers Keithley Instruments, Inc.

Aus der Fehlerrechnung geht hervor, daß die Unsicherheiten bei der Spannungsmessung bei weitem den größten Beitrag zum Fehler leisten (mehr als 80%). Um die hohe Genauigkeit des neuen Eichverfahrens auszuschöpfen, sollten daher hochwertige Spannungsmesser benutzt werden.

7.3 Eichung des supraleitenden Magneten

Die magnetische Induktionsstärke wird durch die Stärke des Stromes bestimmt, der durch die supraleitenden Spulen fließt. Um den Dioden-Laser durch Optimierung der optischen Pumpstufe tatsächlich auf die Frequenz des gewünschten Hyperfeinstrukturübergangs abzugleichen, muß die magnetische Induktionsstärke bereits aufgrund der eingestellten Stromstärke hinreichend genau bekannt sein. Ansonsten könnte der Abgleich zu einem falschen Übergang führen. Um eine grobe Eichung des supraleitenden Magneten durchzuführen, werden die Zeemanverschobenen Hyperfeinstrukturlinien (d. h. ihre Frequenzen) berechnet und mit den experimentellen Ergebnissen verglichen.

7.3.1 Zeeman-Effekt der Hyperfeinstruktur von Rubidium

In Übereinstimmung mit Abbildung 3.2 wird die z -Achse in Richtung der homogenen statischen magnetischen Induktion gewählt. Sie dient im folgenden als Quantisierungsachse. Bei der Beschreibung des Zeeman-Effekts der Hyperfeinstruktur wird nur der paramagnetische Zeeman-Effekt berücksichtigt. Beide Isotope ($A = 85$ bzw. $A = 87$) können gleichermaßen behandelt werden. Eine besondere Kennzeichnung unterbleibt daher. Es ist dann von folgendem Hamilton-Operator auszugehen:

$$H_{\text{HFS}}(B) = H_{\text{FS}} + \frac{\mu_B}{\hbar} (l_z + g_e s_z) B + V_{\text{HFS}} - \frac{\mu_K}{\hbar} g_i i_z \quad (7.23)$$

Dabei ist H_{FS} der Feinstruktur-Hamilton-Operator des betrachteten Rubidiumisotops bei verschwindender magnetischer Induktion und V_{HFS} die Hyperfeinstrukturkoppelung. Ansonsten werden dieselben Bezeichnungen wie in 6.1 verwandt. Daraus können mit Hilfe spektroskopischer Daten auf numerischem Weg sämtliche Übergangsfrequenzen und zugehörige Oszillatorstärken mit hoher Genauigkeit berechnet werden. Für hinreichend hohe magnetische Induktionsstärken B wird die Zeeman-Aufspaltung der Feinstruktur groß gegen die Hyperfeinstrukturaufspaltung. Dann liefert allerdings eine verhältnismäßig einfache störungstheoretische Behandlung der Hyperfeinstrukturkoppelung ein anschauliche Beschreibung. Dabei werden folgende Vereinfachungen vorgenommen:

1. *Vernachlässigung von Koppelungen zwischen verschiedenen Feinstrukturmultipletts:* Feinstrukturmultipletts mit derselben Haupt- und Bahndrehimpulsquantenzahl l werden durch eine nichtverschwindende magnetische Induktion gekoppelt. Für die optische Pumpstufe bedeutet dies eine Koppelung zwischen den $5p_{1/2}$ - und $5p_{3/2}$ -Multipletts. Da bei den im Experiment benutzten Feldern der Energieabstand dieser Multipletts (etwa $2,4 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-1}$) groß ist gegen die Zeeman-Aufspaltung der Feinstruktur, wird diese Koppelung vernachlässigt.

2. *Dipolnäherung der Hyperfeinstrukturkoppelung*: Es wird nur die (magnetische) Dipolkomponente der Hyperfeinstrukturkoppelung berücksichtigt.
3. *Behandlung der Hyperfeinstrukturkoppelung in erster Ordnung Störungstheorie*
4. *Vernachlässigung des Kernmagnetons gegen das Bohr-Magneton⁶*: Damit kann auf den letzten Summanden des Hamilton-Operators (7.23) verzichtet werden. Diese Annahme ist für die störungstheoretische Behandlung unerheblich, vereinfacht aber die Darstellung.

Im Rahmen dieser Vereinfachungen bleibt der Hamilton-Operator in der Basis mit entkoppelten Feinstruktur- und Kerneigendrehimpulsquantenzahlen diagonal. Werden die Eigenenergien der Feinstruktur bei Abwesenheit eines Feldes (Eigenwerte von H_{FS}) mit $\mathcal{E}_{n;l;j}$ bezeichnet, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \langle n; l; j, i; m_j, m_i | H_{\text{HFS}}(B) | n; l; j, i; m_j, m_i \rangle \\ &= \mathcal{E}_{n;l;j} + \mu_B g_{n;l;j} m_j B + \langle n; l; j, i; m_j, m_i | V_{\text{HFS}} | n; l; j, i; m_j, m_i \rangle \end{aligned} \quad (7.24)$$

Dabei ist

$$g_{n;l;j} = 1 + (g_e - 1) \frac{j(j+1) + 3/4 - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (7.25)$$

der „Landé-g-Faktor“ und der Störungsterm lautet mit den Hyperfeinstrukturkonstanten $\mathcal{A}_{n;l;j}$:

$$\langle n; l; j, i; m_j, m_i | V_{\text{HFS}} | n; l; j, i; m_j, m_i \rangle = \mathcal{A}_{n;l;j} m_j m_i \quad (7.26)$$

Im Experiment ist das Dioden-Laser-Licht linear und senkrecht zur Quantisierungsachse polarisiert (σ -Anregung). In Dipolnäherung lauten die Auswahlregeln für die Anregung des Übergangs $|5s_{1/2}; i; m_j, m_i\rangle \rightarrow |5p_{3/2}; i; m_j^*, m_i^*\rangle$:

$$|m_j^* - m_j| = 1 \quad (7.27)$$

$$m_i^* - m_i = 0 \quad (7.28)$$

Damit lassen sich die Zeeman-verschobenen Übergangsfrequenzen der D2-Linie angeben. Nach kurzer Rechnung ergibt sich für $m_j^* = m_j \pm 1$:

$$\nu = \mathcal{E}_{5p_{3/2}} - \mathcal{E}_{5s_{1/2}} \quad (7.29)$$

$$+ \mu_B \left[\frac{2}{3} (1 - g_e) m_j \pm \frac{2 + g_e}{3} \right] B \quad (7.30)$$

$$+ [\mathcal{A}_{5p_{3/2}} (m_j \pm 1) - \mathcal{A}_{5s_{1/2}} m_j] m_i \quad (7.31)$$

Dabei ist

$$m_j \in \{-1/2, 1/2\}, m_i \in \{-i, \dots, i\} \quad (7.32)$$

Bei den magnetischen Induktionsstärken im Experimente bilden die drei Zeilen (7.29)-(7.31) eine Groenordnungshierarchie:

1. Zeile (7.29) ist etwa $1,3 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$. Der genaue Werte hängt vom Isotop ab (Isotopenverschiebung).

⁶Das Verhältnis dieser beiden Größen ist gleich dem Verhältnis von Elektronen- und Protonenmasse und damit etwa $5 \cdot 10^{-4}$.

2. Zeile (7.30) enthält die gesamte Abhängigkeit von der magnetischen Induktionsstärke und liegt für die experimentellen Werte ($B = 1 \dots 2$ T) im Bereich $0,5 \dots 1,6 \text{ cm}^{-1}$. Insbesondere ist die Abhängigkeit von der magnetischen Induktion isotopenunabhängig.
3. Zeile (7.31) ist der Beitrag der störungstheoretischen Behandlung der Hyperfeinstruktur. Die Hyperfeinstrukturkonstanten für den Grundzustand sind etwa $1,0 \text{ GHz}$ für ^{85}Rb und etwa $3,4 \text{ GHz}$ für ^{87}Rb . Für jedes der beiden Isotope ist die Hyperfeinstrukturkonstante des angeregten Zustandes mehr als eine Größenordnung kleiner als die des Grundzustandes. Insgesamt ergibt sich also ein Beitrag von bis zu $4,3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ für ^{85}Rb und bis zu $8,8 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ für ^{87}Rb .

Abbildung 7.12 faßt die Ergebnisse in bildlicher Form zusammen: Der Zeeman-Effekt spaltet die D_2 -Linie in vier Unterlinien auf (Zeeman-verschobene Feinstrukturlinien). Die durch die magnetische Induktion verursachte Verschiebung jeder Linie wächst linear mit der Induktionsstärke. Die Hyperfeinstrukturkoppelung hebt die Entartung der magnetischen Kerneigendrehimpulsquantenzahlen auf und spaltet dadurch jede der Zeeman-verschobenen Feinstrukturlinien in $2i + 1$ (d. h. 6 für ^{85}Rb und 4 für ^{87}Rb) Hyperfeinstrukturlinien auf. Bei Vernachlässigung der Hyperfeinstrukturkonstante des angeregten Zustandes gegen die des Grundzustandes, ist die von der Hyperfeinstrukturkoppelung verursachte Aufspaltung für jede Zeeman-verschobene Feinstrukturlinie gleich (bis auf die Reihenfolge der entsprechenden Zustände).

Abbildung 7.13 zeigt die Übergangsfrequenzen bei Berechnung ohne die obigen Vereinfachungen. Dazu wird von spektroskopische Daten aus [BGR91, RS85] ausgegangen. Die notwendigen Hilfsmittel zur Darstellung und Auswertung der Matrixelemente sind [Edm74, FR59, Rac42] zu entnehmen. Es sind nur die Übergänge dargestellt, die eine nennenswerte Oszillatorstärke aufweisen. Die qualitative Übereinstimmung mit der Näherungslösung ist ersichtlich.

Die umrahmten Bereiche der Abbildungen 7.13 enthalten die gewünschte Linie für die optische Pumpstufe.

7.3.2 Eichmessung

Der Magnet wurde mit einem Strom betrieben, bei dem nach früheren Eichungen eine magnetische Induktionsstärke von 2 T erzeugt wird. Dann wurde der Dioden-Laser auf die aus dieser Induktionsstärke berechnete Frequenz für den gewünschte Hyperfeinstrukturübergang eingestellt. Dann wurden mit dem in 6.1.4 beschriebenen Verfahren die Dioden-Laser-Frequenzen bestimmen, bei denen der optische Pumpvorgang einen nennenswerten Wirkungsquerschnitt aufweist. Um alle Linien aufzufinden, die aus einer Zeeman-verschobenen Feinstrukturlinie hervorgehen, wurde die Dioden-Laser-Frequenz dabei nicht mit der Feinabstimmung gesteuert sondern nur durch das Gitter der Littrow-Anordnung stabilisiert und über den Anstellwinkel des Gitters (PZT-Spannung) verstellt. Die tatsächliche Stärke der magnetischen Induktion ist dann dadurch gekennzeichnet, daß bei diesem Wert gemessene und berechnete Übergangsfrequenzen übereinstimmen. Da die experimentellen Werte nur durch Ablesen der Werte des Michelson-Interferometers bestimmt wurden, sind sie mit einem Fehler von bis zu etwa 50 MHz behaftet. Abbildung 7.14 ergibt sich, indem die umrahmten

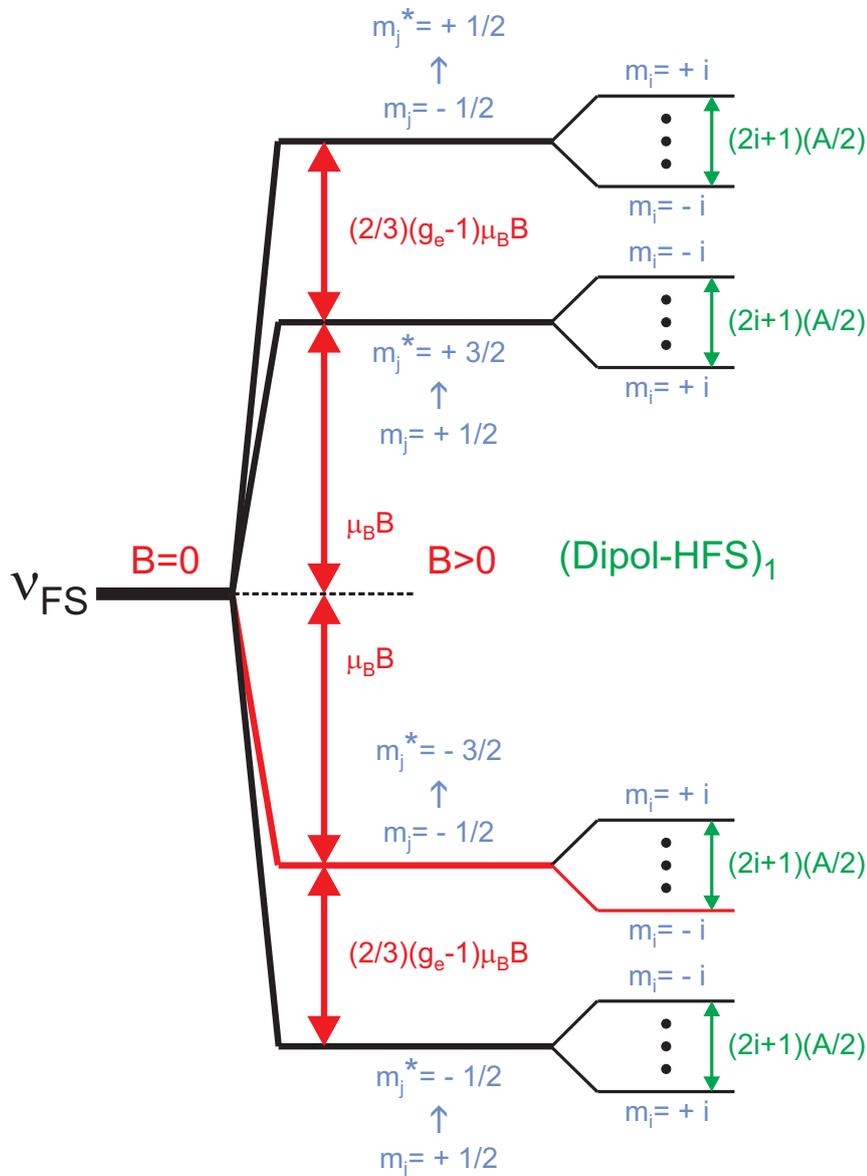


Abbildung 7.12: Der Zeeman-Effekt der Hyperfeinstrukturübergänge als Ergebnis einer Aufspaltungshierarchie: Die D_2 -Linie („ $B = 0$ “) wird von der magnetischen Induktion in vier Zeeman-verschobene Feinstrukturlinien aufgespalten („ $B > 0$ “). Anschließend hebt der magnetische Dipol-Term der Hyperfeinstrukturkoppelung („Dipol-HFS“) die Entartung dieser Linien auf. In erster Ordnung Störungstheorie („Dipol-HFS“ $_1$) und bei Vernachlässigung der Hyperfeinstrukturkonstante der angeregten Zustände ergibt sich eine symmetrische Aufspaltung, die proportional zur Hyperfeinstrukturkonstante des Grundzustandes A ist. Die im Experiment optisch gepumpte Linie ist rot eingezeichnet.

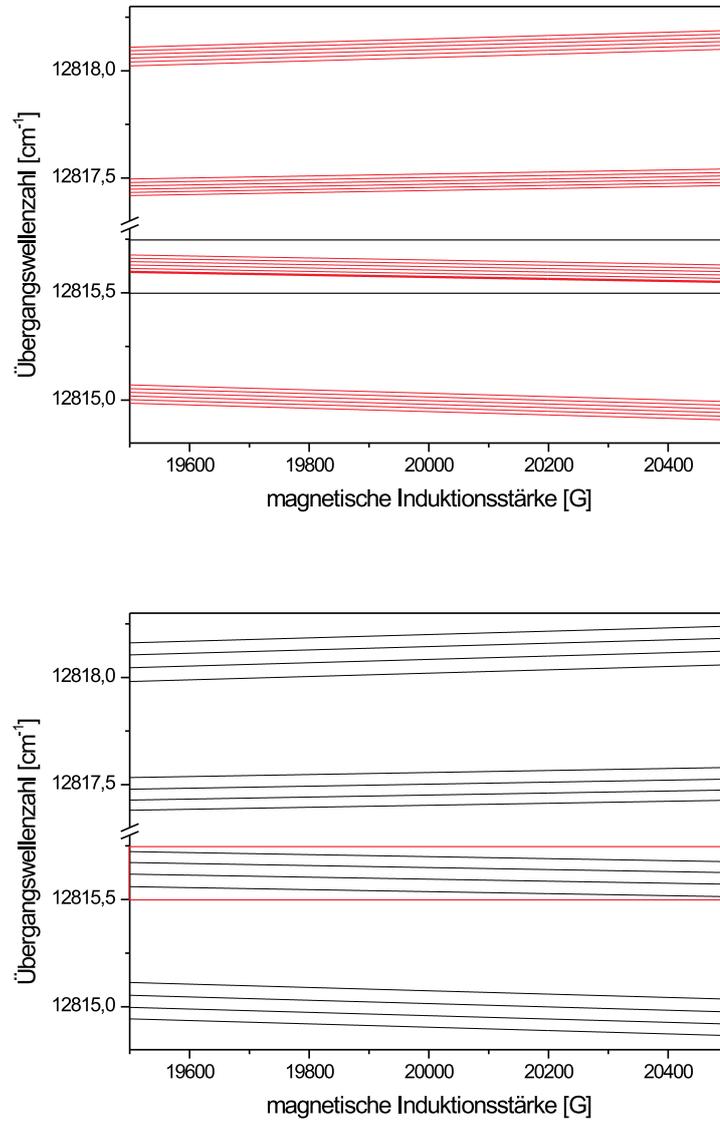


Abbildung 7.13: Der Zeeman-Effekt der Hyperfeinstrukturübergänge (berechnet): Die obere Abbildung (rot) zeigt das Ergebnis für ⁸⁵Rb, die untere (schwarz) für ⁸⁷Rb. Die Ordinaten sind unterbrochen. Die im Experiment optisch gepumpte Linie ist verstärkt dargestellt.

Bereiche aus Abbildung 7.13 übereinandergelegt und die experimentellen Werte für die Übergangsfrequenzen mit waagrechten Strichen eingezeichnet werden. (Die Länge dieser Striche hat keine Bedeutung.) Der für die optische Pumpstufe benutzte Übergang ist verstärkt dargestellt. Die senkrechte blaue Linie befindet sich bei dem Wert für die magnetische Induktion, der aus der zum verstärkten Übergang gehörenden Frequenz berechnet wurde.

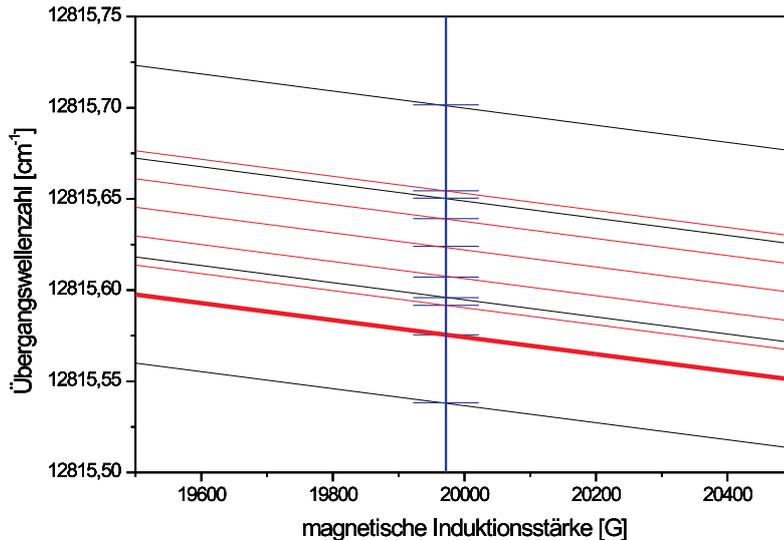


Abbildung 7.14: Eichung des supraleitenden Magneten: Die von der magnetischen Induktion abhängigen Übergangsfrequenzen für ^{85}Rb (rote Linien) und ^{87}Rb (schwarze Linien) wurden berechnet. Der für die optische Pumpstufe benutzte Übergang ist verstärkt dargestellt. Die waagrechten blauen Striche liegen bei den experimentell ermittelten Übergangsfrequenzen. Die senkrechte blaue Linie liegt an der Stelle an der sich die verstärkte Linie und der zugehörige blaue Strich schneiden. Die Nähe der übrigen Schnittpunkte zur blauen Linie belegt die gute Übereinstimmung von Theorie und Experiment.

7.4 Messung von Ericson-Fluktuationen

Bei geeigneter Wahl der experimentellen Parameter (magnetische Induktionsstärke, elektrische Feldstärke, vom Spektrum überstrichenes Energieintervall) weisen die gemessenen Photoabsorptionsspektren in gekreuzten Feldern ausgeprägte Ericson-Fluktuationen auf. Die zum Nachweis herangezogenen Autokorrelationsfunktionen der Fluktuationen dieser Spektren haben eine große qualitative Ähnlichkeit mit den entsprechenden experimentellen Ergebnissen aus der Kernphysik [vBEH⁺ 64] und den theoretischen Vorhersagen für Wasserstoff in gekreuzten Feldern [MW92, MW94]. Insbesondere haben sie den Ericson-Fluktuationen kennzeichnenden Lorentz-förmigen Verlauf. Während die durch die

Breite dieser Lorentz-Kurve gegebene Energieskala für die Korrelation der Fluktuationen in der Kernphysik einige 10 keV beträgt, wird sie hier auf einer Skala beobachtet, die zehn Größenordnungen darunter liegt. Die nachfolgenden Ergebnisse stellen die ersten Messungen von Ericson-Fluktuationen in der Atomphysik dar.

7.4.1 Auswertung und Darstellung der Ergebnisse

Jedes Spektrum in gekreuzten Feldern überstreicht mindestens das Energieintervall

$$I_{\mathcal{E}} = [-57,08 \text{ cm}^{-1}; -55,92 \text{ cm}^{-1}] \quad (7.33)$$

Um Vergleiche anstellen zu können, beziehen sich sämtliche Untersuchungen auf dieses Intervall.

Nach der Erklärung in 2.2 erfordert der Nachweis von Ericson-Fluktuationen insbesondere die Untersuchung der Autokorrelationsfunktion \mathcal{C} der Fluktuation einer Anregungsfunktion $\sigma = \sigma(E)$. Mit der Bezeichnung $\delta\sigma = \sigma - \langle\sigma\rangle$ für die Fluktuation ist also die Funktion

$$\mathcal{C}(\varepsilon) = \langle\delta\sigma(\cdot + \varepsilon)\delta\sigma\rangle \quad (7.34)$$

in Abhängigkeit von dem „Verschiebeparameter“ ε auszuwerten. Im folgenden wird das dabei zugrunde liegende Integrationsintervall bestimmt und erklärt, wie die Funktion \mathcal{C} aus den experimentellen Daten bestimmt wird. Dabei wird der Begriff der Autokorrelation nur im Zusammenhang mit der Fluktuation einer Anregungsfunktion gebraucht. Zur Vereinfachung der Sprechweise wird dann einfach von der Autokorrelation statt von der „Autokorrelationsfunktion der Fluktuation einer Anregungsfunktion“ gesprochen.

Integrationsintervall

Als Intervall J , bezüglich dessen die Integrationen ausgeführt werden, wird

$$J = (-57,08 \text{ cm}^{-1}; -57,08 \text{ cm}^{-1} + 30 \text{ GHz}] \quad (7.35)$$

festgelegt (30 GHz entspricht etwa 1 cm^{-1}). Auf diese Weise wird sichergestellt, daß für jedes Spektrum die Autokorrelation für Verschiebeparameter $\varepsilon \in [0 \text{ GHz}; 4,4 \text{ GHz}]$ berechnet werden kann. Mit J ist nämlich auch das um bis zu 4,4 GHz verschobene Intervall noch in dem Energieintervall $I_{\mathcal{E}}$, für das experimentelle Daten vorliegen.

Ausführung der Integration

Nach Berechnung der Energieskala besteht ein experimenteller Datensatz aus M Meßpunkten $\{(\mathcal{E}_m, N_m, P_m)\}_{m \in \{1, \dots, M\}}$. Für jedes $m \in \{1, \dots, M\}$ wird dadurch der (absoluten) Energie \mathcal{E}_m die detektierte Anzahl von angeregten Atomen N_m und die entsprechende Photonenflußstärke (Farbstoff-Laser-Strahlleistung) P_m zugeordnet. In 4.6 wird einem solchen Datensatz ein Histogramm und damit eine auf $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_M]$ definierte Funktion s zugeordnet, die bis auf die statistischen Fehler $\{N_m - \langle N_m \rangle\}_{m \in \{1, \dots, M\}}$ proportional zur Anregungsfunktion der

Photoabsorption auf $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_M]$ ist, wenn Fluktuationen auf der Skala der Energieschrittweite der Meßpunkte vernachlässigt werden. Dabei werden Intervalle $\{I_m\}_{m \in \{1, \dots, M\}}$ eingeführt und s als Stufenfunktion dargestellt:

$$s(\mathcal{E}) = \sum_{m=1}^M \frac{N_m}{P_m} \chi(I_m; \mathcal{E}) \quad (\mathcal{E} \in (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_M]) \quad (7.36)$$

Dabei kennzeichnet χ die charakteristische Funktion des im ersten Argument stehenden Intervalls. Für ein Intervall $J \subset I_{\mathcal{E}}$ kann dann der Integralmittelwert durch elementare Summation bestimmt werden:

$$\langle s \rangle = \frac{1}{|J|} \int_J s(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{1}{|J|} \sum_{m=1}^M \frac{N_m}{P_m} |I_m \cap J| \quad (7.37)$$

Die Länge eines Intervalls K wird dabei mit $|K|$ bezeichnet. Für die Fluktuation δs ergibt sich damit:

$$\delta s(\mathcal{E}) = \langle s \rangle \sum_{m=1}^M \left(\frac{N_m}{P_m \langle s \rangle} - 1 \right) \chi(I_m; \mathcal{E}) \quad (\mathcal{E} \in (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_M]) \quad (7.38)$$

Dies ist wieder eine Stufenfunktion. Und dasselbe trifft auf den Integrand der Autokorrelation zu. Die Integration

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{|J|} \int_J \delta s(\mathcal{E} + \varepsilon) \delta s(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \quad (7.39)$$

kann dann wieder elementar ausgeführt werden, und es ergibt sich:

$$C(\varepsilon) = \frac{\langle s \rangle^2}{|J|} \sum_{m,n=1}^M \left(\frac{N_m}{P_m \langle s \rangle} - 1 \right) \left(\frac{N_n}{P_n \langle s \rangle} - 1 \right) |(I_m - \varepsilon) \cap I_n \cap J| \quad (7.40)$$

Bei den Größen $N/(P\langle s \rangle)$ steht die Proportionalitätskonstante, die $\langle N \rangle/P$ mit dem tatsächlichen Wirkungsquerschnitt verknüpft, in Zähler und Nenner. Es handelt sich also um einen Meßwert für $\sigma/\langle \sigma \rangle$. Durch Einführung der „normierten“ Autokorrelation C gemäß

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{C}}{\langle s \rangle^2} \quad (7.41)$$

ergibt sich dann ein von dieser Proportionalitätskonstante unabhängiges Ergebnis. Soll das Schwankungsverhalten von Spektren verglichen werden, die z. B. bei verschiedenen magnetischen Induktionsstärken aufgezeichnet wurden, so ist C ebenfalls die geeignete Größe, da sie nur mit der relative Fluktuation $\delta\sigma/\langle \sigma \rangle$ gebildet wird und daher von u. U. unterschiedlichen mittleren Wirkungsquerschnitten nicht beeinflusst wird. Schließlich ist

$$C(0) = \frac{\langle (\delta\sigma)^2 \rangle}{\langle \sigma \rangle^2} \quad (7.42)$$

ein anschauliches Maß für die (relative) Ausprägung der Schwankung einer Anregungsfunktion um ihren Mittelwert.

Aufgrund der vorangegangenen Erläuterungen wird bei den Spektren im folgenden stets die Größe $\sigma/\langle\sigma\rangle$ auf der Ordinate abgetragen. Das bedeutet, daß für das dargestellte Spektrum die Größe $\langle s \rangle$ durch Integration der als Histogramm aufgefaßten Daten über das Intervall J ermittelt und zur Normierung benutzt wurde. Das normierte Spektrum schwankt daher im wesentlichen um den Wert Eins.

Einfluß von Effizienzverringerungen des Elektronendetektors

In 5.5 wurde bemerkt, daß im Experiment eine reversible Effizienzverringerung des Elektronendetektors beobachtet wurde. Es wird nun gezeigt, daß diese einen vernachlässigbaren Einfluß hat.

t_0 und t_1 bezeichnen die Zeitpunkte, an denen die Aufzeichnung des Spektrums beginnt bzw. endet. Es wird von einer linearen Abhängigkeit der Effizienz η von der seit Beginn des Spektrums vergangenen Zeit ausgegangen. Die Effizienz zum Zeitpunkt t_0 sei η_0 . Mit einer geeigneten Zeitkonstante τ gilt dann während des Spektrums

$$\eta = \eta(t) = \eta_0 - \frac{t - t_0}{\tau} \quad (t \in [t_0, t_1]) \quad (7.43)$$

\mathcal{E}_0 und \mathcal{E}_1 bezeichnen Anfangs- bzw. Endpunkt des während des Spektrums überstrichenen Energieintervalls. Die Farbstoff-Laser-Frequenz ändert sich während der Aufzeichnung in guter Näherung linear mit der Zeit. Die entsprechende Proportionalitätskonstante sei γ . Damit kann jedem Energiewert \mathcal{E} des Spektrums die (mittlere) Effizienz zugeordnet werden, mit der die zugehörige Ereigniszahl ermittelt wurde:

$$\eta = \eta(\mathcal{E}) = \eta_0 - \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{\gamma\tau} \quad (\mathcal{E} \in [\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1]) \quad (7.44)$$

Die Zeitabhängigkeit der Effizienz führt dazu, daß in der Beschreibung der experimentellen Daten in 4.6 anstelle der Anregungsfunktion σ die effektive Anregungsfunktion σ_{eff} mit

$$\sigma_{\text{eff}}(\mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} \eta(\mathcal{E}) \sigma(\mathcal{E}) \quad (7.45)$$

benutzt werden muß. Entsprechend ist auch die experimentelle Anregungsfunktion eine Messung von σ_{eff} und nicht von σ .

Der Einfluß der Effizienzverringerung auf die aus den experimentellen Daten bestimmten statistischen Größen wird nun abschätzen. Zunächst gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\mathcal{E}' \in J$ mit

$$\langle \sigma_{\text{eff}} \rangle = \frac{1}{|J|} \int_J \sigma_{\text{eff}}(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \eta(\mathcal{E}') \frac{1}{|J|} \int_J \sigma(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \eta(\mathcal{E}') \langle \sigma \rangle \quad (7.46)$$

Zur Abkürzung wird im folgenden $\eta' \stackrel{\text{def}}{=} \eta(\mathcal{E}')$ und $\delta\eta \stackrel{\text{def}}{=} \eta - \eta'$ gesetzt. Für die mit den effektiven Größen gebildete Autokorrelation \mathcal{C}_{eff} ergibt sich nach kurzer

Rechnung

$$C_{\text{eff}}(\varepsilon) = \frac{1}{|J|} \int_J \eta^2(\mathcal{E}) \delta\sigma(\mathcal{E} + \varepsilon) \delta\sigma(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \quad (7.47)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\gamma\tau} \frac{1}{|J|} \int_J \eta(\mathcal{E}) \delta\sigma(\mathcal{E} + \varepsilon) \delta\sigma(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \quad (7.48)$$

$$+ \langle\sigma\rangle \int_J \eta(\mathcal{E} + \varepsilon) \delta\eta(\mathcal{E}) \delta\sigma(\mathcal{E} + \varepsilon) d\mathcal{E} \quad (7.49)$$

$$+ \langle\sigma\rangle \int_J \eta(\mathcal{E}) \delta\eta(\mathcal{E} + \varepsilon) \delta\sigma(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \quad (7.50)$$

$$+ \frac{\langle\sigma\rangle^2}{|J|} \int_J \delta\eta(\mathcal{E} + \varepsilon) \delta\eta(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \quad (7.51)$$

Dabei ist der Beitrag in Zeile (7.47) die nicht effektive Autokorrelation bis auf den Umstand, daß die Integration mit einer von Eins verschiedenen Gewichtungsfunktion durchgeführt wird. Diese fällt vom Beginn des Spektrums quadratisch bis zu seinem Ende ab. Die Detektoreffizienz sinkt um weniger als 20% während der Aufzeichnung eines Spektrums. Daher ist die Skala $\gamma\tau$ auf der die Gewichtungsfunktion abfällt um eine halbe Größenordnung über der der Länge des Spektrums. Darüber hinaus ist die Skala der Fluktuationen in den Spektren noch einmal um mehr als eine Größenordnung kleiner, und die Fluktuationen sind ungefähr gleichmäßig verteilt. Diese Eigenschaften der Spektren verringern den Einfluß der veränderlichen Gewichtungsfunktion zusätzlich. Daher ist der erste Summand in guter Näherung $\eta^2\mathcal{C}$. Alle übrigen Terme können dagegen vernachlässigt werden:

1. Das Integral in Zeile (7.48) ist aus denselben Gründen wie eben in guter Näherung $\eta'\mathcal{C}$. Die Zeile liefert also (bezogen auf $\eta^2\mathcal{C}$) einen relativen Fehler von etwa $\varepsilon/(\gamma\tau\eta')$. Dies ist die relative Effizienzänderung auf einem Abschnitt des Spektrums von der Länge ε . Da der Verschiebeparameter von vornherein auf Werte beschränkt bleibt, die etwa eine Größenordnung unter der Länge des vom Spektrum überstrichenen Energieintervalls liegen, ergibt sich $\varepsilon/(\gamma\tau\eta') \lesssim 2 \cdot 10^{-2}$. Für die bei der Untersuchung auf Ericson-Fluktuationen wesentlichen kleinen Verschiebeparameter ist der Fehler noch kleiner.
2. Die Beiträge in den Zeilen (7.49) und (7.50) enthalten Integrale über das Produkt der schwach veränderlichen Effizienz und der Fluktuation der Anregungsfunktion. Für Anregungsfunktionen, die wie im Experiment stark fluktuieren, werden sie vernachlässigbar.
3. Der Beitrag in Zeile (7.51) ist quadratisch in $\delta\eta$.

Damit ist die normierte effektive Autokorrelation in guter Näherung gleich der normierten nicht effektiven Autokorrelation. Die Abnahme der Detektoreffizienz wird daher bei der Auswertung vernachlässigt.

7.4.2 Spektren in gekreuzten Feldern

Nach den Überlegungen in 3.3 sollten Ericson-Fluktuationen bei folgende Parametern auftreten:

$$\tilde{B} = 2,0 \text{ T} \quad (7.52)$$

$$\tilde{E} = 22,3 \text{ kV/m} \quad (7.53)$$

$$\tilde{I}_{\mathcal{E}} = [-58,4 \text{ cm}^{-1}; -45,9 \text{ cm}^{-1}] \quad (7.54)$$

Abbildung 7.15 zeigt das Photoabsorptionsspektrum für

$$B = 2,0045(8) \text{ T} \quad (7.55)$$

$$E = 22,41(6) \text{ kV/m} \quad (7.56)$$

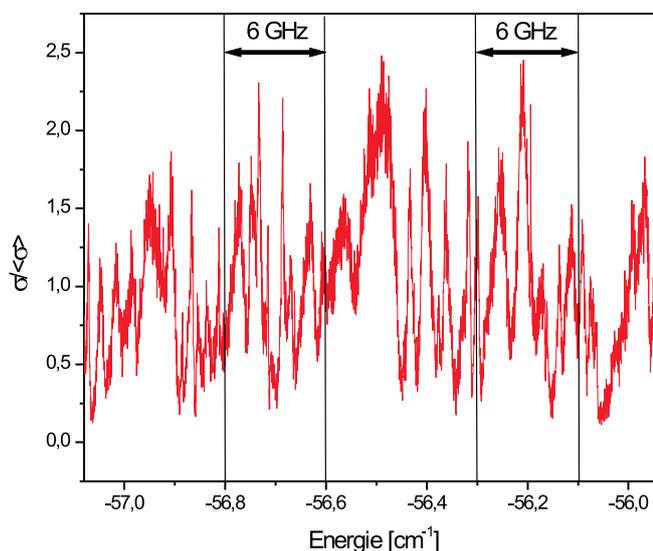


Abbildung 7.15: Photoabsorptionsspektrum für $B = 2,0045(8) \text{ T}$, $E = 22,41(6) \text{ kV/m}$: Das Spektrum weist eine starke Schwankung um seinen Mittelwert auf. Neben verhältnismäßig scharfen Spitzen gibt es Strukturen mit einer Breite von bis zu einigen GHz (z. B. im Bereich $-57,0 \dots -56,9 \text{ cm}^{-1}$, bei $-56,5 \text{ cm}^{-1}$ oder bei $-56,0 \text{ cm}^{-1}$). Die gekennzeichneten Teile des Spektrums sind in der Abbildung 7.16 vergrößert dargestellt.

Einen besseren Eindruck von den ausgeprägten Schwankungen um den Mittelwert vermittelt die Abbildung 7.16. Sie enthält die gekennzeichneten 6 GHz-langen Abschnitte aus Abbildung 7.15 (rote Linie) sowie die entsprechenden Abschnitte einer Vergleichsmessung bei $B = 2,0047(8) \text{ T}$, $E = 22,41(6) \text{ kV/m}$ (schwarze Linie). Damit wird u. a. die gute Reproduzierbarkeit der Spektren unter Beweis gestellt. Selbst Spitzen mit einer Breite von nur 50 MHz bzw. 40 MHz (FWHM) können reproduzierbar aufgelöst werden. Die Spitze mit der Breite von

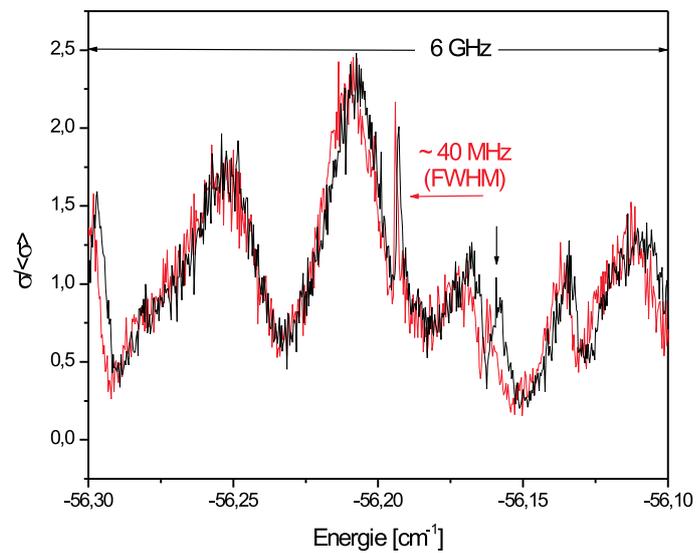
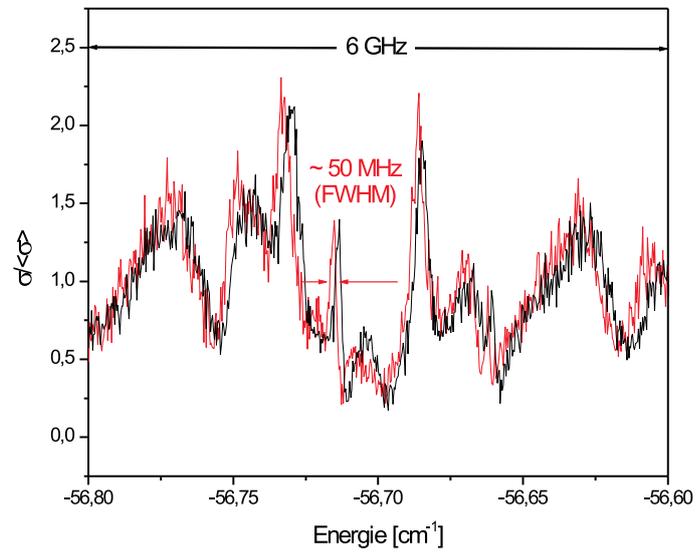


Abbildung 7.16: Vergrößerte Photoabsorptionsspektren für $B = 2,0045(8) \text{ T}$, $E = 22,41(6) \text{ kV/m}$ (rote Linie) bzw. $B = 2,0047(8) \text{ T}$, $E = 22,41(6) \text{ kV/m}$ (schwarze Linie)

50 MHz hat im übrigen die Gestalt einer Fano-Resonanz. Damit wird auch unter den tatsächlichen experimentellen Bedingungen eine hohe Strukturauflösung erzielt. Im Gegensatz zu den entsprechenden Messungen bei Abwesenheit statischer äußerer Felder in 7.1, liegen bei gekreuzten Feldern bisher keinerlei Erkenntnisse über die natürliche Breite der Strukturen vor.

Die Spektren weisen geringfügige Abweichungen auf. Ein Beispiel für die stärksten beobachteten Abweichungen liefert die Umgebung des schwarzen Pfeils in Abbildung 7.16. Während das rote Spektrum stets leicht zu niedrigeren Energien verschoben ist und der Energieabstand der 40 MHz-Spitzen etwa 30 MHz beträgt, erreicht er bei dem schwarzen Pfeil etwa 90 MHz. Ein Grund dafür könnte in der unterschiedlichen magnetischen Induktionsstärke der Spektren liegen. Nach den Erklärungen in 5.3.1 bedingt die Verwendung des supraleitenden Schalters eine relative Abnahme dieser Größe um etwa 10^{-4} während der Aufzeichnung eines Spektrums. Da die Induktionsstärke nur mit einem relativen Fehler von etwa $5 \cdot 10^{-4}$ gemessen werden kann, sind keine Vergleichsmessungen möglich, bei denen der relative Fehler sicher weniger als 10^{-4} beträgt. Deswegen kann nur schwer abgeschätzt werden, ob die beobachteten Abweichungen tatsächlich durch die unterschiedliche Induktionsstärke verursacht werden.

7.4.3 Nachweis von Ericson-Fluktuationen

Nach Kapitel 2 weist eine gemessenen Anregungsfunktion Ericson-Fluktuationen auf, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. Der Verlauf der Anregungsfunktion steht nicht im Widerspruch zur Beschreibung durch Resonanzen, die sich stark durchdringen.
2. Die Autokorrelation hat einen Lorentz-förmigen Verlauf, d. h. es gilt mit geeigneten Konstanten A , Γ in guter Näherung:

$$C(\varepsilon) = \frac{A}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2} \quad (7.57)$$

Die erste Eigenschaft wird unmittelbar durch Abbildung 7.15 sowie die Vergrößerungen in 7.16 bestätigt. Bis auf einige Ausnahmen haben die Strukturen nicht die Gestalt isolierter Resonanzen. Es ist also gut vorstellbar, daß sie das Ergebnis der Durchdringung einer großen Zahl von Resonanzen sind.

Zur Untersuchung der zweiten Eigenschaft wird die Autokorrelation der Anregungsfunktion aus Abbildung 7.15 gemäß 7.4.1 berechnete. Die dabei eingesetzten Verschiebeparameter beginnen bei 0 MHz, folgen dann im Abstand von 10 MHz aufeinander und reichen bis 2,5 GHz. Eine Lorentz-Kurve der Form (7.57) wurde an alle so bestimmten Stützstellen angeglichen. Die aus dem Spektrum berechneten Punkte und die Ausgleichskurve sind in Abbildung 7.17 dargestellt.

Der Verlauf der Autokorrelation kann in drei Abschnitte unterteilt werden. Diese sind in Abbildung 7.17 eingezeichnet. Während in (2) eine gute Übereinstimmung herrscht, sind in Bereich (1) und (3) Abweichungen festzustellen. Besondere Aufmerksamkeit verdient auch der Punkt für verschwindenden Verschiebeparameter (roter Pfeil). Der hier berechnete Wert ist deutlich

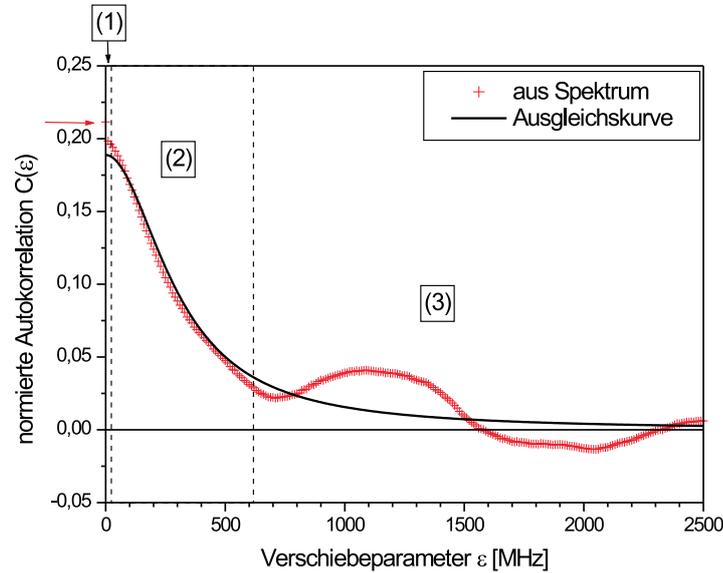


Abbildung 7.17: Die Autokorrelation der Fluktuation der Anregungsfunktion für $B = 2,0045(8)$ T, $E = 22,41(6)$ kV/m (rote Kreuze) und die angeglichene Lorentz-Kurve (schwarze Linie). Das Verhalten in den drei Abschnitten ((1),(2),(3)) wird im Text näher beschrieben.

größer als bei den folgenden Punkten. Der Übergang des Lorentz-förmigen Verlaufs in ein schwingungsähnliches Verhalten in Bereich (3) kann als typisch gelten. Er wird sowohl bei der Messung kernphysikalischer Ericson-Fluktuationen [vBEH⁺64] als auch bei der numerischen Untersuchung von Wasserstoff in gekreuzten Feldern [MW92, MW94] beobachtet. Unabhängig davon ist mit dieser Abbildung der Nachweis von Ericson-Fluktuationen erbracht. Im folgenden wird das Verhalten der Autokorrelation in den drei Bereichen näher erläutert.

Bereich (1):

Die Autokorrelation ist für Verschiebeparameter bis etwa 10 MHz etwas stärker. Dies ist eine Folge der endlichen Energieschrittweite bei der Aufzeichnung des Spektrums. Diese beträgt etwa 10 MHz. Um die Autokorrelation berechnen zu können, wurde dem experimentellen Datensatz gemäß 7.4.1 eine Stufenfunktion zugeordnet. Auf der Skala der Energieschrittweite ist diese konstant und daher vollkommen autokorreliert. Das Verhalten der Autokorrelation für kleine Verschiebeparameter wird in 7.6 in einem anderen Zusammenhang näher untersucht.

Die Unstetigkeit der Autokorrelationsfunktion an der Stelle 0 MHz ist eine Folge der endlichen Statistik bei der Bestimmung der experimentellen Anregungsfunktion. Die einzelnen Meßpunkte enthalten die Zahl N von detektierten

angeregten Atomen. Entsprechend haben sie den statistischen Fehler $N - \langle N \rangle$. Dies führt zu einer verstärkten Autokorrelation an der Stelle 0 MHz: Nach (7.40) ist die Autokorrelation die Summe einer endlichen Anzahl $K \in \mathbb{N}$ von Produkten $A_k B_k$, bei denen jeder Faktor als Summe eines Erwartungswertes $\langle \cdot \rangle$ und eines statistischen Fehlers δ verstanden werden kann:

$$A_k = \langle A_k \rangle + \delta A_k \quad (7.58)$$

$$B_k = \langle B_k \rangle + \delta B_k \quad (7.59)$$

Wird nun der Erwartungswert für eine solche Summe gebildet, so ergibt sich im Fall, daß in jedem Summanden die statistischen Fehler der Faktoren voneinander unabhängig sind:

$$\left\langle \sum_{k=1}^K A_k B_k \right\rangle = \sum_{k=1}^K \langle A_k \rangle \langle B_k \rangle \quad (7.60)$$

Das ist die Korrelation der Erwartungswerte. Dagegen liefert die Summe

$$\left\langle \sum_{k=1}^K A_k A_k \right\rangle = \sum_{k=1}^K \langle A_k \rangle \langle A_k \rangle + \sum_{k=1}^K \langle \delta A_k^2 \rangle \quad (7.61)$$

eine zusätzlichen (positiven) Beitrag. Wird jede der Größen $\{A_k\}_{k \in \{1, \dots, K\}}$ als Ereigniszahl aus Z Einzelmessungen bestimmt, so wächst (Binomialverteilung)

$$\left\langle \sum_{k=1}^K \delta A_k^2 \right\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^K \langle A_k \rangle (1 - \langle A_k \rangle) \quad (7.62)$$

linear mit Z , während

$$\sum_{k=1}^K \langle A_k \rangle \langle A_k \rangle \quad (7.63)$$

quadratisch in Z wächst. Damit ist der relative Beitrag der statistischen Fehler umgekehrt proportional zu Z . Strebt die Summe (7.60) im Grenzfall kleiner Verschiebeparameter gegen den Wert, der sich ergibt, wenn B durch A ersetzt wird, so bleibt dieser Wert für endliches Z unter dem, der sich bei Auswertung an der Stelle Null ergibt. Tatsächlich sind die Verhältnisse bei der Autokorrelation der Fluktuation schwieriger, da $\langle s \rangle$ in (7.40) ebenfalls mit Meßwerten gebildet wird. Daher bleibt auch für endliche Verschiebeparameter eine (geringe) Korrelation der statistischen Fehler bestehen.

Bereich (2):

Hier besteht eine gute Übereinstimmung. Wichtig ist die Feststellung, daß die Skala auf der die Autokorrelation Lorentz-förmig ist, etwa eine Größenordnung über der Breite der schmalsten in dem entsprechenden Spektrum reproduzierbar aufgelösten Spitzen liegt. Damit ist klar, daß die hier festgestellte Korrelation nicht die Folge einer schlechten Strukturauflösung ist.

Bereich (3):

Der Übergang des Lorentz-förmigen Verlaufs in ein schwingungsähnliches Verhalten in Bereich (3) wird sowohl bei der Messung kernphysikalischer Ericson-Fluktuationen [vBEH⁺64] als auch bei der numerischen Untersuchung von Wasserstoff in gekreuzten Feldern [MW92, MW94] beobachtet. Ob dieses Verhalten eine tiefere physikalische Bedeutung hat oder lediglich durch die endliche Ausdehnung des bei den Integrationen zugrunde gelegten Intervalls verursacht wird, ist bisher nicht geklärt (vgl. die genannten Veröffentlichungen).

Einordnung des Ergebnisses

Der Verlauf der Autokorrelation in Abbildung 7.17 gleicht den aus der Literatur bekannten Ergebnissen zu Ericson-Fluktuationen. Dies trifft sowohl auf das experimentellen Ergebnis aus der Kernphysik [vBEH⁺64] als auch auf die numerisch berechnete Autokorrelation für Wasserstoff in gekreuzten Feldern [MW92, MW94] zu. Geringfügige Unterschiede bestehen bei kleinen Verschiebeparametern (Bereich (1)). Die Abweichungen vom Lorentz-förmigen Verlauf sind bei den kernphysikalischen Ericson-Fluktuationen stärker als bei den hier vorgestellten Messungen.

Wichtig ist die Feststellung, daß Abbildung 7.17 die Ausgleichskurve zeigt, die sich unter Berücksichtigung *aller* dort eingetragenen Meßpunkte ergibt. Daher beeinflußt das schwingungsähnliche Verhalten im Bereich (3) auch die Werte der Ausgleichskurve bei kleinen Verschiebeparametern. In der Vereinigung der Bereiche (1) und (2) kann eine Lorentz-Kurve mit Korrelationskoeffizienten von weit über 99% an die experimentellen Daten angeglichen werden. Der Einfluß des schwingungsähnlichen Verhaltens bei großen Verschiebeparametern kann unterdrückt werden, wenn die Lorentz-förmige Ausgleichskurve nur aufgrund der experimentellen Werte für kleine Verschiebeparameter bestimmt wird. Dies entspricht dem Vorgehen in [MW92, MW94]. Abbildung 7.18 zeigt das Ergebnis. Dabei wird der Verschiebeparameter 0 MHz ausgeschlossen (korrelierte statistische Fehler). Weiter tragen Verschiebeparameter nur solange bei, bis die Autokorrelation auf 3/4 des Wertes abfällt, den sie an der Stelle 10 MHz hat.

Die Lorentz-Kurve stimmt weit über den Bereich, in dem sie angeglichen wurde, gut mit den experimentellen Daten überein. Ihre Breite beträgt 499(5) MHz. Mit größer werdenden Verschiebeparametern beginnen die experimentellen Daten stärker um die Ausgleichskurve zu schwingen. Die Abweichungen im Bereich (1) in Abbildung 7.17 können also als Einfluß dieser Schwingungen gewertet werden. Das Verhalten der Autokorrelation bei kleinen Verschiebeparametern wird beim Vergleich von Messungen für unterschiedliche magnetische Induktionsstärken in 7.5 eine wichtige Rolle spielen.

Eindrucksvoll ist der Vergleich der Energieskalen, auf denen atomphysikalische und kernphysikalische Ericson-Fluktuationen auftreten. Die eine Ericson-Fluktuation kennzeichnende Energieskala ist durch die Breite (FWHM) der Lorentz-förmigen Ausgleichskurve gegeben. Sie beträgt 26 keV in [vBEH⁺64] und 0,5 GHz in Abbildung 7.17. Zwischen diesen Werten liegen *zehn Größenordnungen*. Die vorgestellten Messungen bekräftigen damit die Universalität der Begriffsbildung der Ericson-Fluktuation (vgl. 2.3).

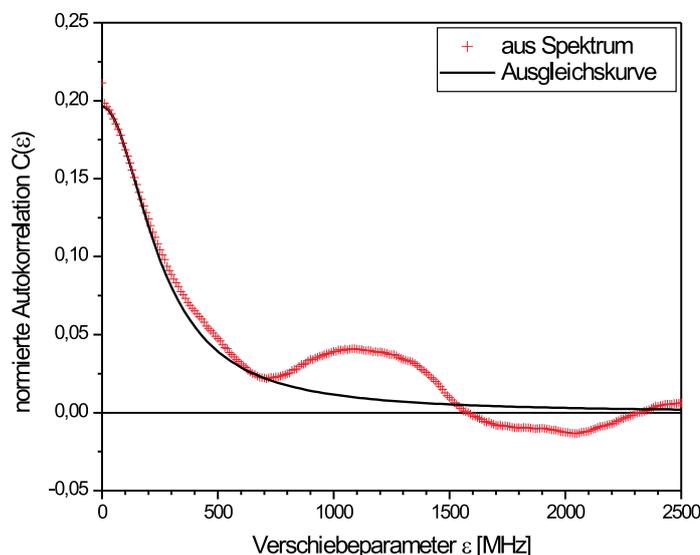


Abbildung 7.18: Dieselben experimentellen Daten wie in Abbildung 7.17 werden hier mit einer Lorentz-Kurve verglichen, die nur für kleine Verschiebeparameter angeglichen wurde. Das Ergebnis unterliegt daher nur in geringem Maße dem Einfluß des schwingungsähnlichen Verhaltens bei großen Verschiebeparametern.

7.5 Messungen bei unterschiedlichen magnetischen Induktionsstärken

In [MW92, MW94] wird für Wasserstoff eine mit der Stärke der magnetischen Induktion zunehmende Ausprägung von Ericson-Fluktuationen vorhergesagt. Deshalb wurden die bisher vorgestellten Messungen um entsprechende Untersuchungen bei etwa 1 T und 1,5 T ergänzt. Die zugehörigen Autokorrelationen finden sich in Abbildung 7.19.

Die Ausprägung der Fluktuationen ist unterschiedlich und entspricht den theoretischen Vorhersagen für Wasserstoff. Während die Fluktuationen bei 1 T nur schwach sind, treten sie mit wachsender Stärke der magnetischen Induktion immer mehr hervor. Bei genauerer Untersuchung zeigt sich, daß das Verhalten der Autokorrelationen für kleine Verschiebeparameter qualitative Unterschiede aufweist. Während die Autokorrelationen für 1,5 T und 2 T in diesem Bereich sehr gut durch Lorentz-Kurven beschrieben werden, treten bei 1 T deutliche Abweichungen von der Ausgleichskurve auf. Eine Lorentz-Kurve kennzeichnet die ausgeprägte Krümmung, mit der sie von ihrem Maximum in die Flanke übergeht. Bei 1 T ist diese Krümmung nur schwach. Tatsächlich wird das Verhalten der Autokorrelation für kleine Verschiebeparameter bei 1 T durch eine exponentielle Ausgleichskurve ähnlich gut beschrieben wie durch eine Lorentzförmige. Die tatsächlichen Werte liegen zwischen den beiden Ausgleichskurven. Abbildung 7.20 zeigt die Autokorrelation bei kleinen Verschiebeparametern samt

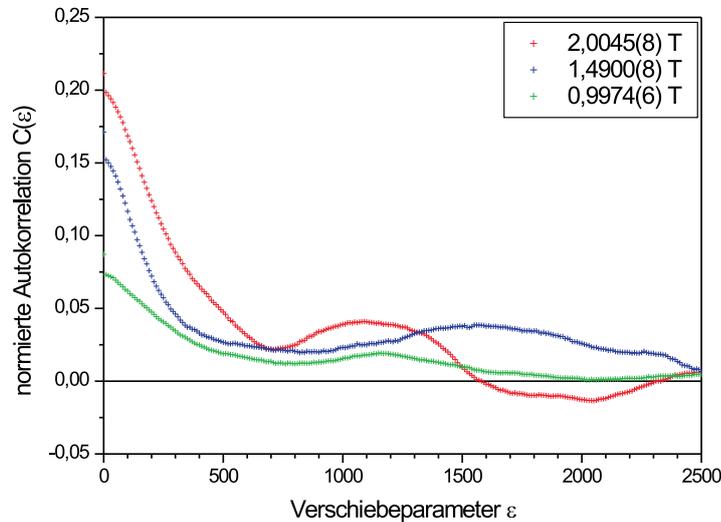


Abbildung 7.19: Ericson-Fluktuationen für unterschiedliche magnetische Induktionsstärken: Die elektrische Feldstärke beträgt bei allen drei Spektren 22, 41(6) kV/m. Die entsprechenden magnetischen Induktionsstärken sind der Legende zu entnehmen. In allen Fällen wird zur Berechnung der Autokorrelation dasselbe Energieintervall verwandt (siehe 7.4.1).

den in diesem Bereich angeglichenen exponentiellen und Lorentz-förmigen Ausgleichskurven für die Messung bei 1 T.

Aufschlußreich ist der Vergleich mit den Messungen bei 1, 5 T und 2 T. Dabei werden die exponentiellen und Lorentz-förmigen Ausgleichskurve nach denselben Regeln wie bei 1 T berechnet: Der Verschiebeparameter 0 MHz wird ausgeschlossen (korrelierte statistische Fehler). Weiter tragen Verschiebeparameter nur solange bei, bis die Autokorrelation auf $3/4$ des Wertes abfällt, den sie an der Stelle 10 MHz hat. Auf dieselbe Weise wurde die Ausgleichskurve in Abbildung 7.18 ermittelt. Die Abbildungen 7.21 und 7.22 liefern die Ergebnisse.

In beiden Fällen ist das Verhalten klar Lorentz-förmig. Bei 1 T sind die Fluktuationen also nicht nur schwächer, die Autokorrelation weicht auch qualitativ vom Lorentz-förmigen Verhalten ab. Während bei 1, 5 T und 2 T gut ausgeprägte Ericson-Fluktuationen vorliegen, sind die Abweichungen von den die Ericson-Fluktuationen kennzeichnenden Eigenschaften bei 1 T schon beträchtlich.

Mit Hilfe der Vorhersage von Blümel und Smilansky (siehe 2.3, [BS88]) kann eine heuristische Erklärung für die Abhängigkeit der Ausprägung der Ericson-Fluktuationen von der magnetischen Induktionsstärke B gegeben werden: Der Summand des Hamilton-Operators, der den diamagnetischen Zeeman-Effekt vermittelt, stellt ein bindendes Potential dar. Die Steilheit dieses Potential wächst quadratisch mit B , und für das klassisch beschriebene Elektron wird es schwieriger, der Kernanziehung zu entfliehen. Bei hinreichender Stärke der

magnetischen Induktion wird die Ionisationsdynamik daher chaotisch. Nach der Vorhersage von Blümel und Smilansky sollte die zugehörige quantenmechanische Anregungsfunktion dann Ericson-Fluktuationen aufweisen.

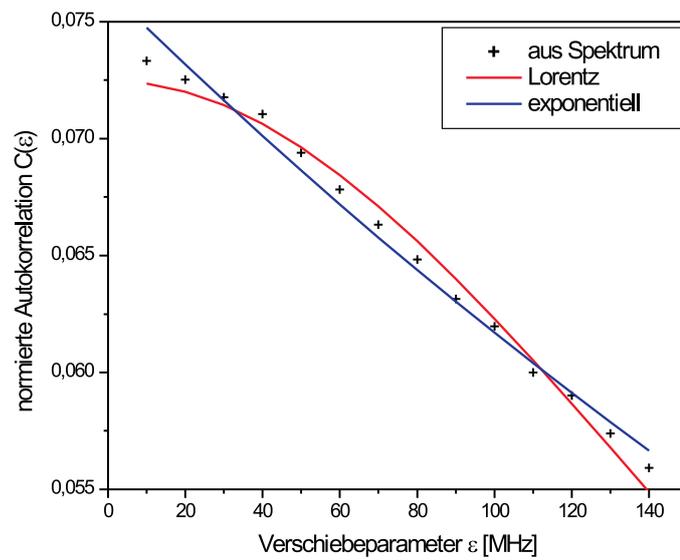


Abbildung 7.20: Die Autokorrelation bei 0,9974(6) T und 22,41(6) kV/m für kleine Verschiebeparameter: Das Verhalten liegt zwischen einem exponentiellen und einem Lorentz-förmigen Abfall.

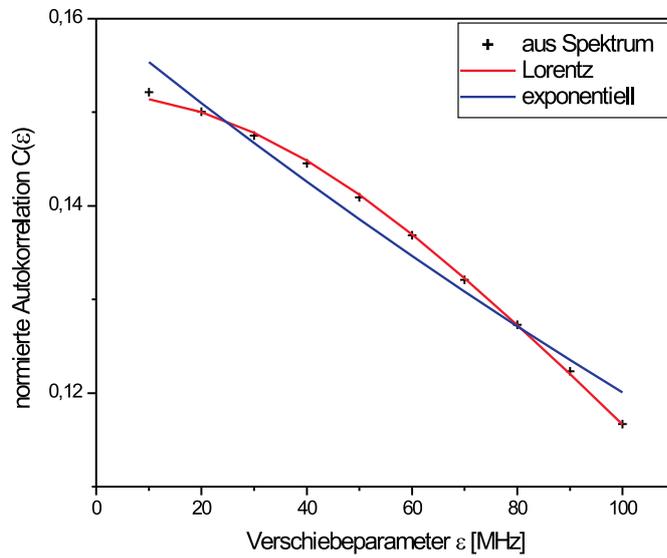


Abbildung 7.21: Die Autokorrelation bei 1,4900(8) T und 22,41(6) kV/m für kleine Verschiebeparameter

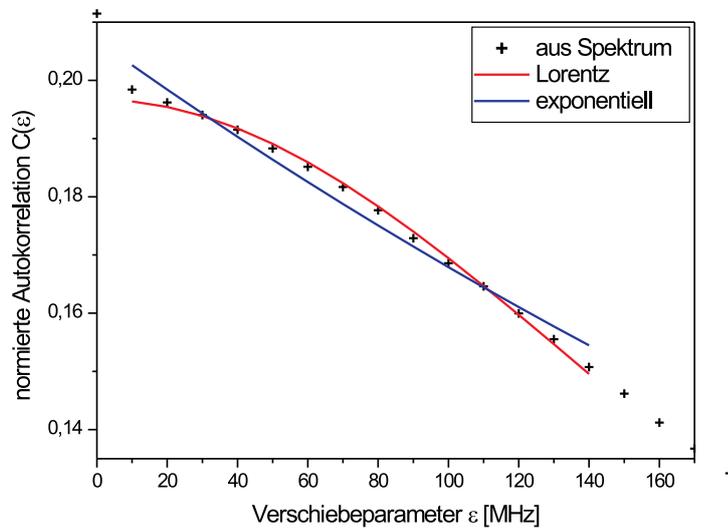


Abbildung 7.22: Die Autokorrelation bei 2,0045(8) T und 22,41(6) kV/m für kleine Verschiebeparameter.

7.6 Weitere Untersuchungen der Autokorrelation

Es kann ein überraschender Einfluß der Strahlleistung des Farbstoff-Lasers auf die Spektren herausgearbeitet werden.

Den Ausgangspunkt der Untersuchungen bildet die bereits vorgestellte Messung bei 1 T. Die entsprechende Autokorrelation hat bei kleinen Verschiebeparametern ein Verhalten, das zwischen einem Lorentz-förmigen und einem exponentiellen Abfall liegt. Die folgenden Messungen belegen, daß sich das Verhalten bei einer Erhöhung der Farbstoff-Laser-Strahlleistung zum exponentiellen verschiebt. In diesem Sinne „zerstört“ eine hohe Strahlleistung die Ericson-Fluktuationen.

Nach den Überlegungen zur Messung der Anregungsfunktion in 4.6 (besonders (4.112)) nimmt der Erwartungswert der Zählrate linear mit der Strahlleistung des Farbstoff-Lasers zu. Nach 7.4.3 ist die Autokorrelation (außer bei verschwindendem Verschiebeparameter) im wesentlichen unabhängig von der mittleren Zahl der detektierten angeregten Atome („Ereignisse“). Daher kann eine wesentliche Änderung der Autokorrelation mit der Strahlleistung nicht lediglich ein statistischer Effekt sein. Die eigentlich unerwünschte reversiblen Effizienzverringerung des Elektronendetektors (siehe 5.5) gestattet allerdings auch einen experimentellen Befund, der von dieser Überlegung unabhängig ist. Sie führt nämlich dazu, daß aufeinanderfolgende Aufzeichnungen des gleichen Spektrums mit unveränderten Strahlleistungen zwangsläufig unterschiedliche mittlere Ereigniszahlen haben. Die Abhängigkeit der Autokorrelation von der Strahlleistung kann so besonders klar herausgearbeitet werden, indem Autokorrelationen für unterschiedliche Strahlleistung, aber gleiche mittlere Ereigniszahl verglichen werden. Insbesondere ist damit eine Abhängigkeit des Ergebnisses von nichtlinearen Detektoreffekten („Sättigung“) ausgeschlossen.

Abbildung 7.23 zeigt denselben Ausschnitt aus drei aufeinanderfolgenden Aufzeichnungen bei geschlossenem supraleitenden Schalter und ohne wesentliche Veränderung der Strahlleistungen der Laser. Die mittlere Ereigniszahl nahm dabei um insgesamt 30% ab. Die Autokorrelationen der Spektren finden sich in Abbildung 7.24. Sowohl die Spektren als auch die Autokorrelationen stimmen gut überein. Abbildung 7.25 zeigt nun das entsprechende Ergebnis bei höherer Strahlleistung. Gezeigt werden sechs aufeinanderfolgende Aufzeichnungen ohne wesentliche Veränderung der (erhöhten) Strahlleistung. Die mittlere Ereigniszahl nahm dabei um insgesamt 35% ab. Die Autokorrelationen der Spektren finden sich in Abbildung 7.26. Auch hier stimmen Spektren und Autokorrelationen überein.

Die geringfügigen Abweichungen bei den Autokorrelationen könnten durch die langsame Abnahme der magnetischen Induktionsstärke bei geschlossenem supraleitenden Schalter verursacht werden. Denn mit der magnetischen Induktionsstärke ändert sich auch die Effizienz der optischen Pumpstufe: Die Dioden-Laser-Frequenz ν_{Diode} hat zu Beginn der Aufzeichnung gegenüber der Mittelfrequenz $\nu(B)$ des optisch gepumpten Übergangs eine gewisse Verstimmung. Eine Änderung der magnetischen Induktionsstärke führt dann gemäß (6.6) zu einer Verkleinerung oder Vergrößerung dieser Verstimmung, je nachdem ob die ν_{Diode} größer oder kleiner als $\nu(B)$ ist. Streutheoretisch gesprochen führt dies während der Messung zu einer Schwankung der Flusses von präparierten

Zuständen. Dieser geht über (4.112) linear in den Erwartungswert für die Ereigniszahl ein. Damit kommt es bei der Integration, die die Autokorrelation liefert, zu einer ungleichmäßigen Gewichtung des Spektrums. Die Verteilung der Fluktuationen im Spektrum kann ungleichmäßig sein. Dann führt bei mehrfacher Aufzeichnung des gleichen Spektrums die Streuung der Verstimmung der Dioden-Laser-Frequenz zu Beginn der Aufzeichnungen zu Abweichungen der Autokorrelationen. Bei Abbildung 7.24 und 7.26 sind diese Abweichungen allerdings gering. Darüber hinaus können auch die unterschiedlichen magnetischen Induktionsstärken selbst zu einer tatsächlichen Änderung der Anregungsfunktion führen.

Zum Vergleich der beiden Meßreihen werden Vertreter mit der gleichen Zählrate gewählt. Diese beträgt beim schwarzen Spektrum mit niedriger Strahlleistung und beim grünen Spektrum mit höherer Strahlleistung 84. Der unterschiedliche Verlauf der Anregungsfunktionen ist Abbildung 7.27 zu entnehmen. Eine besonders deutliche Abweichung weisen die Autokorrelationen auf. Sie finden sich in Abbildung 7.28.

Nun werden die Autokorrelationen bei kleinen Verschiebeparametern untersucht. Dabei wird wieder so vorgegangen wie bei den entsprechenden Auswertungen in 7.5: Es wird sowohl eine Lorentz-Kurve als auch ein exponentieller Abfall an die aus den Spektren bestimmten Autokorrelationen angeglichen. Der Verschiebeparameter 0 MHz wird dabei ausgeschlossen (korrelierte statistische Fehler). Weiter tragen Verschiebeparameter nur solange bei, bis die Autokorrelation auf $3/4$ des Wertes abfällt, den sie an der Stelle 10 MHz hat. Die Ergebnisse finden sich in Abbildung 7.29 (niedrige Strahlleistung) und 7.30 (höhere Strahlleistung). Mit der Erhöhung der Strahlleistung verschiebt sich das Verhalten zugunsten eines exponentiellen Verlaufs.

Um dieses Ergebnis einzuordnen, muß zunächst geklärt werden, ob es in Anbetracht der geringfügigen Abweichungen der Autokorrelationen bei niedriger (Abbildung 7.24) und höherer Strahlleistung (Abbildung 7.26) signifikant ist. Deswegen wurden die arithmetischen Mittel der Autokorrelationen dieser beiden Meßreihen berechnet und die Ausgleichskurven an die Mittelwerte bestimmt. Auch dabei kann die Verschiebung zugunsten des exponentiellen Verhaltens bestätigt werden. Während der Korrelationskoeffizient für die Lorentzförmige Ausgleichskurve mit wachsender Strahlleistung von 99,29% auf 99,14% fällt, steigt der für die Exponentialkurve von 99,48% auf 99,61%.

Für die Veränderung von Stärke und Form der Autokorrelation können zwei mögliche Gründe angegeben werden. Zum ersten kann die höhere Strahlleistung zu Sättigungsverbreiterungen bzw. -aufspaltungen (Autler-Townes-Effekt) bei den angeregten Zuständen führen. Zum zweiten erzeugen die schnell ionisierenden Elektronen während sie sich vom Anregungsort in der Photoabsorptionszone entfernen einen schwachen „Ionisationsstrom“, der einen zusätzlichen elektromagnetischen Einfluß auf die nachfolgenden Atome ausüben kann. Jedenfalls sind hohen Dichte und schwache Bindung der angeregten Zustände mit einer hohen Empfindlichkeit gegen Störungen verbunden. Besonders der starke Anstieg der Autokorrelation mit der Strahlleistung ist ein klares Zeichen dafür, daß ansonsten vernachlässigbare Einflüsse hier eine wichtige Rolle spielen können. Aus diesem Grund wurden sämtliche Messungen bei einer geringen Elektronenfreisetzungsrates in der Photoabsorptionszone durchgeführt. Bei den Messungen zum Vergleich der Autokorrelation bei verschiedenen magnetischen Induktionsstärken war diese Rate darüber hinaus etwa gleich.

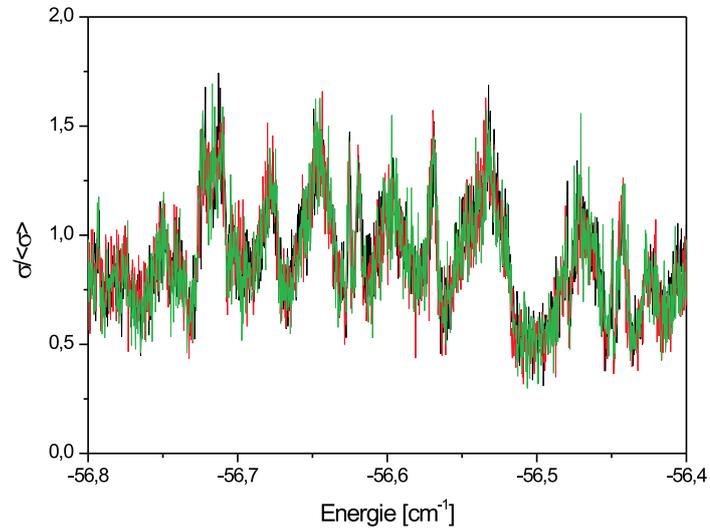


Abbildung 7.23: Spektren bei verschiedenen Zählraten: Die Spektren wurden bei gleichbleibender Leistung der Laser nacheinander aufgenommen (schwarz, rot grün). Die (reversible) Verringerung der Detektoreffizienz führt zu einer Abnahme der mittleren Ereigniszahl $\langle N \rangle$ bei den Spektren ($\langle N \rangle = 84$ (schwarz), 69 (rot), 57 (grün)). Offensichtlich ändert sich dadurch lediglich die Normierung.

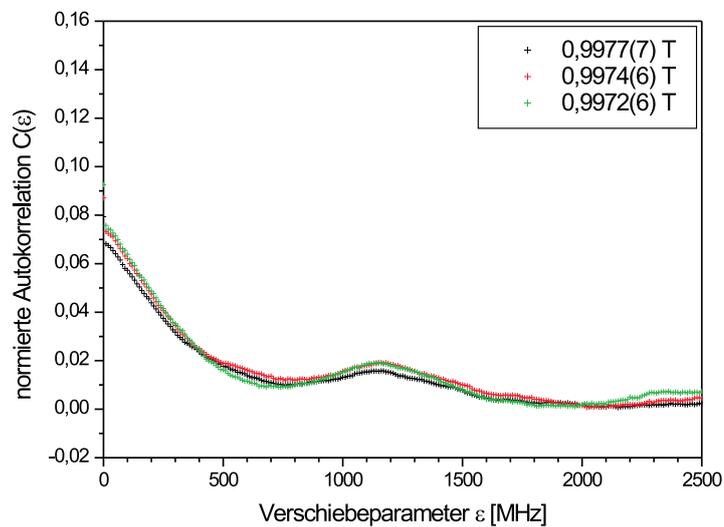


Abbildung 7.24: Autokorrelationen bei verschiedenen Zählraten. Die Farben entsprechen denen in Abbildung 7.23.

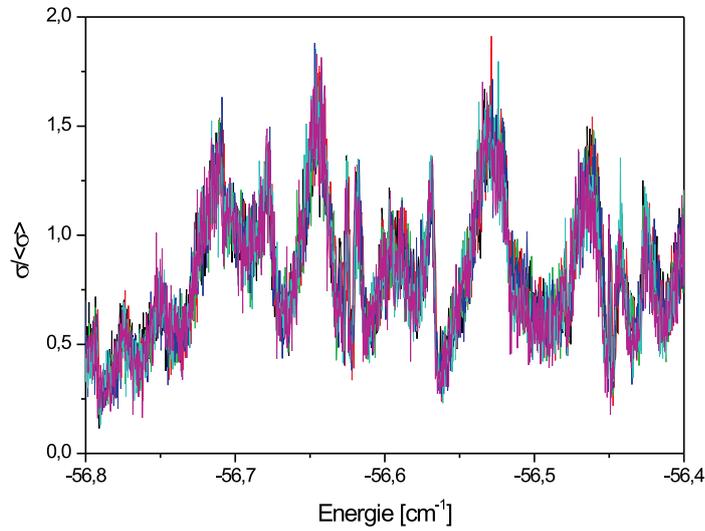


Abbildung 7.25: Spektren bei gleichbleibender höherer Strahlleistung aber veränderlicher mittlerer Zählrate: Die Spektren wurden nacheinander aufgezeichnet (schwarz, rot, grün, blau, hellblau, magenta). Die mittlere Ereigniszahl $\langle N \rangle$ bei den Spektren beträgt $\langle N \rangle = 95$ (schwarz), 91 (rot), 84 (grün), 73 (blau), 70 (hellblau), 62 (magenta).

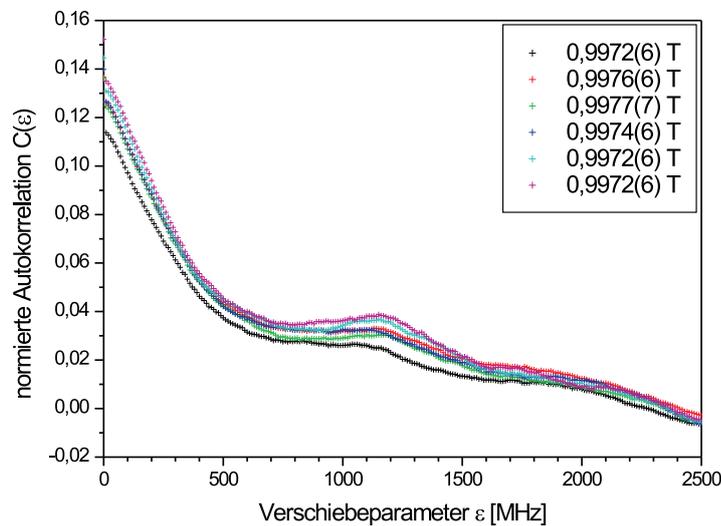


Abbildung 7.26: Autokorrelationen bei gleichbleibender höherer Strahlleistung aber veränderlicher mittlerer Zählrate: Die Farbkennzeichnung entspricht der in Abbildung 7.25.

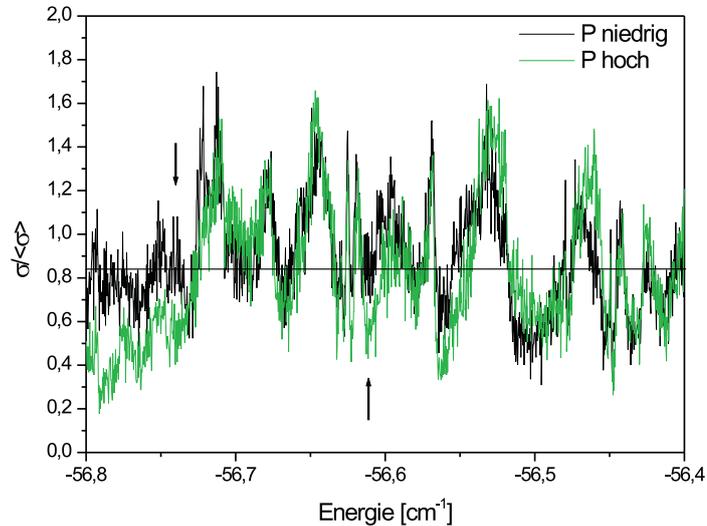


Abbildung 7.27: Vergleich der Spektren bei unterschiedlichen Strahlleistungen: Abgebildet ist je ein Spektrum bei niedriger Strahlleistung („P niedrig“) und eines bei höherer Strahlleistungen („P hoch“). Die Vertreter wurden so gewählt, daß sie die gleiche mittlere Ereigniszahl haben. Beide Spektren verlaufen ähnlich, zeigen aber insbesondere in der Ausprägung ihrer Strukturen z. T. deutliche Abweichungen. Bei den mit den schwarzen Pfeilen gekennzeichneten Stellen ist das Vorzeichen der Abweichung unterschiedlich. Damit sind die Abweichungen energieabhängig.

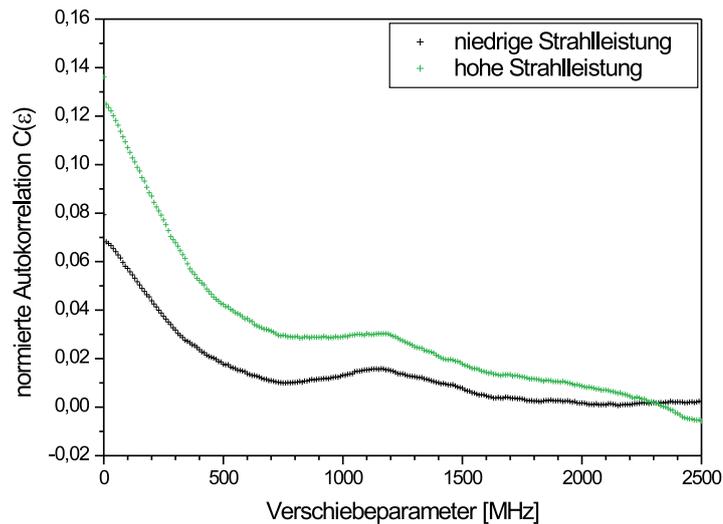


Abbildung 7.28: Vergleich der Autokorrelationen bei unterschiedlicher Strahlleistung: Die Farbkennzeichnung entspricht der in Abbildung 7.27. Die Fluktuationen bei höherer Strahlleistung sind stärker korreliert.

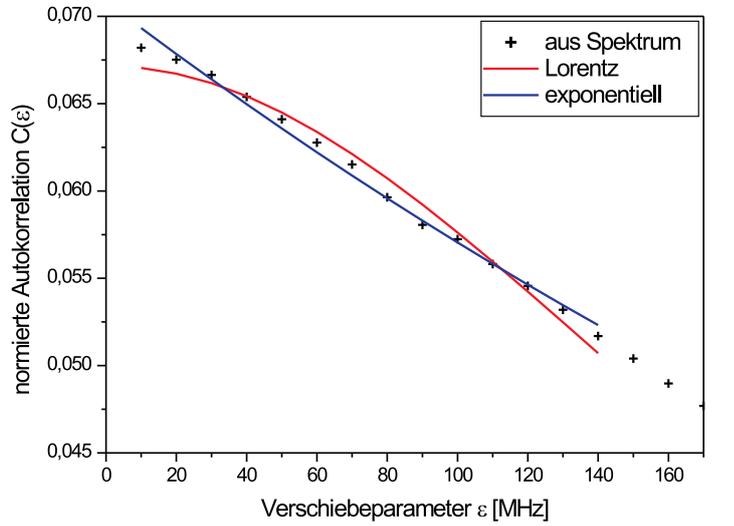


Abbildung 7.29: Die Autokorrelation für niedrige Strahlleistung: Bei kleinen Verschiebeparametern liegt das Verhalten zwischen einem Lorentz-förmigen und einem exponentiellen Verlauf.

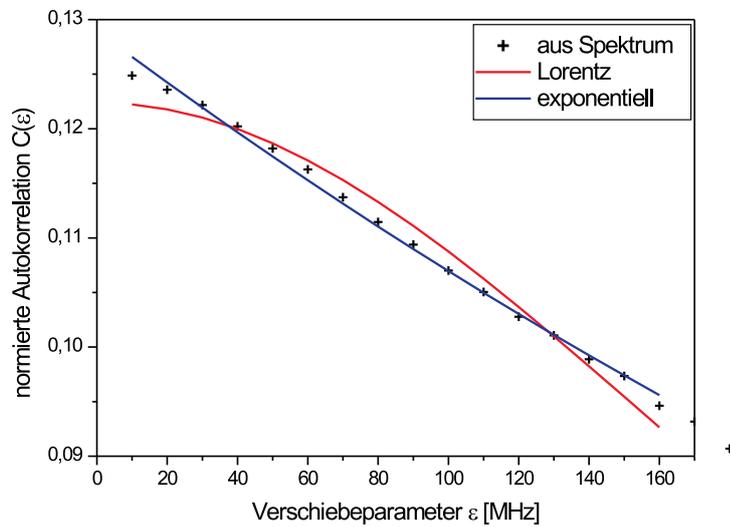


Abbildung 7.30: Die Autokorrelation für höhere Strahlleistung: Bei kleinen Verschiebeparametern hat die Autokorrelation nun eher einen exponentiellen Verlauf.

Anhang A

Nichtevakuierte Interferometer

Bei der Driftunterdrückung der optischen Pumpstufe und der absoluten Wellenlängenmessung mit dem Michelson-Interferometer muß der Brechungsindex von Luft n als von Frequenz ν , Druck p und Temperatur T abhängige Größe betrachtet werden.

A.1 Edlen-Formel

Der Brechungsindex von Luft läßt sich nach einer empirischen Formel [Lid90] berechnen. Mit den Größen

$$\kappa' = \frac{\frac{\nu}{\text{MHz}}}{\frac{c}{\text{m/s}}} \quad (\text{A.1})$$

$$p' = \frac{p}{\text{Pa}} \quad (\text{A.2})$$

$$T' = \frac{T}{\text{°C}} \quad (\text{A.3})$$

gilt

$$[n(\nu; p, T) - 1] = a(p', T') \cdot b(\kappa') \cdot 10^{-8} \quad (\text{A.4})$$

mit

$$a(p', T') = \frac{p' [1 + p' (61,3 - T') 10^{-10}]}{96095,4 (1 + 0,003661 T')} \quad (\text{A.5})$$

$$b(\kappa') = 8342,13 + \frac{2406030}{130 - \kappa'^2} + \frac{15997}{38,9 - \kappa'^2} \quad (\text{A.6})$$

A.2 Mit Luft gefülltes FPI

Das in 6.1.2 ausführlich beschriebene Verfahren zur Unterdrückung der Dioden-Laser-Frequenzdrift koppelt die Dioden-Laser-Frequenz über ein mit Luft gefülltes FPI und zwei elektronische Regelkreise an einen Referenz-Laser mit geringer

Frequenzdrift. Die Dioden-Laser-Frequenz wird durch zwei transzendente Gleichungen implizit als Funktion von Referenz-Laser-Frequenz ν_0 , sowie Druck p und Temperatur T der Luft im FPI bestimmt:

$$\nu = \nu(\nu_0; p, T) \quad (\text{A.7})$$

Die Abhängigkeit von p und T ist eine Folge der Edlen-Formel (siehe A.1) für den Brechungsindex. Die dortigen Bezeichnungen werden auch im folgenden verwandt.

Die Frage nach der Stabilität der Dioden-Laser-Frequenz wird hier in allgemeiner Form geklärt. Nach den Überlegungen aus 6.1.2 sind bei geschlossenen Regelkreisen Länge des FPI $l = l(\nu_0)$ und Dioden-Laser-Frequenz ν durch die Bestimmungsgleichungen (6.15) und (6.18) gegeben:

$$q_0 \pi = \frac{2\pi n(\nu_0)}{c} \nu_0 l - 2 \arctan \sqrt{\frac{l}{2r-l}} \quad (\text{A.8})$$

$$n(\nu) \nu - n(\nu_0) \nu_0 = \frac{c}{2l(\nu_0)} (q - q_0) \quad (\text{A.9})$$

Druck und Temperatur spielen die Rolle von Parametern für dieses transzendente Gleichungssystem. Daher treten nur die Argumentensätze $(\nu_0; p, T)$ und $(\nu; p, T)$ auf. Zur Unterscheidung genügt es also die Frequenz anzugeben, p und T werden dagegen im folgenden weggelassen. Alle Ergebnisse ergeben sich aus dem Satz über implizite Funktionen nach kurzen Rechnungen. Zunächst:

$$\frac{\partial l}{\partial \nu_0} = - \frac{\frac{\partial n(\nu_0)}{\partial \nu_0} \nu_0 + n(\nu_0)}{n(\nu_0) - \frac{c}{2\pi \nu_0 \sqrt{l(\nu_0)[2r-l(\nu_0)]}}} \cdot \frac{l(\nu_0)}{\nu_0} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \nu_0} = \frac{\frac{\partial n(\nu_0)}{\partial \nu_0} \nu_0 + n(\nu_0) - [n(\nu) \nu - n(\nu_0) \nu_0] \frac{1}{l(\nu_0)} \frac{\partial l}{\partial \nu_0}}{\frac{\partial n(\nu)}{\partial \nu} \nu + n(\nu)} \quad (\text{A.11})$$

Mit der Näherung

$$\frac{c}{2\pi \nu_0 \sqrt{l(\nu_0)[2r-l(\nu_0)]}} \ll n(\nu_0) \quad (\text{A.12})$$

ergibt sich:

$$\frac{\partial l}{\partial \nu_0} = - \frac{\frac{\partial n(\nu_0)}{\partial \nu_0} \nu_0 + n(\nu_0)}{n(\nu_0)} \cdot \frac{l(\nu_0)}{\nu_0} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \nu_0} = \frac{n(\nu) \nu}{n(\nu_0) \nu_0} \cdot \frac{\frac{\partial n(\nu_0)}{\partial \nu_0} \nu_0 + n(\nu_0)}{\frac{\partial n(\nu)}{\partial \nu} \nu + n(\nu)} \quad (\text{A.14})$$

Für die Untersuchung der Abhängigkeit von Druck und Temperatur sei ξ eine dieser Größen ($\xi = p$ oder $\xi = T$). Dann gilt:

$$\frac{\partial l}{\partial \xi} = - \frac{n(\nu_0) - 1}{n(\nu_0) - \frac{c}{2\pi \nu_0 \sqrt{l(\nu_0)[2r-l(\nu_0)]}}} \cdot l(\nu_0) \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial \xi} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \xi} = - \frac{1}{\frac{\partial n(\nu)}{\partial \nu} \nu + n(\nu)} \left\{ [(n(\nu) - 1) \nu - [n(\nu_0) - 1] \nu_0] \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial \xi} \right. \quad (\text{A.16})$$

$$\left. + [n(\nu) \nu - n(\nu_0) \nu_0] \frac{1}{l(\nu_0)} \frac{\partial l}{\partial \xi} \right\} \quad (\text{A.17})$$

Wird wieder gemäß (A.12) genähert, ergibt sich:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \xi} = - \frac{\frac{n(\nu) - n(\nu_0)}{n(\nu_0)} \nu}{\frac{\partial n(\nu)}{\partial \nu} \nu + n(\nu)} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial \xi} \quad (\text{A.18})$$

Anhang B

Synchrone Demodulation

B.1 Elektronische Demodulation

*Elektronische Demodulation ist die Tiefpaßfilterung des Produkts aus einem zeitabhängigen elektronischen Meßsignal U_s und einer durch eine Referenzquelle gelieferten Sinus-Schwingung U_r .*¹

Die von der Referenzquelle (z. B. einem Funktionengenerator) gelieferte Schwingung U_r ist also

$$U_r(t) = A_r \sin(\omega_r t + \varphi_r) \quad (\text{B.1})$$

mit Amplitude A_r und Kreisfrequenz ω_r . Der Tiefpaß bestehe aus einem Widerstand mit Wert R und einem Kondensator mit Kapazität C . Die entsprechende Zeitkonstante ist $\tau = RC$. Fällt zum Zeitpunkt t_0 eine Spannung $U_a(t_0) = Q(t_0)/C$ über dem Kondensator ab, so liefert die elektronische Demodulation die Ausgangsspannung

$$U_a(t) = \frac{Q(t_0)}{C} \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right) + A'_r \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{s - t}{\tau}\right) U_s(s) \sin(\omega_r s + \varphi_r) ds \quad (\text{B.2})$$

Dabei ist $A'_r = A_r/V$ der zahlenmäßige Wert von A_r in Volt. Die Ausgangsspannung U_a wird als Demodulationssignal bezeichnet.

B.2 Synchrone Demodulation

Bei der synchronen Demodulation wird eine Stellgröße um einen Arbeitspunkt moduliert und eine von dieser Stellgröße abhängige Meßgröße liefert das Meßsignal U_s . Zur Demodulation wird eine Referenzquelle verwendet, deren Frequenz gleich der Modulationsfrequenz ist („Synchronisation“). Die Differenz der Phasen von Modulation um den Arbeitspunkt und Referenzschwingung ist dann zeitlich konstant. Bei sog. Lock-In-Verstärkern kann diese Phasendifferenz um einen konstanten Wert verschoben werden.

¹Statt Sinus-Schwingungen finden auch andere periodische Signale Verwendung. Diese spielen aber im Experiment keine Rolle.

B.2.1 Grundlagen

Gegeben sei ein Meßgröße U , die von einer Stellgröße x abhängt. Sei z. B. I offenes Intervall und

$$U: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{B.3})$$

stetig differenzierbar. Für einen festen Arbeitspunkt $x_0 \in I$ und eine Modulationsamplitude x_m mit $[x_0 - x_m, x_0 + x_m] \subset I$ wird nun die Stellgröße gemäß

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + x_m \sin(\omega_m t + \varphi_m) \quad (\text{B.4})$$

moduliert. Das Meßsignal U_s ist die Meßgröße in Abhängigkeit von der Zeit:

$$U_s(t) = U(x(t)) \quad (\text{B.5})$$

Die Referenzkreisfrequenz ω_r wird auf die Modulationskreisfrequenz ω_m stabilisiert ($\omega = \omega_r = \omega_m$, „Synchronisation“, z. B. mit einem „Phase Lock Loop“, PLL) und die Referenzphase um den Wert φ_0 verschoben. Aus (B.1) wird dann

$$U_r(t) = A_r \sin(\omega t + \varphi_r + \varphi_0) \quad (\text{B.6})$$

und (B.2) geht über in

$$\begin{aligned} U_a(t) &= \frac{Q(t_0)}{C} \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right) \\ &+ A'_r \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{s - t}{\tau}\right) U_s(s) \sin(\omega s + \varphi_r + \varphi_0) ds \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

B.2.2 Anwendungsbezogene Fragen

Die synchrone Demodulation ist in der Regelungstechnik von großer Bedeutung. Dies liegt daran, daß für das Demodulationssignal U_a bei geringer Modulationsamplitude x_m folgendes Ergebnis abgeleitet werden kann:

$$\begin{aligned} U_a(t) &= \frac{Q(t_0)}{C} \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right) + A'_r \left[1 - \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right)\right] \\ &\cdot \left[\frac{x_m}{2} \frac{dU(x_0)}{dx_0} \cos(\varphi_m - \varphi_r - \varphi_0) + O(x_m^2) \right] + R(t) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Dabei ist R ein „kleines“ Restsignal. Werden Restsignal und Terme von höherer als erster Ordnung in x_m vernachlässigt, so strebt das Ergebnis exponentiell mit Zeitkonstante τ gegen den zeitunabhängigen Wert

$$A'_r D_1(x_0) x_m = A'_r \frac{1}{2} \frac{dU(x_0)}{dx_0} \cos(\varphi_m - \varphi_r - \varphi_0) x_m \quad (\text{B.9})$$

Der Cosinus-Faktor kann über φ_0 eingestellt werden. Der Grenzwert ist also proportional zur Ableitung der Meßgröße nach der Stellgröße im Arbeitspunkt. Deswegen kann das Demodulationssignal als Fehlersignal zur Stabilisierung des Arbeitspunktes auf einen Wert x'_0 mit $dU(x'_0)/dx_0 = 0$ (Stabilisierungspunkt) genutzt werden (genauer siehe B.3). Das Ziel der folgenden Überlegungen geht weit über den Beweis der Darstellung (B.8) hinaus: Bei der Anwendung der synchronen Demodulation im Experiment stellt sich die Frage nach einer günstigen Wahl der vier einstellbaren Parameter x_m , ω_m , τ , φ_0 . Die Antwort liefert die Untersuchung und Optimierung folgender Eigenschaften:

1. *Signal-zu-Rausch-Verhältnis des Fehlersignals* in der Nähe des Stabilisierungspunktes.
2. *Dynamisches Verhalten des Fehlersignals* bei Driften und anderen Störungen des Arbeitspunktes.

Mit Blick auf (B.8) ist klar, daß φ_0 im Sinne eines möglichst guten Signal-zu-Rausch-Verhältnisses so zu wählen ist, daß der Cosinus-Term Eins wird. Über alle übrigen Parameter gestattet (B.8) keinerlei Aussage. Es konnte keine diesbezügliche Literatur gefunden werden. Daher wurde ein eigenes Verfahren zu Auswertung des Demodulationssignals entwickelt, das im folgenden vorgestellt wird. Den Ausgangspunkt dafür bildet statt der üblichen Taylor-Entwicklung nach der Modulationsamplitude eine Fourier-Entwicklung nach den Harmonischen der Modulationsfrequenz. Dieser Zugang offenbart auf sehr natürliche Weise, welchen qualitativen und quantitativen Einfluß die Parameter $x_m, \omega_m, \tau, \varphi_0$ auf das Demodulationssignal haben. Die gewonnenen Erkenntnisse beinhalten leicht umsetzbarer Regeln für die Anwendung und bilden die Grundlage für die Entwicklung der im Experiment verwandten Regler.

Vor der Auswertung des synchronen Demodulationssignals erklärt der folgende Abschnitt, wie es zur Stabilisierung genutzt werden kann.

B.3 Stabilisierung durch synchrone Demodulation

Sei ξ eine (zu stabilisierende) physikalische Größe, die über eine Stellgröße x gesteuert werden kann. Der genaue Zusammenhang zwischen x und ξ beinhaltet i. allg. viele weitere Parameter (z. B. Umgebungstemperatur, Druck, usw.). Der Durchstimmbarkeitsbereich von x sei ein Intervall I , und die Parameter seien zu einer Größe α zusammengefaßt, die in einem Bereich A liegt:

$$\xi = \xi(x; \alpha) \quad (x \in I; \alpha \in A) \quad (\text{B.10})$$

Die folgenden Voraussetzungen sind i. allg. erfüllt:

1. *Parameterunabhängigkeit des Stellsinns*: Das Vorzeichen der partiellen Ableitung $\partial\xi/\partial x$ ist parameterunabhängig:

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgn} \frac{\partial\xi(x; \alpha)}{\partial x} = \text{const} \quad (x \in I; \alpha \in A) \quad (\text{B.11})$$

2. *Existenz eines parameterunabhängigen Durchstimmbarkeitsbereiches*: Es gibt ein Intervall J für ξ , das für jeden Parametersatz bei Durchstimmung von x über I überstrichen wird.

Sei U eine Meßgröße, die Funktion von ξ ist, und als solche ein strenges lokales Extremum an einer Stelle $\xi_0 \in J$ hat. Dann gibt es nach den zwei Voraussetzungen für jeden Parametersatz $\alpha \in A$ genau ein $x = x(\alpha)$ mit $\xi_0 = \xi(x(\alpha); \alpha)$:

$$\xi(x; \alpha) = \xi_0 \iff x = x(\alpha) \quad (\text{B.12})$$

Für gegebenes α_0 gilt in einer Umgebung von $(x(\alpha_0); \alpha_0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} [U(\xi(x; \alpha))] = \frac{dU[\xi(x; \alpha)]}{d\xi} \cdot \frac{\partial\xi(x; \alpha)}{\partial x} = 0 \iff \xi(x; \alpha) = \xi_0 \quad (\text{B.13})$$

Die links stehende partielle Ableitung $\partial(U \circ \xi)/\partial x$ ist also (in dieser Umgebung) nach (B.13) und (B.12) genau dann Null, wenn die Stellgröße x den Wert hat, der $\xi = \xi_0$ liefert. Eine im wesentlichen zu $\partial(U \circ \xi)/\partial x$ proportionale Größe kann durch synchrone Demodulation erzeugt werden. Wird diese Größe mit einem unter Berücksichtigung von (B.11) gewählten Vorzeichen zurückgekoppelt (d. h. zur Stellgröße hinzuaddiert), kann ξ auf den Wert ξ_0 stabilisiert werden. Der Einfluß der Parameter α wird dadurch eliminiert. Die betrachteten physikalischen Größen x , ξ und synchrones Demodulationssignal lassen sich regelungstechnisch folgendermaßen einordnen:

Bezeichnung	Regelungstechnischer Begriff
x	Stellgröße
ξ	Regelgröße
Demodulationssignal	Regelabweichung

Tabelle B.1: Regelungstechnische Einordnung der physikalischen Größen bei der Stabilisierung durch synchrone Demodulation

B.4 Signalanalyse

Um das synchrone Demodulationssignal (B.7) auszuwerten, wird meist eine Taylor-Entwicklung des Meßsignals vorgenommen:

$$\begin{aligned} U_s(t) &= U(x_0 + x_m \sin(\omega t + \varphi_m)) \\ &= U(x_0) + x_m U'(x_0) \sin(\omega t + \varphi_m) + \delta(\omega t; x_m) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Daraus folgt sofort (B.8). Sehr viel weiter trägt dieser Beschreibungsansatz allerdings nicht. Um die für die Anwendung wesentlichen Fragen zu klären (siehe B.2) wird nun ein eigenes Verfahren zur Auswertung des synchronen Demodulationssignals entwickelt.

B.4.1 Signalanalyse durch Fourier-Zerlegung

Wird $V(x_0, x_m; \cdot): [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$V(x_0, x_m; \chi) \stackrel{\text{def}}{=} U(x_0 + x_m \chi) \quad (\chi \in [-1, 1]) \quad (\text{B.15})$$

definiert. Dann gilt:

$$U_s(t) = V(x_0, x_m; \sin(\omega t + \varphi_m)) \quad (\text{B.16})$$

Um U_a auszuwerten, wird davon Gebrauch gemacht, daß sich U_s als gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe darstellen läßt:

$$V(x_0, x_m; \sin(\omega s + \varphi_m)) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(x_0, x_m) e^{ik\omega s} \quad (\text{B.17})$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$c_k(x_0, x_m) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} V(x_0, x_m; \sin(\omega s + \varphi_m)) e^{-ik\omega s} ds \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{B.18})$$

Im folgenden werden die Abkürzungen

$$E(t) = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{B.19})$$

$$\varphi = \varphi_r + \varphi_0 \quad (\text{B.20})$$

verwandt und die Argumente x_0, x_m der Fourier-Koeffizienten weggelassen. Auf dieser Grundlage ergibt sich in diesem Abschnitt die

Feststellung B.1 (zur Signalanalyse bei konstantem Arbeitspunkt)

Bei konstantem Arbeitspunkt ($x_0 = \text{const}$) liefert die synchrone Demodulation das Signal

$$U_a(t) = \frac{Q(t_0)}{C} \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right) + \left[1 - \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right)\right] A'_r D(x_0, x_m) + R(t) \quad (\text{B.21})$$

mit

$$D(x_0, x_m) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} c_{-1} - e^{-i\varphi} c_{+1}) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \text{Im}(e^{i\varphi} c_{-1}) \quad (\text{B.22})$$

und

$$R(t) = A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{1 + ik\tau\omega} \cdot \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} c_{k-1} - e^{-i\varphi} c_{k+1}) \quad (\text{B.23})$$

$$\cdot [e^{ik\omega t} - E(t_0 - t) e^{ik\omega t_0}] \quad (\text{B.24})$$

Dabei ist $R(t)$ ein Restsignal, das bei Vernachlässigung exponentiell aussterbender Beiträge der Abschätzung

$$|R(t)| \leq \frac{\pi}{\tau\omega} \frac{A'_r}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + O\left[\left(\frac{\pi}{\tau\omega}\right)^2\right] \right\} \max_{x \in [x_0 - x_m, x_0 + x_m]} |U(x)| \quad (\text{B.25})$$

genügt und bei hinreichend großem $\tau\omega$ klein wird. Im wesentlichen strebt das Demodulationssignal dann exponentiell mit Zeitkonstante τ gegen $A'_r D(x_0, x_m)$. Für kleine Modulationsamplituden ergibt sich

$$D(x_0, x_m) = D_1(x_0)x_m + O(x_m^2) \quad (\text{B.26})$$

mit

$$D_1(x_0) = \left. \frac{\partial D(x_0, x_m)}{\partial x_m} \right|_{x_m=0} = \frac{1}{2} \frac{dU(x_0)}{dx_0} \cos(\varphi_m - \varphi) \quad (\text{B.27})$$

Zum Nachweis wird das Integral samt Vorfaktor in (B.7) mit Hilfe von (B.17) ausgewertet. Es ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} & \frac{A'_r}{\tau} E(t_0 - t) \int_{t_0}^t E(s - t_0) V(x_0, x_m; \sin(\omega s + \varphi_m)) \sin(\omega s + \varphi) ds \\ &= [1 - E(t_0 - t)] A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} c_{-1} - e^{-i\varphi} c_{+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$+ A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{1 + ik\tau\omega} \cdot \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} c_{k-1} - e^{-i\varphi} c_{k+1}) \quad (\text{B.29})$$

$$\cdot [e^{ik\omega t} - E(t_0 - t) e^{ik\omega t_0}] \quad (\text{B.30})$$

Zeile (B.28) strebt exponentiell mit Zeitkonstante τ gegen einen zeitunabhängigen Wert $A'_r D(x_0, x_m)$. Die Zeilen (B.29, B.30) sind $R(t)$. Damit ist (B.21) abgeleitet.

Die Abschätzung von R ergibt sich mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Das Ergebnis lautet:

$$|R(t)| \leq [1 + E(t_0 - t)] A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{1 + k^2 \tau^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.31})$$

Dabei ist [PBM86]

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{1 + k^2 \tau^2 \omega^2} &= \frac{\pi}{\tau\omega} \operatorname{coth} \left(\frac{\pi}{\tau\omega} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\tau\omega} \right)^2 + O \left[\left(\frac{\pi}{\tau\omega} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 &= \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |U(x_0 + x_m \sin(\omega s + \varphi_m))|^2 ds \\ &\leq \frac{2\pi}{\omega} \max_{x \in [x_0 - x_m, x_0 + x_m]} |U(x)|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Also insgesamt:

$$|R(t)| \leq \frac{\pi}{\tau\omega} [1 + E(t_0 - t)] \frac{A'_r}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + O \left[\left(\frac{\pi}{\tau\omega} \right)^2 \right] \right\} \max_{x \in [x_0 - x_m, x_0 + x_m]} |U(x)| \quad (\text{B.34})$$

und bei Vernachlässigung des exponentiell aussterbenden Bestandteils ergibt sich (B.25). Wichtig ist, daß R mit $\tau\omega \rightarrow \infty$ gleichmäßig in t gegen Null strebt. Daher wird R als Restsignal bezeichnet. Mit obiger Formel kann im Experiment für endliche Werte von $\tau\omega$ sofort eine Schranke für R angegeben werden, da der multiplikativ eingehende maximale Wert von $|U|$ über dem Modulationsintervall leicht zugänglich ist (Spannungsmessung am Signaleingang der synchronen Demodulation).

Im Grenzfall kleiner Modulationsamplituden ergibt sich für $D(x_0, x_m)$ ausgehend von der Definition der Fourier-Koeffizienten (B.18) und unter Verwendung

der Taylor-Entwicklung (B.14):

$$\begin{aligned}
D(x_0, x_m) &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} (e^{i\varphi} c_{-1}) \\
&= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} U(x_0 + x_m \sin(\omega s + \varphi_m)) \sin(\omega s + \varphi) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x_0 + x_m \sin(\alpha + \varphi_m)) \sin(\alpha + \varphi) d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} x_m \frac{dU(x_0)}{dx_0} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha + \varphi_m) \sin(\alpha + \varphi) d\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\alpha; x_m) \sin(\alpha + \varphi) d\alpha \\
&= \frac{x_m}{2} \frac{dU(x_0)}{dx_0} \cos(\varphi_m - \varphi) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\alpha; x_m) \sin(\alpha + \varphi) d\alpha \tag{B.35}
\end{aligned}$$

dabei ist $\delta(\alpha; x_m) = O(x_m^2)$, und zwar gleichmäßig im ersten Argument. Damit ist insbesondere das anfangs angekündigte Ergebnis (B.8) bestätigt.

B.4.2 Vorfilterung der synchronen Demodulation

Von großer Bedeutung für die Anwendung ist, daß das Fehlersignal vollständig in den Fourier-Koeffizienten c_{-1} und c_{+1} kodiert ist. Eine Abschwächung der übrigen Fourier-Koeffizienten c_k mit $|k| \neq 1$ beeinträchtigt daher nicht das Fehlersignal, sondern dämpft lediglich das Restsignal R . Eine solche Abschwächung kann durch Filterung des Meßsignals vor der Demodulation mit einem Bandpaß erreicht werden, dessen Durchlaßfrequenz auf die Modulationsfrequenz abgestimmt ist. Hochwertige Lock-In-Verstärker verfügen über einen solchen zuschaltbaren Bandpaßfilter, der seine Durchlaßfrequenz selbsttätig an die Modulationsfrequenz angleicht („auto-tracking bandpass-filter“, ATBF, Vorfilterung). Insbesondere bei Vorfilterung können die Fourier-Koeffizienten c_k mit $|k| \neq 1$ vernachlässigt und das Restsignal R durch folgende Näherung R_1 ersetzt werden:

$$R_1(t) = A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\varphi} c_1}{1 + i2\tau\omega} [e^{i2\omega t} - E(t_0 - t) e^{i2\omega t_0}] \right\} \tag{B.36}$$

Die entsprechende Näherung von U_a (B.21) wird mit $U_{a,1}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}
U_{a,1}(t) &= \frac{Q(t_0)}{C} E(t_0 - t) + [1 - E(t_0 - t)] A'_r D(x_0, x_m) \\
&\quad + A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\varphi} c_1}{1 + i2\tau\omega} [e^{i2\omega t} - E(t_0 - t) e^{i2\omega t_0}] \right\} \tag{B.37}
\end{aligned}$$

B.4.3 Arbeitspunktdriften

Für die Verwendung der synchronen Demodulation zur Stabilisierung stellt sich die Frage, wie das Fehlersignal auf eine zeitliche Änderungen des Arbeitspunktes ($x_0 = x_0(t)$) antwortet. Auf Grundlage der Ergebnisse aus B.4.1 und B.4.2 ergibt sich diesbezüglich die folgende

Feststellung B.2 (über den Einfluß von Arbeitspunktdriften)

Hängt der Arbeitspunkt $x_0 = x_0(t)$ stetig von der Zeit ab, so liefert die vorgefilterte synchrone Demodulation das Signal

$$\begin{aligned}
 U_{a,1}(t) &= \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) \frac{Q(t_0)}{C} \\
 &+ \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right) A'_r D(x_0(s), x_m) ds \\
 &+ \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right) A'_r \Delta(x_0(s), x_m; \varphi; s) ds
 \end{aligned} \tag{B.38}$$

mit

$$\Delta(x_0, x_m; s) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left[c_1(x_0, x_m) e^{i(2\omega s + \varphi)} \right] \tag{B.39}$$

($D(x_0, x_m)$ ist das in B.1 eingeführte Fehlersignal). Die ersten beiden Glieder der Taylor-Entwicklung von $U_{a,1}(t)$ für kleine Modulationsamplituden x_m lauten:

$$U_{a,1}(x_m = 0; t) = \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right) \frac{Q(t_0)}{C} \tag{B.40}$$

$$\frac{\partial U_{a,1}(x_m = 0; t)}{\partial x_m} = \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right) A'_r D_1(x(s); \varphi) ds \tag{B.41}$$

$$+ \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right) A'_r \Delta_1(x_0(s); \varphi; s) ds \tag{B.42}$$

mit

$$D_1(x_0; \varphi) = \frac{1}{2} \frac{dU(x_0)}{dx_0} \cos(\varphi_m - \varphi) \tag{B.43}$$

$$\Delta_1(x_0; \varphi; s) = -\frac{1}{2} \frac{dU(x_0)}{dx_0} \cos(2\omega s + \varphi_m + \varphi) \tag{B.44}$$

Dabei wird das Restsignal (B.42) stets klein sein, wenn die Arbeitspunktdrift so langsam ist, daß die durch sie verursachten Fourier-Komponenten bei der doppelten Modulationsfrequenz vernachlässigbar sind. Besonders offensichtlich ist dies, wenn das Restsignal für zweimal stetig differenzierbares U durch partielle Integration umgeformt wird. Bei Vernachlässigung exponentiell aussterbender

Beiträge besteht dann nämlich die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |(B.42)| &\leq \frac{A'_r}{2\sqrt{1+4\tau^2\omega^2}} \max_{s \in [t_0, t]} \left| \frac{dU(x_0(s))}{dx_0} \right| \\ &+ \frac{A'_r\tau}{2\sqrt{1+4\tau^2\omega^2}} \max_{s \in [t_0, t]} \left| \frac{d^2U(x_0(s))}{d^2x_0} \dot{x}_0(s) \right| \end{aligned} \quad (B.45)$$

Beim Nachweis dieser Feststellung zeigt sich die Überlegenheit der hier entwickelten Beschreibung der synchronen Demodulation. Dazu wird x_0 auf einem (beliebigen) Intervall $[t_0, t]$ durch eine Stufenfunktion (=stückweise konstante Funktion) angenähert. Für jede solche Näherung y gibt es ein $q \in \mathbb{N}$ und Punkte $t_0 < t_1 < \dots < t_{q-1} < t_q = t$ sowie Werte y_1, \dots, y_q mit

$$y(t) = \sum_{p=1}^q y_p \chi_{(t_{p-1}, t_p]} \quad (B.46)$$

(χ ist die charakteristische Funktion des im Index stehenden Intervalls.) Auf jedem Intervall, auf dem y konstant ist, können die Überlegungen aus den vorangegangenen Abschnitten angewandt werden. Sie dienen gewissermaßen als Verankerung einer vollständigen Induktion nach q . Aus (B.37) folgt mit (B.21) die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} U_{a,1}(t_p) &= E(t_{p-1} - t_p) U_{a,1}(t_{p-1}) \\ &+ [1 - E(t_{p-1} - t_p)] A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \{ e^{i\varphi} c_{-1}(y_p, x_m) \} \\ &+ A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\varphi} c_1(y_p, x_m)}{1 + i2\tau\omega} [e^{i2\omega t_p} - E(t_{p-1} - t_p) e^{i2\omega t_{p-1}}] \right\} \end{aligned} \quad (B.47)$$

Diese ermöglicht den Induktionsschritt auf dem Weg zur expliziten Darstellung von $U(t) = U(t_q)$. Mit der für $k \in \mathbb{Z}$ eingeführten Bezeichnung

$$F_k(s; t) \stackrel{\text{def}}{=} E(s - t) e^{ik\omega s} \quad (s \in \mathbb{R}) \quad (B.48)$$

lautet das Ergebnis:

$$\begin{aligned} U_{a,1}(t) &= E(t_0 - t) \frac{Q(t_0)}{C} \\ &+ \sum_{p=1}^q A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \{ e^{i\varphi} c_{-1}(y_p, x_m) \} [F_0(t_p; t) - F_0(t_{p-1}; t)] \\ &+ \sum_{p=1}^q A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\varphi} c_1(y_p, x_m)}{1 + i2\tau\omega} [F_2(t_p; t) - F_2(t_{p-1}; t)] \right\} \end{aligned} \quad (B.49)$$

Die Summen lassen sich als Riemann-Stieltjes-Integrale schreiben:

$$\begin{aligned} U_{a,1}(t) &= E(t_0 - t) \frac{Q(t_0)}{C} \\ &+ A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \int_{t_0}^t e^{i\varphi} c_{-1}(y(s), x_m) d_s F_0(s; t) \right\} \\ &+ A'_r \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \int_{t_0}^t \frac{e^{i\varphi} c_1(y(s), x_m)}{1 + i2\tau\omega} d_s F_2(s; t) \right\} \end{aligned} \quad (B.50)$$

Schließlich lassen sich die Riemann-Stieltjes-Integrale in gewöhnliche Riemann-Integrale umwandeln. Wegen

$$\frac{\partial F_k(s; t)}{\partial s} = \frac{1}{\tau} (1 + ik\tau\omega) F_k(s; t) \quad (\text{B.51})$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_{a,1}(t) &= E(t_0 - t) \frac{Q(t_0)}{C} \\ &+ \frac{A'_r}{\tau} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \int_{t_0}^t e^{i\varphi} c_{-1}(y(s), x_m) F_0(s; t) ds \right\} \\ &+ \frac{A'_r}{\tau} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \int_{t_0}^t e^{i\varphi} c_1(y(s), x_m) F_2(s; t) ds \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Hängt der Arbeitspunkt stetig von der Zeit ab, so ist die zugehörige Arbeitspunktfunktion x_0 auf $[t_0, t]$ gleichmäßiger Grenzwert einer Folge $\{y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen. Die Fourier-Koeffizienten (B.18) sind gleichmäßig stetig im Arbeitspunktparameter. Damit konvergiert insbesondere die Funktionenfamilie $\{c_{\pm 1}(y_j; x_m)\}_{j \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $c_{\pm 1}(x_0; x_m)$. Daher ist der Grenzübergang in obiger Formel gestattet, und es gilt:

$$\begin{aligned} U_{a,1}(t) &= E(t_0 - t) \frac{Q(t_0)}{C} \\ &+ \frac{A'_r}{\tau} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \int_{t_0}^t e^{i\varphi} c_{-1}(x_0(s), x_m) F_0(s; t) ds \right\} \\ &+ \frac{A'_r}{\tau} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \int_{t_0}^t e^{i\varphi} c_1(x_0(s), x_m) F_2(s; t) ds \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Nach Einsetzen von (B.48) ergibt sich die behauptete Darstellung von $U_{a,1}$.

Um das Restsignal (B.42) für zweimal stetig differenzierbares U abzuschätzen, wird es durch partielle Integration umgeformt. Das Ergebnis lautet:

$$-\frac{A'_r}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i(\varphi_m + \varphi)}}{1 + i2\tau\omega} \frac{dU(x_0(s))}{dx_0} \exp\left(\frac{s-t}{\tau} + i2\omega s\right) \right]_{s=t_0}^{s=t} \quad (\text{B.54})$$

$$+ \frac{A'_r}{2} \operatorname{Re} \int_{t_0}^t \frac{e^{i(\varphi_m + \varphi)}}{1 + i2\tau\omega} \frac{d^2U(x_0(s))}{d^2x_0} \dot{x}_0(s) \exp\left(\frac{s-t}{\tau} + i2\omega s\right) ds \quad (\text{B.55})$$

Bei Vernachlässigung der exponentiell aussterbenden Beiträge liefert die betragsmäßige Abschätzung dieser Terme:

$$|(\text{B.54})| \leq \frac{A'_r}{2\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}} \max_{s \in [t_0, t]} \left| \frac{dU(x_0(s))}{dx_0} \right| \quad (\text{B.56})$$

$$|(\text{B.55})| \leq \frac{A'_r\tau}{2\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}} \max_{s \in [t_0, t]} \left| \frac{d^2U(x_0(s))}{d^2x_0} \dot{x}_0(s) \right| \quad (\text{B.57})$$

Damit ist alles gezeigt.

B.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Eine modulierte Stellgröße x hat folgende allgemeine Gestalt:

$$x(t) = x_0(t) + x_m \sin(\omega t + \varphi_m) \quad (\text{B.58})$$

Dabei ist

$$x_0 \quad \text{der (i. allg. zeitabhängige) Arbeitspunkt,} \quad (\text{B.59})$$

$$x_m \quad \text{die Modulationsamplitude} \quad (\text{B.60})$$

$$\omega \quad \text{die Modulationsfrequenz} \quad (\text{B.61})$$

Eine von der Stellgröße x abhängige Meßgröße U liefert das Signal U_s :

$$U_s(t) = U(x(t)) = U(x_0(t) + x_m \sin(\omega t + \varphi_m)) \quad (\text{B.62})$$

Das Signal wird mit einer Zeitkonstante τ demoduliert. Die dabei verwandte Referenzschwingung U_r hat Amplitude A_r und dieselbe Frequenz ω wie die Modulation und ihre Phase kann um einen festen Wert φ_0 verschoben werden:

$$U_r(t) = A_r \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi_r) \quad (\text{B.63})$$

B.5.1 Synchrones Demodulationssignal

Die Eigenschaften des synchronen Demodulationssignals U_a lassen sich wie folgt zusammenfassen (Beginn der Demodulation zum Zeitpunkt t_0):

1. Bei statischem Arbeitspunkt $x_0(t) = x_0 = \text{const}$:

$$U_a(t) = \frac{Q(t_0)}{C} \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right) + \left[1 - \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right)\right] A_r' D(x_0, x_m) + R(t) \quad (\text{B.64})$$

Dabei ist

$$D(x_0, x_m) \quad \text{das Fehlersignal} \quad (\text{B.65})$$

$$R \quad \text{das Restsignal} \quad (\text{B.66})$$

- (a) Das Fehlersignal ist im Grenzfall kleiner Modulationsamplituden x_m proportional zur Ableitung des Meßsignals nach dem Arbeitspunkt:

$$D(x_0, x_m) = \frac{x_m}{2} \frac{dU(x_0)}{dx_0} \cos(\varphi_0 - \varphi) + O(x_m^2) \quad (\text{B.67})$$

Dabei ist φ_0 die einstellbare konstante Phasenverschiebung.

- (b) Für das Restsignal R gilt:

$$R(t) = \frac{1}{\tau\omega} \left\{ \text{const} + O\left[\left(\frac{1}{\tau\omega}\right)^2\right] \right\} \quad (\text{B.68})$$

und zwar gleichmäßig für alle Zeiten $t \geq t_0$. Deshalb sollte das Produkt aus Demodulationszeitkonstante τ und Modulationsfrequenz ω möglichst groß gewählt werden.

- (c) Die Vorfilterung des Meßsignals U_s durch Bandpaßfilter mit Durchlaßfrequenz ω ist empfehlenswert. Dadurch erfährt das Restsignal eine zusätzliche Unterdrückung, während das Fehlersignal unberührt bleibt.
2. Bei dynamischem Arbeitspunkt $x_0 = x_0(t)$ und Vorfilterung:
Das Demodulationssignal für dynamischen Arbeitspunkt geht aus dem statischen Fall hervor, indem das mit dem Arbeitspunkt driftende Fehler-signal $D(x_0(t), x_m)$ mit der Demodulationszeitkonstante τ tiefpaßgefiltert wird. Auch hier tritt wieder ein "kleines" Restsignal auf:

$$U_a(t) = \frac{Q(t_0)}{C} \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right) + \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{s - t}{\tau}\right) A'_r D(x_0(s), x_m) ds + R(t) \quad (\text{B.69})$$

- (a) Im Grenzfall kleiner Modulationsamplituden x_m kann die Näherung aus (1a) eingesetzt werden.
- (b) Das Restsignal R bleibt vernachlässigbar, solange $D(x(t), x_m)$ um 2ω vernachlässigbare Fourier-Komponenten besitzt. Für kleine Modulationsamplituden kann diese Bedingung in folgende anschauliche Form gebracht werden:

$$1 \ll 2\tau\omega \quad (\text{B.70})$$

$$\left| \frac{d^2 U(x_0(s))}{d^2 x_0} \dot{x}_0(s) \right| \ll 2\omega \left| \frac{dU(x(t))}{dx_0} \right| \quad (\text{B.71})$$

Ein Fehlersignal mit möglichst gutem Signal-zu-Rausch-Verhältnis wird demnach für möglichst hohes ω und möglichst großes $\omega\tau$ erreicht. In jedem Falle sollte ω hoch sein.

Anhang C

Streutheorie für zeitabhängige Störungen

Bei vielen Atomstrahlexperimenten wird ein quantenmechanisches System, das durch einen zeitunabhängigen Hamilton-Operator H in einem geeigneten Hilbert-Raum \mathbf{X} beschrieben wird, einer zusätzlichen zeitabhängigen Wechselwirkung ausgesetzt, die durch Addition eines zeitabhängigen Potential V_t zum Hamilton-Operator berücksichtigt werden kann. Damit gibt es eine wechselwirkungsfreie („freie“) und eine wechselwirkungsbehaftete („gestörte“) Bewegung. Die entsprechenden Bewegungsgleichungen (Schrödinger-Gleichungen) lauten:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi_t = H \phi_t \quad (\text{freie Bewegung}) \quad (\text{C.1})$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t = (H + V_t) \psi_t \quad (\text{gestörte Bewegung}) \quad (\text{C.2})$$

C.1 Streutheoretische Begriffsbildungen

Die Streutheorie untersucht die Frage, ob und wie die gestörte Bewegung zeitlich asymptotisch in die freie Bewegung übergeht. Damit benötigt sie die Existenz und Eindeutigkeit zeitlich unbegrenzt fortgesetzter Lösungen des Anfangswertproblems für die freie und die gestörte Bewegung. Der Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit führt i. allg. zur Definition von auf \mathbf{X} definierten (linearen) Zeitentwicklungsoperatoren. Diese lösen die folgenden Operatorgleichungen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_{t \leftarrow t_0}^{(\text{frei})} = H U_{t \leftarrow t_0}^{(\text{frei})} \quad (\text{freie Bewegung}) \quad (\text{C.3})$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_{t \leftarrow t_0} = (H + V_t) U_{t \leftarrow t_0} \quad (\text{gestörte Bewegung}) \quad (\text{C.4})$$

für alle Zeiten t und erfüllen die „Transportbedingung“

$$U_{t_3 \leftarrow t_2}^{(\text{frei})} U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(\text{frei})} = U_{t_3 \leftarrow t_1}^{(\text{frei})} \quad (\text{C.5})$$

$$U_{t_3 \leftarrow t_3} U_{t_2 \leftarrow t_1} = U_{t_3 \leftarrow t_1} \quad (\text{C.6})$$

für alle Zeiten t_1, t_2, t_3 .

C.1.1 Asymptotische Freiheit

Die gestörte Bewegung eines Zustandes ψ ist in Zukunft (Vergangenheit) asymptotisch frei, wenn es einen Zustand ϕ_+ (ϕ_-) gibt, so daß die *gestörte* Bewegung von ψ und die *freie* Bewegung von ϕ_+ (ϕ_-) für $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) ununterscheidbar werden. ϕ_+ (ϕ_-) heißt dann zu ψ passender auslaufender (einlaufender) Zustand.

Da Messungen durch Projektionsoperatoren dargestellt werden können, kann leicht eingesehen werden, daß ψ in Zukunft oder Vergangenheit asymptotisch frei ist, wenn

$$\exists \phi_+ : \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| U_{t \leftarrow 0}^{(\text{frei})} \phi_+ - U_{t \leftarrow 0} \psi \right| = 0 \quad (\text{C.7})$$

bzw.

$$\exists \phi_- : \lim_{t \rightarrow -\infty} \left| U_{t \leftarrow 0}^{(\text{frei})} \phi_- - U_{t \leftarrow 0} \psi \right| = 0 \quad (\text{C.8})$$

gilt. Dies sind die „asymptotischen Freiheitsrelationen“ für Zukunft und Vergangenheit. Sie bilden die Grundlage der quantenmechanischen Streutheorie.¹ An dieser Stelle ist es hilfreich einige Mengen einzuführen, nämlich die der in Zukunft (Vergangenheit) asymptotisch freien Zustände X_{\pm} und die der dazu passenden auslaufenden (einlaufenden) Zustände Φ_{\pm} . Aus den asymptotischen Freiheitsrelationen ergibt sich ohne weiteres:

$$X_{\pm} = \left\{ \psi; \exists \phi_{\pm} : \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left| U_{t \leftarrow 0}^{(\text{frei})} \phi_{\pm} - U_{t \leftarrow 0} \psi \right| = 0 \right\} \quad (\text{C.9})$$

$$\Phi_{\pm} = \left\{ \phi_{\pm}; \exists \psi : \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left| U_{t \leftarrow 0}^{(\text{frei})} \phi_{\pm} - U_{t \leftarrow 0} \psi \right| = 0 \right\} \quad (\text{C.10})$$

All diese Mengen bilden lineare Unterräume von X .

C.1.2 Møller-Wellenoperatoren

Falls die Zeitentwicklungsoperatoren unitär sind (nicht dissipative Bewegung), so sind X_{\pm} , Φ_{\pm} abgeschlossen. Ferner werden durch (C.10) Abbildungen

$$\Omega_{\pm} : \Phi_{\pm} \rightarrow X_{\pm} \quad (\text{C.11})$$

definiert, die den auslaufenden (einlaufenden) Zuständen diejenigen Zustände zuordnen, von denen sie asymptotisch ununterscheidbar sind:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left| U_{t \leftarrow 0}^{(\text{frei})} \phi_{\pm} - U_{t \leftarrow 0} \Omega_{\pm} \phi_{\pm} \right| = 0 \quad (\text{C.12})$$

Daraus ergibt sich sofort

$$\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} [U_{t \leftarrow 0}]^{-1} U_{t \leftarrow 0}^{(\text{frei})} \quad (\text{C.13})$$

Dies sind die sog. Møller-Wellenoperatoren. Sie sind linear und isometrisch. Ferner ist $P_{\pm} = \Omega_{\pm} \Omega_{\pm}^*$ die Projektion auf den Unterraum der in Zukunft (Vergangenheit) asymptotisch freien Zustände X_{\pm} . X_- wird treffender als Unterraum der präparierbaren Zustände bezeichnet (siehe C.1.3).

¹Es gibt abweichende Fassungen dieser Relationen [Pea88].

C.1.3 Asymptotische Vollständigkeit

Ein Streuexperiment besteht aus:

1. Präparation: Vorgabe der einlaufenden Zustände.
2. Detektion: Messung der auslaufenden Zustände.

Da für einen beliebigen Zustand ψ die gestörte Bewegung i. allg. nicht vollständig asymptotisch frei ist, wird die Statistik der Messung durch Projektion von ψ auf den Unterraum X_+ der in Zukunft asymptotisch freien Zustände bestimmt, also durch $\psi_+ = P_+\psi = \Omega_+\Omega_+^*\psi$. Bei vorgegebener Präparation $\phi_- \in \Phi_-$ ist $\psi = \Omega_-\phi_-$ und $\psi_+ = \Omega_+\Omega_+^*\Omega_-\phi_-$. Daraus läßt sich der zugehörige auslaufende Zustand ϕ_+ sofort ablesen:

$$\phi_+ = \Omega_+^*\Omega_-\phi_- \quad (\text{C.14})$$

Diese Zuordnung beinhaltet die vollständige Beschreibung des Streuexperimentes. Der auftretende Operator ist der S -Operator:

$$S: \Phi_- \rightarrow \Phi_+ \quad S = \Omega_+^*\Omega_- \quad (\text{C.15})$$

In einem Streuexperiment geht es um die Untersuchung der gestörten Bewegung. Streuexperimente, die in diesem Sinn geeignet sind, erfüllen die folgenden beiden Forderungen:

1. *Asymptotische Freiheit aller präparierbaren Zustände:* Wenn es präparierbare Zustände gibt, die in Zukunft nicht asymptotisch frei sind, so wird ein Teil der präparierten Wellenfunktion nicht in der Detektion erfaßt. Damit geht Information verloren.
2. *Präparierbarkeit aller in Zukunft asymptotisch freien Zustände:* Andernfalls kann nur ein Teil der Systems untersucht werden.

Erfüllt ein Streuexperiment diese beiden Forderungen, wird es *asymptotisch vollständig* genannt. Die Bedingungen können leicht formalisiert werden: (1) bedeutet $X_- \subset X_+$ und (2) bedeutet $X_+ \subset X_-$. Damit ist ein Streuexperiment genau dann asymptotisch vollständig, wenn $X_- = X_+$ ist. Es kann gezeigt werden, daß diese Bedingung gleichbedeutend ist mit der Unitarität von S . Damit ergibt sich zusammenfassend

$$\text{Asymptotische Vollständigkeit} \iff X_- = X_+ \iff S^{-1} = S^* \quad (\text{C.16})$$

Natürlich bezieht sich die asymptotische Vollständigkeit stets auf das theoretische Modell, das das Experiment beschreibt. Fehlende asymptotische Vollständigkeit kann daher Merkmal eines ungeeigneten Modells sein, sie kann allerdings auch im Vorgang selbst oder dem Experiment begründet liegen². Zusammenfassend kann daher folgendes festgestellt werden:

Die asymptotische Vollständigkeit zeichnet Streuvorgang, Experiment und theoretisches Modell als Einheit von besonderem physikalischen Wert aus.

²Würden z. B. im hier betrachteten Experiment schnell ionisierende Elektronen nicht detektiert (fehlende Kappenelektroden, siehe 5.4.2), so wäre das Experiment nicht mehr asymptotisch vollständig.

C.1.4 Überblick

Ziel dieses Anhangs ist der Beweis der asymptotischen Vollständigkeit für eine Klasse von Streuvorgängen mit zeitabhängigen Störungen. Auf dieser Grundlage läßt sich die asymptotische Vollständigkeit der in 4.1 entwickelten streutheoretischen Beschreibung von Atomstrahlexperimenten untersuchen. Besonders hervorzuheben ist das in Kapitel 4 erreichte Ergebnis, daß die Hauptbedingung für die asymptotische Vollständigkeit gleichbedeutend ist mit der Endlichkeit der effektiven Zeit, während der das System der Störung unterliegt (endliche „effektive Wechselwirkungszeit“).

Entsprechenden Untersuchungen konnten weder in der physikalischen noch in der mathematischen Literatur gefunden werden. Der Beweis der asymptotischen Vollständigkeit erfordert einen gewissen mathematischen Aufwand. Er beruht im wesentlichen auf der Lösung der gestörten Zeitentwicklung mit Hilfe der Dyson-Reihe im Dirac-Bild (=Wechselwirkungsbild). Dabei spielen Konvergenzbetrachtungen eine wesentliche Rolle. Sie führen zu dem Zusammenhang zwischen asymptotischer Vollständigkeit und endlicher effektiver Wechselwirkungszeit.

Der Beweis der asymptotischen Vollständigkeit wird in folgenden Schritten vollzogen:

1. Einführung der Dyson-Reihe im Hilbert-Raum zur Lösung von Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} u_t = A_t u_t \quad (\text{C.17})$$

mit beschränkter rechter Seite:

- (a) Entwicklung eines Operatoren-Kalküls
- (b) Konvergenz und Restgliedabschätzung der Dyson-Reihe
- (c) Wichtigste Eigenschaften der Dyson-Reihe

2. Lösung von Schrödinger-Gleichungen

$$i \frac{\partial}{\partial t} u_t = (H + A_t) u_t \quad (\text{C.18})$$

mit u. U. unbeschränktem selbstadjungierten H .

3. Streutheorie des Systems

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi_t = H \phi_t \quad (\text{freie Bewegung}) \quad (\text{C.19})$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_t = (H + V_t) \psi_t \quad (\text{gestörte Bewegung}) \quad (\text{C.20})$$

- (a) Darstellung des S -Operators
- (b) Beweis der asymptotischen Vollständigkeit
- (c) Angabe einer Störungsreihe für den S -Operator

Die mathematischen Betrachtungen werden mit einheitenlosen Größen durchgeführt. Das in der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung auftretende \hbar ist in der Definition von H , A_t absorbiert. Der Anhang D enthält die im folgenden verwandten Schreibweisen sowie einige mathematische Hilfsmittel.

C.2 Dyson-Reihe

C.2.1 Bewegungsgleichungen in Banach-Räumen

Sämtliche Ergebnisse dieses Abschnitts beruhen auf der folgenden

Voraussetzung C.2.1 Sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{K}, |\cdot|)$ B -Raum. Sei $K \subset \mathbb{R}$ nichtleeres kompaktes Intervall und $A \stackrel{\text{def}}{=} \{A_t\}_{t \in K} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{X})$ mit folgender Eigenschaft:

$$A\xi \in C(\mathbf{K}; \mathbf{X}) \quad (\xi \in X) \quad (\text{C.21})$$

(Schreibweise $A\xi$ siehe D.3.3) Zuerst liefert das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (z. B. [Yos80])

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in K} \|A_t\| < \infty \quad (\text{C.22})$$

Damit ergibt sich für $u \in C(\mathbf{K}; \mathbf{X})$ aus der für $t \in K$ $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $t + \varepsilon \in K$ gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} |A_{t+\varepsilon}u_{t+\varepsilon} - A_tu_t| &\leq |A_{t+\varepsilon}(u_{t+\varepsilon} - u_t)| + |(A_{t+\varepsilon} - A_t)u_t| \\ &\leq M|u_{t+\varepsilon} - u_t| + |(A_{t+\varepsilon} - A_t)u_t| \end{aligned}$$

auch

$$Au \in C(\mathbf{K}; \mathbf{X}) \quad (u \in C(\mathbf{K}; \mathbf{X})) \quad (\text{C.23})$$

Auf dieser Grundlage werden nun (homogene) Integraloperatoren eingeführt, die später die Summanden der Dyson-Reihe bilden werden.

Für $t_0 \in K$ wird durch

$$C(\mathbf{K}; \mathbf{X}) \ni u \mapsto I_{t_0}^{(A,1)}u \stackrel{\text{def}}{=} \left(K \ni t \mapsto \int_{t_0}^t A_s u_s ds \right) \quad (\text{C.24})$$

ein linearer Operator

$$I_{t_0}^{(A,1)} : C(\mathbf{K}; \mathbf{X}) \rightarrow C(\mathbf{K}; \mathbf{X}) \quad (\text{C.25})$$

definiert. Für die Werte der Bildfunktionen wird im folgenden die Schreibweise

$$I_{t \leftarrow t_0}^{(A,1)}u \stackrel{\text{def}}{=} \left[I_{t_0}^{(A,1)}u \right](t) \quad (\text{C.26})$$

verwandt. Entsprechend ist auch $I_{t \leftarrow t_0}^{(A,1)} : C(\mathbf{K}; \mathbf{X}) \rightarrow X$ linearer Operator. Die Mitführung der Operatorfamilienbezeichnung A wird von nun an unterlassen.

Die Verknüpfung der eben definierten Operatoren ist wegen (C.25) wohldefiniert und im folgenden Sinne assoziativ:

$$I_{t_3}^{(1)} \left[I_{t_2}^{(1)} I_{t_1}^{(1)} \right] = \left[I_{t_3}^{(1)} I_{t_2}^{(1)} \right] I_{t_1}^{(1)} \quad (t_1, t_2, t_3 \in K) \quad (\text{C.27})$$

Insbesondere ist durch

$$I_{t_0}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{id}, \quad I_{t_0}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} I_{t_0}^{(1)} I_{t_0}^{(n-1)} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (\text{C.28})$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ ein linearer Operator $I_{t_0}^{(n)} : C(\mathbf{K}; \mathbf{X}) \rightarrow C(\mathbf{K}; \mathbf{X})$ definiert. Für die Werte der Bildfunktionen wird wie im Falle $n = 1$ die Schreibweise

$$I_{t \leftarrow t_0}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \left[I_{t_0}^{(n)} u \right] (t) \quad (n \in \mathbb{N}; t \in K) \quad (\text{C.29})$$

verwandt. Entsprechend ist auch $I_{t \leftarrow t_0}^{(n)} : C(\mathbf{K}; \mathbf{X}) \rightarrow X$ linearer Operator.

Schließlich spiegeln sich die Eigenschaften des Integrals in folgender Additivitätsbeziehung wider:

$$I_{t_3 \leftarrow t_2}^{(1)} + I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(1)} = I_{t_3 \leftarrow t_1}^{(1)} \quad (t_1, t_2, t_3 \in K) \quad (\text{C.30})$$

Soweit die wichtigsten algebraischen Eigenschaften.

Unter Ausnutzung der gleichmäßigen Beschränktheit (C.22) läßt sich durch vollständige Induktion die für $n \in \mathbb{N}_0$ gültige Normabschätzungen

$$\left| I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(n)} u \right| \leq \frac{M^n}{n!} |t_2 - t_1|^n |u|_\infty \quad (t_1, t_2 \in K, u \in C(\mathbf{K}; \mathbf{X})) \quad (\text{C.31})$$

gewinnen. Diese ist für Definition und störungstheoretische Anwendung der Dyson-Reihe von grundlegender Bedeutung.

Die auf $C(\mathbf{K}; \mathbf{X})$ erklärten Operatoren werden nun vermöge der kanonischen isometrischen Einbettung von $(X, \mathbb{K}, |\cdot|)$ in $(C(\mathbf{K}; \mathbf{X}), \mathbb{K}, |\cdot|_\infty)$ auch auf $(X, \mathbb{K}, |\cdot|)$ definiert. Die aus (C.31) abgeleiteten Normabschätzungen liefern dann den zusammenfassenden

Hilfssatz C.2.1 (über die eingeführten Integraloperatoren)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t_0, t_1, t_2 \in K$ sind die Operatoren

$$I_{t_0}^{(n)} : (C(\mathbf{K}; \mathbf{X}), \mathbb{K}, |\cdot|_\infty) \rightarrow (C(\mathbf{K}; \mathbf{X}), \mathbb{K}, |\cdot|_\infty) \quad (\text{C.32})$$

$$I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(n)} : (C(\mathbf{K}; \mathbf{X}), \mathbb{K}, |\cdot|_\infty) \rightarrow (X, \mathbb{K}, |\cdot|) \quad (\text{C.33})$$

$$I_{t_0}^{(n)} : (X, \mathbb{K}, |\cdot|) \rightarrow (C(\mathbf{K}; \mathbf{X}), \mathbb{K}, |\cdot|_\infty) \quad (\text{C.34})$$

$$I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(n)} : (X, \mathbb{K}, |\cdot|) \rightarrow (X, \mathbb{K}, |\cdot|) \quad (\text{C.35})$$

linear und stetig, und sie genügen den folgenden Normabschätzungen:

$$\left| I_{t_0}^{(n)} u \right|_\infty \leq \frac{M^n}{n!} \sup_{t \in K} |t - t_0|^n |u|_\infty \quad (t_0 \in K; u \in C(\mathbf{K}; \mathbf{X})) \quad (\text{C.36})$$

$$\left| I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(n)} u \right| \leq \frac{M^n}{n!} |t_2 - t_1|^n |u|_\infty \quad (t_1, t_2 \in K; u \in C(\mathbf{K}; \mathbf{X})) \quad (\text{C.37})$$

$$\left| I_{t_0}^{(n)} \xi \right|_\infty \leq \frac{M^n}{n!} \sup_{t \in K} |t - t_0|^n |\xi| \quad (t_0 \in K; \xi \in X) \quad (\text{C.38})$$

$$\left| I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(n)} \xi \right| \leq \frac{M^n}{n!} |t_2 - t_1|^n |\xi| \quad (t_1, t_2 \in K; \xi \in X) \quad (\text{C.39})$$

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich die Dyson-Reihe einführen. Dies geschieht in folgendem

Hilfssatz C.2.2 (zur Einführung der Dyson-Reihe)

Unter der Voraussetzung C.2.1 gilt:

1. Für $t_0 \in K$ existiert als Grenzwert bezüglich der Operatornorm $\|\cdot\|_\infty$ von $L(\mathbf{C}(\mathbf{K}; \mathbf{X}); \mathbf{C}(\mathbf{K}; \mathbf{X}))$

$$U_{t_0}^{(A)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} I_{t_0}^{(A,m)} \quad (\text{C.40})$$

und es besteht für $n \in \mathbb{N}_0$ die Restgliedabschätzung

$$\left\| \sum_{m=n}^{\infty} I_{t_0}^{(A,m)} \right\|_\infty \leq \frac{M^n}{n!} \sup_{t \in K} (|t - t_0|^n e^{M|t-t_0|}) \quad (\text{C.41})$$

2. Für $t_1, t_2 \in K$ existiert als Grenzwert bezüglich der Operatornorm $\|\cdot\|$ von $L(\mathbf{X}; \mathbf{X})$

$$U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A,m)} \quad (\text{C.42})$$

und es besteht für $n \in \mathbb{N}_0$ die Restgliedabschätzung

$$\left\| \sum_{m=n}^{\infty} I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A,m)} \right\| \leq \frac{M^n}{n!} |t_2 - t_1|^n e^{M|t_2-t_1|} \quad (\text{C.43})$$

3. Es gilt für $\xi \in X$

$$\left[U_{t_0}^{(A)} \xi \right] (t) = U_{t \leftarrow t_0}^{(A)} \xi \quad (t_0, t \in K) \quad (\text{C.44})$$

4. Die zweiparametrische Operatorfamilie

$$\left\{ U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} \right\}_{(t_1, t_2) \in K \times K} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{X}) \quad (\text{C.45})$$

hat folgende Eigenschaften ($t_1, t_2, t_3, t \in K$):

$$U_{t_1 \leftarrow t_1}^{(A)} = \text{id} \quad (\text{C.46})$$

$$\left[U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} \right]^{-1} = U_{t_1 \leftarrow t_2}^{(A)} \quad (\text{C.47})$$

$$U_{t_3 \leftarrow t_2}^{(A)} U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} = U_{t_3 \leftarrow t_1}^{(A)} \quad (\text{C.48})$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \left\| U_{t_2 \leftarrow t}^{(A)} - U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} \right\| = 0 \quad (\text{C.49})$$

$$\lim_{t \rightarrow t_2} \left\| U_{t \leftarrow t_1}^{(A)} - U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} \right\| = 0 \quad (\text{C.50})$$

Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, wird die Mitführung der Operatorfamilienbezeichnung A unterlassen.

Beweis:

1. Die Abschätzung der Differenzen von zu (C.40), (C.42) gehörenden Partialsummen mit Hilfe von (C.36), (C.37) liefert mit dem Cauchy-Kriterium den Nachweis der Existenzbehauptungen und dann die Restgliedabschätzungen. (C.44) ergibt sich nun durch Grenzübergang. (C.46) ist klar.

2. (C.48): Für $n \in \mathbb{N}_0$ besteht die Darstellung (vollständige Induktion):

$$I_{t_2}^{(n-m)} I_{t_1}^{(m)} = \sum_{l=0}^m I_{t_2}^{(n-l)} I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(l)} \quad (m \in \{0, \dots, n\}) \quad (\text{C.51})$$

(Im Induktionsschritt wird $m < n$ angenommen und die linke Seite unter Anwendung von (C.27), (C.28) und (C.30) in

$$I_{t_2}^{(n-m-1)} \left[-I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(1)} + I_{t_1}^{(1)} \right] I_{t_1}^{(m)} \quad (\text{C.52})$$

zerlegt.) In (C.51) liefert dann die Wahl $m = n$ und Auswertung an der Stelle $t_3 \in K$:

$$I_{t_3 \leftarrow t_1}^{(n)} = \sum_{m=0}^n I_{t_3 \leftarrow t_2}^{(n-m)} I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(m)} \quad (\text{C.53})$$

Der Nachweis von (C.48) stützt sich nun auf die Beobachtung, daß die durch Einsetzen von (C.42) auf der linken Seite von (C.48) gewonnene Doppelsumme wegen (C.39) beliebig umgeordnet werden kann. Die Cauchy-Umordnung gestattet die Anwendung von (C.53) und liefert so das gewünschte Ergebnis.

3. (C.47) folgt nun aus (C.48) und (C.46).

4. Die Stetigkeit (C.49) folgt z. B. durch Anwendung von (C.48) und der Restgliedabschätzung (C.43):

$$\|U_{t_2 \leftarrow t} - U_{t_2 \leftarrow t_1}\| = \|U_{t_2 \leftarrow t}(\text{id} - U_{t \leftarrow t_1})\| \leq e^{M|t_2-t|} M |t - t_1| e^{M|t-t_1|} \quad (\text{C.54})$$

Entsprechend wird beim Nachweis von (C.50) verfahren.

Die Beschränkung auf kompakte Intervalle mag im Hinblick auf die Lösung von Differentialgleichungen hinderlich scheinen. Daß dies nicht der Fall ist, ergibt sich aus folgender

Bemerkung C.2.1 (über Bereichsunabhängigkeit)

Alle eingeführten Operatoren sind in folgendem Sinne von dem bei ihrer Definition zugrunde liegenden Kompaktum unabhängig: Sei $J \subset \mathbb{R}$ nichtleeres offenes Intervall, $t_0 \in J$ und gelte die Voraussetzung C.2.1 für J . Dann vererbt sich die Gültigkeit dieser Voraussetzung auf jedes kompakte Intervall K mit $K \subset J$. Seien K_1, K_2 nichtleere kompakte Intervalle mit $t_0 \in K_1 \subset K_2 \subset J$. Sei nun T_1 einer der auf $C(\mathbf{K}_1; \mathbf{X})$ erklärten Operatoren und T_2 der entsprechend auf $C(\mathbf{K}_2; \mathbf{X})$ erklärte Operator. Dann gilt mit der kanonischen Einbettung $\iota: C(\mathbf{K}_2; \mathbf{X}) \rightarrow C(\mathbf{K}_1; \mathbf{X})$ $\iota T_2 = T_1 \iota$. Infolgedessen lassen sich offene Intervalle durch Ausschöpfung mit kompakten Unterintervallen behandeln.

Nun kann das Hauptergebnis dieses Abschnitts bewiesen werden, nämlich der

Satz C.2.1 (über die Lösung des Anfangswertproblems)

Sei $J \subset \mathbb{R}$ nichtleeres offenes Intervall und $A \stackrel{\text{def}}{=} \{A_t\}_{t \in J} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{X})$ mit folgender Eigenschaft:

$$A\xi \in C(\mathbf{J}; \mathbf{X}) \quad (\xi \in X) \quad (\text{C.55})$$

Sei $t_0 \in J$ und $\xi \in X$. Dann sind für $u \in C(\mathbf{J}; \mathbf{X})$ die folgenden Aussagen äquivalent:

1. u ist stetig differenzierbar und löst das Anfangswertproblem

$$u' = Au, \quad u_{t_0} = \xi \quad (\text{C.56})$$

2. u genügt der Integralgleichung

$$u_t = \xi + \int_{t_0}^t A_s u_s ds \quad (t \in J) \quad (\text{C.57})$$

3. u ist durch die Dyson-Reihe gegeben

$$u = U_{t_0}^{(A)} \xi \quad (\text{C.58})$$

Beim Beweis werden sich ferner zwei wichtige Folgerungen ergeben:

Folgerung C.2.1 (über Integralgleichung für die Dyson-Reihe)

Sei $K \subset \mathbb{R}$ nichtleeres kompaktes Intervall und $A \stackrel{\text{def}}{=} \{A_t\}_{t \in K} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{X})$ mit folgender Eigenschaft:

$$A\xi \in C(\mathbf{K}; \mathbf{X}) \quad (\xi \in X) \quad (\text{C.59})$$

Dann gilt für $t_1, t_2 \in K$ und $\xi \in X$

$$U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} \xi = \xi + \int_{t_1}^{t_2} A_s U_{s \leftarrow t_1}^{(A)} \xi ds = \xi + \int_{t_1}^{t_2} U_{t_2 \leftarrow s}^{(A)} A_s \xi ds \quad (\text{C.60})$$

Folgerung C.2.2 (über Differentialgleichung für die Dyson-Reihe)

Sei $J \subset \mathbb{R}$ nichtleeres offenes Intervall und $A \stackrel{\text{def}}{=} \{A_t\}_{t \in J} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{X})$ mit folgender Eigenschaft:

$$A\xi \in C(\mathbf{J}; \mathbf{X}) \quad (\xi \in X) \quad (\text{C.61})$$

Dann ist für $\xi \in X$ $J \times J \ni (t_2, t_1) \mapsto U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} \xi$ stark partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitung sind stark stetig und lauten:

$$\frac{\partial U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} \xi}{\partial (t_2, t_1)} = \left(A_{t_2} U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} \xi, -U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} A_{t_1} \xi \right) \quad (t_2, t_1 \in J) \quad (\text{C.62})$$

Beweis:

1. (1) \Leftrightarrow (2) folgt aus den Eigenschaften des Riemann-Integrals (siehe D.4.1)

2. (2) \Leftrightarrow (3): Wegen Bemerkung C.2.1 genügt es zu zeigen, daß die Äquivalenz für jedes kompakte Intervall K mit $t_0 \in K \subset J$ gilt. Sei also K ein solches Intervall, und mögen sich sämtliche Bezeichnungen im folgenden auf K beziehen. (Damit gelten die Voraussetzungen von Folgerung C.2.1.)

(2) \Rightarrow (3): Aus (C.57) folgt $u = \xi + I_{t_0}^{(1)} u$, also auch für $n \in \mathbb{N}$ (vollständige Induktion) $u = \sum_{m=0}^n I_{t_0}^{(m)} \xi + I_{t_0}^{(n+1)} u$ und damit unter Verwendung von Hilfssatz C.2.2 und (C.36):

$$|u - U_{t_0} \xi|_\infty \leq \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} I_{t_0}^{(m)} \xi \right|_\infty + \left| I_{t_0}^{(n+1)} u \right|_\infty \xrightarrow[\text{(C.36)}]{\text{HS C.2.2}} 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{C.63})$$

(3) \Rightarrow (2): Aus (C.58) folgt

$$\begin{aligned} I_{t_0}^{(1)} u &= I_{t_0}^{(1)} U_{t_0} \xi \stackrel{\text{HS C.2.2}}{\stackrel{\text{HS C.2.1}}{=}} \sum_{m=0}^{\infty} I_{t_0}^{(1)} I_{t_0}^{(m)} \xi \stackrel{\text{(C.28)}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} I_{t_0}^{(m+1)} \xi \\ &\stackrel{\text{HS C.2.2}}{=} U_{t_0} \xi - \xi = u - \xi \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

3. Folgerung C.2.2: Durch Einsetzen von (C.58) in (C.56) folgt mit der Wahl $t_0 \stackrel{\text{def}}{=} t_1$ die Existenz und Darstellung der partiellen Ableitung nach t_2 . Da für $t_1, t_2 \in J$ und $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $t_1 + \varepsilon \in J$ die Darstellung

$$\frac{1}{\varepsilon} (U_{t_2 \leftarrow t_1 + \varepsilon} - U_{t_2 \leftarrow t_1}) \xi = -U_{t_2 \leftarrow t_1 + \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} (U_{t_1 + \varepsilon \leftarrow t_1} - \text{id}) \xi \quad (\text{C.65})$$

besteht, ergibt sich auch die Existenz und Gestalt der partiellen Ableitung nach t_1 . Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen folgt aus (C.23) sowie (C.49) und (C.50).

4. Folgerung C.2.1: Für t_1, t_2 aus dem offenen Kern von K folgen die behaupteten Darstellungen aus Folgerung C.2.2 mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung D.4.1. Falls unter t_1, t_2 Randpunkte von K sein sollten, folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

C.2.2 Bewegungsgleichungen in Hilbert-Räumen

Da jeder Hilbert-Raum ein Banach-Raum ist, übertragen sich sämtliche Ergebnisse aus C.2.1. In Hilbert-Räumen gibt es die Begriffsbildung der Unitarität eines Operators. Falls die Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Systems durch unitäre Operatoren vermittelt wird, ist das System nicht dissipativ. Die folgende Darstellung für den zum Dyson-Operator adjungierten Operator gestattet später den Schluß, daß die betrachteten zeitlich nicht homogenen quantenmechanischen Systeme nicht dissipativ sind.

Hilfssatz C.2.3 (über Adjunktion)

Sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{C}, (\cdot, \cdot))$ komplexer H -Raum. Sei $J \subset \mathbb{R}$ nichtleeres offenes Intervall und $A \stackrel{\text{def}}{=} \{A_t\}_{t \in J} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{X})$ mit folgenden Eigenschaften:

$$A\xi, A^*\xi \in C(\mathbf{J}; \mathbf{X}) \quad (\xi \in X) \quad (\text{C.66})$$

Dann gilt mit der Bezeichnung $-A^* \stackrel{\text{def}}{=} \{-A_t^*\}_{t \in J}$

$$\left[U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(A)} \right]^* = U_{t_1 \leftarrow t_2}^{(-A^*)} \quad (t_1, t_2 \in J) \quad (\text{C.67})$$

Beweis: Sei $t_0 \in J$. Sei $V_t \stackrel{\text{def}}{=} \left[U_{t \leftarrow t_0}^{(A)} \right]^* U_{t \leftarrow t_0}^{(-A^*)}$ ($t \in J$).

1. Nachweis von $V_t = \text{id}$ ($t \in J$): Seien $\xi, \zeta \in X$. Dann gilt für $t \in J$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V_t \xi, \zeta) &= \frac{d}{dt} \left(U_{t \leftarrow t_0}^{(-A^*)} \xi, U_{t \leftarrow t_0}^{(A)} \zeta \right) \\ &\stackrel{\text{S C.2.1}}{=} - \left(A^* U_{t \leftarrow t_0}^{(-A^*)} \xi, U_{t \leftarrow t_0}^{(A)} \zeta \right) + \left(U_{t \leftarrow t_0}^{(-A^*)} \xi, A U_{t \leftarrow t_0}^{(A)} \zeta \right) = 0 \end{aligned}$$

Also $(V_t \xi, \zeta) = (V_{t_0} \xi, \zeta) = (\xi, \zeta)$ ($t \in J; \xi, \zeta \in X$).

2. Mit

$$\left[U_{t_0 \leftarrow t}^{(A)} \right]^* \stackrel{(C.47)}{=} \left\{ \left[U_{t \leftarrow t_0}^{(A)} \right]^* \right\}^{-1} V_t = U_{t \leftarrow t_0}^{(-A^*)}$$

folgt die Behauptung.

Daraus ergibt sich die mit Blick auf die Schrödinger-Gleichung wichtige

Folgerung C.2.3 Sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{C}, (\cdot, \cdot))$ komplexer H -Raum. Sei $J \subset \mathbb{R}$ nicht-leeres offenes Intervall und $A \stackrel{\text{def}}{=} \{A_t\}_{t \in J} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{X})$ eine Familie symmetrischer Operatoren mit der Eigenschaft

$$A\xi \in C(\mathbf{J}; \mathbf{X}) \quad (\xi \in X) \quad (C.68)$$

Dann gilt mit der Bezeichnung $-iA \stackrel{\text{def}}{=} \{-iA_t\}_{t \in J}$

$$U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(-iA)} \text{ ist unitär für } (t_1, t_2 \in J) \quad (C.69)$$

C.3 Schrödinger-Gleichungen

C.3.1 Schrödinger- und Dirac-Bild

Sei $(X, \mathbb{C}, (\cdot, \cdot))$ H -Raum eines zeitlich homogenen und zeitlich isotropen nicht dissipativen quantenmechanischen Systems und H sein Hamilton-Operator. Die zugehörige Gruppe von Zeitentwicklungsoperatoren $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ mit

$$U_t = e^{-iHt} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (C.70)$$

vermittelt dann gemäß

$$\left\{ \widetilde{u}_t \right\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \{U_{-t}u_t\}_{t \in \mathbb{R}} \quad (\{u_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset X) \quad (C.71)$$

eine Bijektion $\smile: X^{\mathbb{R}} \rightarrow X^{\mathbb{R}}$ auf der Menge der durch die Zeit parametrisierten Wege in X . Die Umkehrabbildung wird mit aufgesetztem \smile bezeichnet. Weiter wird mit derselben Bezeichnung gemäß

$$\left\{ \widetilde{A}_t \right\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \{U_{-t}A_tU_t\}_{t \in \mathbb{R}} \quad (\{A_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{X})) \quad (C.72)$$

eine Bijektion $\smile: L(\mathbf{X}; \mathbf{X})^{\mathbb{R}} \rightarrow L(\mathbf{X}; \mathbf{X})^{\mathbb{R}}$ eingeführt und die entsprechende Umkehrabbildung ebenfalls mit aufgesetztem \smile bezeichnet. Bei der semiklassischen Beschreibung von Licht-Materie-Wechselwirkungen verfügen die betrachteten quantenmechanischen Systeme i. allg. nicht mehr über die oben genannten zeitlichen Symmetrien, was zu Schrödinger-Gleichungen mit zeitabhängigen Hamilton-Operatoren führt. Wenn die die zeitliche Symmetrie brechende Wechselwirkung durch Addition eines zeitabhängigen Potentials A_t beschrieben werden kann, nimmt die Schrödinger-Gleichung die folgende Gestalt an:

$$iu'_t = (H + A_t)u_t \quad (C.73)$$

In diesem Falle sind die eingeführten Abbildungen ein mächtiges Werkzeug zur Lösung der Schrödinger-Gleichung, dessen Gebrauch mit folgenden Begriffsbildungen verbunden ist: Die Gleichung (C.73) wird als Schrödinger-Gleichung

„im Schrödinger-Bild“ bezeichnet, die Abbildung \smile vermittelt den Übergang vom Schrödinger- ins „Dirac-Bild“, und die Abbildung \frown den vom Dirac- ins Schrödinger-Bild. Statt Dirac-Bild wird auch der Begriff Wechselwirkungsbild gebraucht. Wesentlich ist der folgende leicht nachzuprüfende

Hilfssatz C.3.1 (über die Schrödinger-Gleichung im Dirac-Bild)

Sei $\mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} (X, \mathbb{C}, (\cdot, \cdot))$ H -Raum, $H: X \supset \text{dom}(H) \rightarrow X$ selbstadjungierter Operator und $\{A_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{X})$. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \text{dom}(H)$. Dann sind für $u \stackrel{\text{def}}{=} \{u_t\}_{t \in \mathbb{R}} \in X$ die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $u \subset \text{dom}(H)$ ist stark differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems im Schrödinger-Bild:

$$iu'_t = (H + A_t)u_t \quad (t \in \mathbb{R}); \quad u_{t_0} = \xi \quad (\text{C.74})$$

2. $\widetilde{u} \subset \text{dom}(H)$ ist stark differenzierbare Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$i\widetilde{u}'_t = \widetilde{A}_t \widetilde{u}_t \quad (t \in \mathbb{R}); \quad \widetilde{u}_{t_0} = e^{iHt_0} \xi \quad (\text{C.75})$$

Dieses Anfangswertproblem wird auch als Anfangswertproblem im Dirac-Bild bezeichnet.

Die Bedeutung dieser Feststellung beruht darauf, daß im Schrödinger-Bild auf der rechten Seite i. allg. unbeschränkte Operatoren stehen, während diese im Dirac-Bild beschränkt sind. Damit erfüllt die Schrödinger-Gleichung im Dirac-Bild eine Grundvoraussetzung für die Anwendung der bisher entwickelten Theorie der Dyson-Reihe. Daher auch die Bezeichnung „ \smile “ für den Übergang in das Dirac-Bild: Das Ergebnis veranlaßt viel eher zu einem Lächeln als die Schrödinger-Gleichung im Schrödinger-Bild. Allerdings lösen sich die mit einem unbeschränkten H verbundenen Schwierigkeiten bei Übergang in das Dirac-Bild nicht gänzlich in Wohlgefallen auf. Sie sind jetzt in der Bedingung $\widetilde{u} \subset \text{dom}(H)$ enthalten.³ Eine z. B. durch die Dyson-Reihe gegebene Lösung des Anfangswertproblems darf also nicht aus $\text{dom}(H)$ herausführen.

C.3.2 Lösung der Schrödinger-Gleichung

Satz C.3.1 Sei $\mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} (X, \mathbb{C}, (\cdot, \cdot))$ H -Raum und $H: X \supset \text{dom}(H) \rightarrow X$ selbstadjungierter Operator. Sei $A \stackrel{\text{def}}{=} \{A_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{X})$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Stetige Abhängigkeit von A :

$$(\mathbb{R} \ni t \rightarrow A_t \xi) \in C(\mathbb{R}; \mathbf{X}) \quad (\xi \in X) \quad (\text{C.76})$$

2. Wohldefiniertheit, H -Beschränktheit und stetige Abhängigkeit der Kommutatoren $\{[H, A_t]\}_{t \in \mathbb{R}}$:

(a) Für $t \in \mathbb{R}$ ist der Kommutator $[H, A_t]$ auf $\text{dom}(H)$ definiert:

$$\text{dom}([H, A_t]) = \text{dom}(H) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{C.77})$$

³Nach dem Satz von Hellinger-Toeplitz ist für selbstadjungiertes H die Unbeschränktheit von H gleichbedeutend mit $\text{dom}(H) \neq X$.

(b) Für $t \in \mathbb{R}$ gibt es $a, b \in (0, \infty)$ mit

$$|[H, A_t] \xi| \leq a |\xi| + b |H\xi| \quad (\xi \in \text{dom}(H)) \quad (\text{C.78})$$

(c) Die Kommutatoren hängen in folgendem Sinne stetig von ihrem Index ab:

$$(\mathbb{R} \ni t \rightarrow [H, A_t] \xi) \in C(\mathbb{R}; \mathbf{X}) \quad (\xi \in \text{dom}(H)) \quad (\text{C.79})$$

Dann erfüllt $-i\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ -i\widetilde{A}_t \right\}_{t \in \mathbb{R}}$ die Voraussetzungen von Satz C.2.1 und für $t_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \text{dom}(H)$ ist $\{u_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ mit

$$u_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-iHt} U_{t \leftarrow t_0}^{(-i\widetilde{A})} e^{iHt_0} \xi \quad (\text{C.80})$$

stark differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems im Schrödinger-Bild

$$i u_t' = (H + A_t) u_t \quad (t \in \mathbb{R}); \quad u_{t_0} = \xi \quad (\text{C.81})$$

Sei

$$\widetilde{U}_{t_2 \leftarrow t_1}^{(H+A)} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-iHt_2} U_{t_2 \leftarrow t_1}^{(-i\widetilde{A})} e^{iHt_1} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}) \quad (\text{C.82})$$

Dann ist nach (C.80) $\left\{ \widetilde{U}_{t_2 \leftarrow t_1}^{(H+A)} \right\}_{(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ die zweiparametrische Schar der Zeitentwicklungsoperatoren. Sie hat folgende Eigenschaften ($t_1, t_2, t_3, t \in \mathbb{R}$):

$$\widetilde{U}_{t_1 \leftarrow t_1}^{(H+A)} = \text{id} \quad (\text{C.83})$$

$$\left[\widetilde{U}_{t_2 \leftarrow t_1}^{(H+A)} \right]^{-1} = \widetilde{U}_{t_1 \leftarrow t_2}^{(H+A)} \quad (\text{C.84})$$

$$\left[\widetilde{U}_{t_2 \leftarrow t_1}^{(H+A)} \right]^* = \widetilde{U}_{t_1 \leftarrow t_2}^{(H+A^*)} \quad (\text{C.85})$$

$$\widetilde{U}_{t_3 \leftarrow t_2}^{(H+A)} \widetilde{U}_{t_2 \leftarrow t_1}^{(H+A)} = \widetilde{U}_{t_3 \leftarrow t_1}^{(H+A)} \quad (\text{C.86})$$

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow t_2} \widetilde{U}_{t \leftarrow t_1}^{(H+A)} = \widetilde{U}_{t_2 \leftarrow t_1}^{(H+A)} \quad (\text{C.87})$$

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow t_1} \widetilde{U}_{t_2 \leftarrow t}^{(H+A)} = \widetilde{U}_{t_2 \leftarrow t_1}^{(H+A)} \quad (\text{C.88})$$

Beweis: Daß $-i\widetilde{A}$ die Voraussetzungen von Satz C.2.1 erfüllt, folgt aus (C.23) und den Eigenschaften der von H erzeugten unitären Gruppe von Zeitentwicklungsoperatoren. Sei \widetilde{u} die stark differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems im Dirac-Bild

$$i \widetilde{u}_t' = \widetilde{A}_t \widetilde{u}_t \quad (t \in \mathbb{R}); \quad \widetilde{u}_{t_0} = e^{iHt_0} \xi \quad (\text{C.89})$$

Dann ist

$$\widetilde{u}_t = U_{t \leftarrow t_0} e^{iHt_0} \xi \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{C.90})$$

Es genügt daher, für $t_1 \in \mathbb{R}$ $U_{t_1 \leftarrow t_0} \text{dom}(H) \subset \text{dom}(H)$ nachzuweisen, um mit Hilfssatz C.3.1 die Behauptung zu folgern. Dazu zunächst einige begriffliche Vorbereitungen. Sei $Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{graph}(H) = \{(u, Hu); u \in \text{dom}(H)\}$.⁴ Dann wird Y

⁴Hier wie im folgenden bezeichnet (\cdot, \cdot) ein Paar und kein Skalarprodukt.

in kanonischer Weise zu einem B-Raum, wenn die linearen Operationen durch $(X \oplus X, \mathbb{C})$ induziert und Y durch die sog. Graphennorm $|\cdot|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$|(u, Hu)|_Y \stackrel{\text{def}}{=} |u| + |Hu| \quad (u \in \text{dom}(H)) \quad (\text{C.91})$$

topologisiert wird. Seien für $t \in \mathbb{R}$ $B_t, V_t, C_t : Y \rightarrow Y$ gemäß

$$B_t(u, Hu) \stackrel{\text{def}}{=} -i(A_t u, H A_t u) \quad (u \in \text{dom}(H)) \quad (\text{C.92})$$

$$V_t(u, Hu) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{-iHt} u, H e^{-iHt} u) \quad (u \in \text{dom}(H)) \quad (\text{C.93})$$

$$C_t \stackrel{\text{def}}{=} V_{-t} B_t V_t \quad (\text{C.94})$$

definiert. (Für $t \in \mathbb{R}$ ist $H A_t = [H, A_t] + A_t H$ auf $\text{dom}(H)$ definiert.) Dann ist $B \stackrel{\text{def}}{=} \{B_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset L(\mathbf{Y}; \mathbf{Y})$. (Die Linearität folgt durch Einsetzen und die Beschränktheit mit (2b).) Wegen $V \stackrel{\text{def}}{=} \{V_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset L(\mathbf{Y}; \mathbf{Y})$ ist auch $C \stackrel{\text{def}}{=} \{C_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset L(\mathbf{Y}; \mathbf{Y})$. Sei nun $t_1 \in \mathbb{R}$. Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall mit $\{t_0, t_1\} \subset K$. Dann gilt zunächst:

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in K} \|B_t\|_Y = \sup_{t \in K} \|C_t\|_Y < \infty \quad (\text{C.95})$$

Zum Nachweis genügt es, mit Hilfe von (1) und (2c)

$$(K \ni t \mapsto B_t y) \in C(\mathbf{K}; \mathbf{Y}) \quad (y \in Y) \quad (\text{C.96})$$

zu folgern. Denn dann ergibt sich $N \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in K} \|B_t\|_Y < \infty$ aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Mit der Isometrie von V folgt dann auch

$$(K \ni t \mapsto C_t y) \in C(\mathbf{K}; \mathbf{Y}) \quad (y \in Y) \quad (\text{C.97})$$

und $\sup_{t \in K} \|C_t\|_Y = N$. Daraus folgt wie bei (C.23)

$$\{y_t\}_{t \in K} \in C(\mathbf{K}; \mathbf{Y}) \Rightarrow (K \ni t \mapsto C_t y_t) \in C(\mathbf{K}; \mathbf{Y}) \quad (\text{C.98})$$

Insbesondere existiert für $\{y_t\}_{t \in K} \in C(\mathbf{K}; \mathbf{Y})$ die Stammfunktion

$$K \ni t \mapsto \int_{t_0}^t C_s y_s ds = \int_{t_0}^t -i \left(\widetilde{A}_s y_s, H \widetilde{A}_s y_s \right) ds \quad (\text{C.99})$$

und diese ist wiederum stetig. Sei nun $\zeta \in \text{dom}(H)$. Dann wird durch

$$y^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} (\zeta, H\zeta), \quad y_t^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^t C_s y_s^{(n-1)} ds \quad (n \in \mathbb{N}; t \in K) \quad (\text{C.100})$$

eine Funktionenfolge $\{y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset C(\mathbf{K}; \mathbf{Y})$ definiert, und es gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in K$ (vollständige Induktion):

$$y_t^{(n)} = \left(I_{t \leftarrow t_0}^{(-i\widetilde{A}, n)} \zeta, H I_{t \leftarrow t_0}^{(-i\widetilde{A}, n)} \zeta \right) = -i \int_{t_0}^t \left(\widetilde{A}_s I_{s \leftarrow t_0}^{(-i\widetilde{A}, n-1)} \zeta, H \widetilde{A}_s I_{s \leftarrow t_0}^{(-i\widetilde{A}, n-1)} \zeta \right) ds \quad (\text{C.101})$$

Für den Abschluß des Beweises genügt es daher, für $t \in K$ die Absolutkonvergenz $\sum_{n=0}^{\infty} |y_t^{(n)}|_Y < \infty$ zu zeigen. Diese ergibt sich aus der für $n \in \mathbb{N}_0$ gültigen Abschätzung

$$\left| y_t^{(n)} \right|_Y \leq \frac{N^n}{n!} |t - t_0|^n |\zeta|_Y \quad (t \in K) \quad (\text{C.102})$$

die mit vollständiger Induktion aus (C.100) und (C.95) abgeleitet wird.

C.4 Streutheorie für zeitabhängige Potentiale

Satz C.4.1 (über asymptotische Vollständigkeit)

Werden die Voraussetzungen von Satz C.3.1 um die folgenden Anforderungen ergänzt:

1. Symmetrie der Störpotentiale:

$$A_t \text{ ist symmetrisch für } (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{C.103})$$

2. Zeitliche Asymptotik der Störpotentiale: Es gibt eine meßbare Funktion $M: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\|A_t\| \leq M(t) \text{ ffa } t \in \mathbb{R}, \quad (\text{C.104})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(t) dt < \infty. \quad (\text{C.105})$$

Dann existieren die Møller-Wellenoperatoren Ω_{\pm} sogar als Grenzwerte bezüglich der Operatornorm $\|\cdot\|$

$$\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left[\tilde{U}_{t \leftarrow 0}^{(H+A)} \right]^{-1} e^{-iHt} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_{0 \leftarrow t}^{(-i\tilde{A})} \quad (\text{C.106})$$

und für den S -Operator $S = \Omega_{+}^* \Omega_{-}$ gilt ebenfalls bezüglich der Operatornorm:

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} U_{t \leftarrow -t}^{(-i\tilde{A})} \quad (\text{C.107})$$

S ist unitär, und damit das Streuproblem asymptotisch vollständig.

Beweis: Sei

$$\Omega_{\pm, t} \stackrel{\text{def}}{=} U_{0 \leftarrow \pm t}^{(-i\tilde{A})} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{C.108})$$

Dann gilt wegen Folgerung C.2.1 für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\|\Omega_{\pm, t_2}^* - \Omega_{\pm, t_1}^*\| = \|\Omega_{\pm, t_2} - \Omega_{\pm, t_1}\| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} M(t) dt \right| \quad (\text{C.109})$$

Damit existieren als Grenzwert bezüglich der Operatornorm

$$\Omega_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_{\pm, t} \quad (\text{C.110})$$

$$\Omega_{\pm}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_{\pm, t}^* \quad (\text{C.111})$$

Daraus folgen mit der Unitarität von $\Omega_{\pm, t}$ für $t \in \mathbb{R}$ alle restlichen Behauptungen durch Grenzübergang. (Erst Unitarität von Ω_{\pm} , dann Unitarität von S .)

Nach den vorangegangenen Ergebnissen gilt mit Grenzwerten bezüglich der Operatornorm:

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n I_{t \leftarrow -t}^{(-i\tilde{A}, m)} \quad (\text{C.112})$$

Für Anwendungen, bei denen dieser Grenzwert nicht in geschlossener Form ausgewertet werden kann, würde die Vertauschung der Grenzwertbildungen eine „natürliche“ Entwicklung von S in Form einer Störungsreihe nach Ordnungen in $-i\tilde{A}$ liefern. Dies ist tatsächlich möglich. Genauer gilt die folgende

Bemerkung C.4.1 (über den S -Operator als Störungsreihe)

Unter den Voraussetzungen von Satz C.3.1 und C.4.1 besteht für $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\left| I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(-i\tilde{A}, n)} \xi \right| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_{t_1}^{t_2} M(t) dt \right|^n |\xi| \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}; \xi \in X) \quad (\text{C.113})$$

Damit existiert für $n \in \mathbb{N}_0$ bezüglich der Operatornorm

$$I_{+\infty \leftarrow -\infty}^{(-i\tilde{A}, n)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(-i\tilde{A}, n)} \quad (\text{C.114})$$

und es gilt ebenfalls bezüglich der Operatornorm

$$\left\| S - \sum_{m=0}^n I_{+\infty \leftarrow -\infty}^{(-i\tilde{A}, m)} \right\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \exp \left[\int_{-\infty}^{\infty} M(t) dt \right] \quad (\text{C.115})$$

Insbesondere gilt also bezüglich der Operatornorm

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} I_{+\infty \leftarrow -\infty}^{(-i\tilde{A}, m)} \quad (\text{C.116})$$

Beweis:

1. (C.113) (vollständige Induktion): Im Induktionsschritt wird die ffa $s \in \mathbb{R}$ gültige Beziehung

$$M(s) \frac{1}{n!} \left[\int_{t_1}^s M(r) dr \right]^n = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d}{ds} \left[\int_{t_1}^s M(s) ds \right]^{n+1} \quad (\text{C.117})$$

benutzt.

2. (C.114): Um die Existenz der Grenzwerte mit dem Cauchy-Kriterium nachzuweisen, genügt es, für $n \in \mathbb{N}$ unter Verwendung von (C.51) und (C.113) folgende Abschätzung zu beweisen:

$$\left. \begin{array}{l} \left| I_{t_3 \leftarrow t_1}^{(n)} - I_{t_2 \leftarrow t_1}^{(n)} \right| \\ \left| I_{t_1 \leftarrow t_3}^{(n)} - I_{t_1 \leftarrow t_2}^{(n)} \right| \end{array} \right\} \leq \frac{2}{(n-1)!} \left| \int_{t_2}^{t_3} M(t) dt \right| \quad (\text{C.118})$$

$$\cdot \left\{ \left| \int_{t_1}^{t_2} M(t) dt \right| + \left| \int_{t_1}^{t_3} M(t) dt \right| \right\}^{n-1}$$

Anhang D

Bezeichnungen

Die folgende Zusammenstellung mathematischer Begriffsbildungen, Konventionen und Sätze entlastet die Darstellung in Kapitel 4 und Anhang C. Im Dienst der Übersichtlichkeit werden die wichtigsten Stichworte und Symbole als Randnotiz ihrer Erklärung im Text zur Seite gestellt.

D.1 Allgemeine Schreibweisen

Eintrag D.1.1 (Koeffizientenkörper)

$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Als Koeffizientenkörper \mathbb{K} linearer Räume treten nur die reellen und komplexen Zahlen auf: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Eintrag D.1.2 (Topologisierungskonvention)

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) wird durch die fett gedruckte Trägermengenbezeichnung abgekürzt:

$$\mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} (X, \mathcal{O}) \tag{D.1}$$

Die in dieser Arbeit benötigten topologischen Räume werden im folgenden eingeführt und gemäß dieser Konvention abgekürzt. Das Auftreten einer fett gedruckten Mengenbezeichnung im Text kann dann als Verweis auf diesen Anhang aufgefaßt werden. Abweichend davon gelten die Koeffizientenkörper als kanonisch (=euklidisch) topologisiert und werden stets normal gedruckt. Untermengen der Koeffizientenkörper werden dann fett gedruckt, wenn sie mit der induzierten Topologie versehen sind.

D.2 Normierte Räume

Eintrag D.2.1 (Normierte Räume)

normierte Räume

Ein normierter Raum \mathbf{X} ist ein Tripel $\mathbf{X} = (X, \mathbb{K}, |\cdot|)$, bestehend aus seiner (nichtleeren) Trägermenge X , seinem Koeffizientenkörper \mathbb{K} und einer seine Topologie erzeugenden Norm $|\cdot|$.

$\mathbf{X} = (X, \mathbb{K}, |\cdot|)$

Der Limes bezüglich der Norm-Topologie heißt starker Limes und wird in Formeln mit „s-lim“ abgekürzt.

Eintrag D.2.2 (Prä-Hilbert-Räume)

Prä-Hilbert-Räume

Sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{K}, |\cdot|)$ normierter Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $|\cdot|$ erfüllt die Parallelogrammgleichung:

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2) \quad (u, v \in X) \quad (\text{D.2})$$

2. Es gibt ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$, das $|\cdot|$ erzeugt:

$$|u|^2 = (u, u) \quad (u \in X) \quad (\text{D.3})$$

In diesem Fall heißt \mathbf{X} Prä-Hilbert-Raum, und dies wird durch die Schreibweise $\mathbf{X} = (X, \mathbb{K}, (\cdot, \cdot))$ zum Ausdruck gebracht.

Konvention für
Skalarprodukte
 $(\cdot, \cdot), \langle \cdot | \cdot \rangle$

Ein Skalarprodukt ist je nach Konvention linear im ersten und konjugiert linear im zweiten Argument oder umgekehrt. Im folgenden werden Skalarprodukte, die linear im ersten Argument sind, mit runden Klammern, solche die linear im zweiten Argument sind mit „Bra-Ket“ geschrieben. Also

$$(\alpha u, v) = \alpha (u, v) = (u, \bar{\alpha} v) \quad (\alpha \in \mathbb{K}; u, v \in X) \quad (\text{D.4})$$

$$\langle \alpha u | v \rangle = \bar{\alpha} \langle u | v \rangle = \langle u | \alpha v \rangle \quad (\alpha \in \mathbb{K}; u, v \in X) \quad (\text{D.5})$$

B-Räume, H-Räume

Eintrag D.2.3 (B-Räume, H-Räume) Ein vollständiger normierter Raum (Prä-Hilbert-Raum) heißt Banach-Raum (Hilbert-Raum) oder kurz B-Raum (H-Raum).

D.3 Abbildungen

stetige lineare Abbildungen
 $L(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$

Eintrag D.3.1 (Stetige lineare Abbildungen)

Für zwei normierte Räume $\mathbf{X} = (X, \mathbb{K}, |\cdot|_X)$ und $\mathbf{Y} = (Y, \mathbb{K}, |\cdot|_Y)$ mit demselben Koeffizientenkörper \mathbb{K} bezeichnet $L(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ die Menge aller Funktionen $f: X \rightarrow Y$, die stetig und \mathbb{K} -linear sind.

$\|\cdot\|$

$(L(\mathbf{X}; \mathbf{Y}), \mathbb{K}, \|\cdot\|)$ ist selbst normierter Raum, wenn $\|\cdot\| : L(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|u|_X \leq 1} |Au|_Y \quad (\text{D.6})$$

definiert wird.

stetige Abbildungen
 $C(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$

Eintrag D.3.2 (Stetige Abbildungen)

Für zwei topologische Räume $\mathbf{X} = (X, \mathcal{O}_X)$ und $\mathbf{Y} = (Y, \mathcal{O}_Y)$ bezeichnet $C(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ die Menge aller Funktionen $f: X \rightarrow Y$, die stetig sind.

$|\cdot|_\infty$

Sei \mathbf{X} kompakt, $\mathbf{Y} = (Y, \mathbb{K}, |\cdot|_Y)$ normierter Raum (B-Raum) und $|\cdot|_\infty : X \rightarrow Y$ gemäß

$$|u|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |u(x)|_Y \quad (u \in C(\mathbf{X}; \mathbf{Y})) \quad (\text{D.7})$$

$C(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$

definiert. Dann ist $C(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \stackrel{\text{def}}{=} (C(\mathbf{X}; \mathbf{Y}), \mathbb{K}, |\cdot|_\infty)$ normierter Raum (B-Raum).

Familien
 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

Eintrag D.3.3 (Abbildungsfamilien)

Seien $\mathbf{X} = (X, \mathbb{K}, |\cdot|_X)$, $\mathbf{Y} = (Y, \mathbb{K}, |\cdot|_Y)$. Seien $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset L(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ und $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset X$ Familien mit nichtleerer Indexmenge Λ . Wenn hinsichtlich der

Indexmenge keine Mißverständnisse zu befürchten sind, wird die häufig betrachtete Familie $\Lambda \ni \lambda \mapsto A_\lambda u_\lambda \in Y$ einfach mit Au bezeichnet:

$$Au \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda \ni \lambda \mapsto A_\lambda u_\lambda \in Y) \tag{D.8}$$

Dieselbe Schreibweise wird auch für ein $u \in X$ verwandt, wobei u mit der konstanten Familie $\Lambda \ni \lambda \mapsto u$ identifiziert wird.

D.4 Differential- und Integralrechnung in Banach-Räumen

Eintrag D.4.1

Sei $(X, \mathbb{K}, |\cdot|)$ B-Raum. Sei $J \subset \mathbb{R}$ nichtleeres offenes Intervall und $u \in C(\mathbf{J}; \mathbf{X})$.

1. u heißt an der Stelle $t \in J$ (stark) differenzierbar, wenn es $v \in X$ gibt mit Ableitung'

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{u_{t+\varepsilon} - u_t}{\varepsilon} - v \right| = 0 \tag{D.9}$$

In diesem Fall heißt v Ableitung von u an der Stelle t und wird mit u'_t bezeichnet. u heißt differenzierbar, wenn u an jeder Stelle $t \in J$ differenzierbar ist. u heißt stetig differenzierbar, wenn u differenzierbar und $u' \in C(\mathbf{J}; \mathbf{X})$ ist.

2. Sei $t_0 \in J$. Dann existiert für $t \in J$ das bestimmte Integral $\int_{\min\{t_0, t\}}^{\max\{t_0, t\}} u_s ds$ als Netzlimes Riemannscher Zwischensummen [Wal95]. Die Stammfunktion Integral \int , Stammfunktion

$$J \ni t \mapsto \int_{t_0}^t u_s ds \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgn}(t - t_0) \int_{\min\{t_0, t\}}^{\max\{t_0, t\}} u_s ds \tag{D.10}$$

ist differenzierbar und ihre Ableitung ist u . Ferner gilt für $t \in J$

$$\left| \int_{t_0}^t u_s ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |u_s| ds \right| \tag{D.11}$$

3. Sei u differenzierbar. Dann gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Form Hauptsatz

$$u_t = u_{t_0} + \int_{t_0}^t u'_s ds \quad (t_0, t \in J) \tag{D.12}$$

(Beweis durch Projektion auf Dualraum).

D.5 Direkte Integraldarstellung

Eintrag D.5.1 (Vollständiger Spektralsatz von von Neumann)¹

Sei $(X, \mathbb{C}, (\cdot, \cdot))$ separabler H-Raum und $H: X \supset \text{dom}(H) \rightarrow X$ selbstadjungierter Operator. Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}$ das Spektrum von H . Dann gibt es

$$\int_\Lambda \oplus X_\lambda d\mu(\lambda)$$

¹siehe z. B. [Mau67], chapter IX.

1. eine Familie von H-Räumen $\{\mathbf{X}_\lambda = (X_\lambda, \mathbb{C}, (\cdot, \cdot)_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$
2. eine Borel-Maß μ auf Λ , bezüglich dessen die Funktion $\lambda \ni \lambda \rightarrow \dim X_\lambda$ meßbar ist,
3. eine unitäre Abbildung

$$U : X \rightarrow \int_{\Lambda} \bigoplus X_\lambda d\mu(\lambda), \quad (\text{D.13})$$

so daß U jede Funktion $\varphi(H)$ von H in folgendem Sinne diagonalisiert:

$$[U\varphi(H)u](\lambda) = \varphi(\lambda)[Uu](\lambda) \quad (u \in X; \lambda \in \Lambda) \quad (\text{D.14})$$

Ein solches U wird dann als eine kanonische direkte Integraldarstellung bezeichnet.

Literaturverzeichnis

- [AM67] Abraham, R. and J. E. Marsden: *Foundations of mechanics*. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1967.
- [AR68] Alder, Henry L. and Edward B. Roessler: *Introduction to probability and statistics*. W. H. Freeman and company, San Francisco, fourth edition, 1968.
- [Arn97] Arnol'd, Vladimir Igorevich: *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag New York Inc., New York, Berlin, Heidelberg, corrected fourth printing of the second edition, 1997.
- [BGR91] Barwood, G. P., P. Gill, and W. R. C. Rowley: *Frequency measurements on optically narrowed Rb-stabilised laser diodes at 780 nm and 795 nm*. Applied Physics B (Photophysics and laser chemistry), 53:142–147, 1991.
- [BS57] Bethe, Hans A. and Edwin E. Salpeter: *Quantum mechanics of one- and two-electron atoms*. Springer-Verlag OHG., Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957.
- [BS88] Blümel, R. and U. Smilansky: *Classical irregular scattering and its quantum-mechanical implications*. Physical Review Letters, 60(6):477–480, February 1988.
- [But73] Butkov, Eugene: *Mathematical Physics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading (Massachusetts), Menlo Park (California), London, Sydney, Manila, 1973.
- [BW86] Born, Max and Emil Wolf: *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Frankfurt, sixth (corrected) edition, 1986.
- [CTDL77] Cohen-Tannoudji, Claude, Bernard Diu, and Frank Laloë: *Quantum mechanics*, volume II. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1977.
- [Dem98] Demtröder, Wolfgang: *Laser spectroscopy, basic concepts and instrumentation*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New York, second enlarged edition, 1998.

- [Edm74] Edmonds, A. R.: *Angular momentum in quantum mechanics*. Princeton landmarks in mathematics and physics. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, fourth printing of the second edition, 1974.
- [Eri60] Ericson, Torleif: *Fluctuations of nuclear cross sections in the "continuum" region*. Physical Review Letters, 5(9):430–431, November 1960.
- [Eri63] Ericson, Torleif: *A theory of fluctuations in nuclear cross sections*. Annals of Physics, 23:390–414, 1963.
- [FR59] Fano, U. and G. Racah: *Irreducible tensorial sets*, volume 4 of *Pure and applied physics*. Academic Press Inc., Publishers, New York, 1959.
- [Fra71] Franz, W.: *Quantentheorie*, Band 102 der Reihe *Heidelberger Taschenbücher*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- [GR65] Gradshteyn, I. S. and I. M. Ryzhik: *Tables of integrals, series and products*. Academic Press Inc., New York, London, 1965.
- [Hel97] Held, Hermann: *Untersuchungen zur nichtlinearen Dynamik von Rubidium-Rydbergatomen in statischen Feldern*. Technischer Bericht 222, Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching, Juni 1997.
- [HWW85] Holleman, A. F., Egon Wiberg und Nils Wiberg: *Lehrbuch der anorganischen Chemie*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 91.-100., verbesserte und stark erweiterte Auflage, 1985.
- [JY79] Jarrett, S. M. and J. F. Young: *High-efficiency single-frequency cw ring dye laser*. Optics Letters, 4(6):176–178, June 1979.
- [KK68] Kikuchi, Ken and Mitsuji Kawai: *Nuclear matter and nuclear reactions*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.
- [Lew02] Lewandowski, Heather Jean: *Coherences and correlations in an ultracold Bose gas*. thesis, M. S. Physics, University of Colorado, 2002.
- [Lid90] Lide, David R. (editor): *CRC handbook of chemistry and physics*. CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, Boston, 71st edition, 1990.
- [Lid04] Lide, David R. (editor): *CRC handbook of chemistry and physics*. CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington, D. C., 85th edition, 2004.
- [LL77] Landau, L. D. und E. M. Lifschitz: *Klassische Feldtheorie*, Band II der Reihe *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1977.
- [LN83] Lorenzen, C. J. and K. Niemax: *Quantum defects of the $n^2P_{1/2,3/2}$ levels in $^{39}\text{K I}$ and $^{85}\text{Rb I}$* . Physica Scripta, 27:300–305, 1983.

- [Man87] Mandelbrot, Benoît B.: *Die fraktale Geometrie der Natur*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.
- [Mau67] Maurin, Krzysztof: *Methods of hilbert spaces*. PWN-Polish scientific publishers, Warszawa, 1967.
- [MK85] Mayer-Kuckuk, Theo: *Atomphysik*. Teubner Studienbücher Physik. B. G. Teubner, Stuttgart, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, 1985.
- [MK92] Mayer-Kuckuk, Theo: *Kernphysik*. Teubner Studienbücher Physik. B. G. Teubner, Stuttgart, 5. überarbeitete und erweiterte Auflage, 1992.
- [MKT⁺81] Monchalin, J. P., M. J. Kelly, J. E. Thomas, N. A. Kurnit, A. Szöke, F. Zernike, P. H. Lee, and A. Javan: *Accurate laser wavelength measurement with a precision two-beam scanning michelson interferometer*. Applied Optics, 20(5):736–757, March 1981.
- [Mog00] Moghimi, Reza: *Curing comparator instability with hysteresis*. Analog Dialogue (A forum for the exchange of circuits, systems, and software for real-world signal processing), 34(7):1, 2000.
- [MRRS88] Musiol, Gerhard, Johannes Ranft, Roland Reif und Dieter Seeliger: *Kern- und Elementarteilchenphysik*. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, New York, Cambridge, Basel, 1988.
- [MW92] Main, Jörg and Günter Wunner: *Ericson fluctuations in the chaotic ionization of the hydrogen atom in crossed magnetic and electric fields*. Physical Review Letters, 69(4):586–589, July 1992.
- [MW94] Main, Jörg and Günter Wunner: *Rydberg atoms in external fields as an example of open quantum systems with classical chaos*. Journal of Physics B (Atomic, Molecular and Optical Physics), 27(13):2835–2848, July 1994.
- [PBM86] Prudnikov, Anatoliĭ Platonovich, Yuriĭ Aleksandrovich Brychkov, and Oleg Igorevich Marichev: *Elementary funktions*, volume 1 of *Integrals and series*. Gordon and Breach Science Publishers S.A., New York, London, Paris, Montreux, Tokyo, Melbourne, 1986.
- [Pea88] Pearson, D. B.: *Quantum scattering and spectral theory*, volume 9 of *Techniques of Physics*. Academic Press Limited, London, 1988.
- [Per83] Perry, Peter A.: *Scattering theory by the Enss method*, volume 1 of *Mathematical reports*. Harwood Academic Publisher GmbH, 1983. besonders Theorem 2.1.
- [Rac42] Racah, Giulio: *Theory of complex spectra. I*. Physical Review, 61:186–197, February 1942.
- [Rai90] Raithel, Georg: *Spektroskopie an Rydbergatomen in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern*. Dissertation, Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München, 1990.

- [RM75] Rescigno, Thomas N. and Vincent McKoy: *Rigorous method for computing photoabsorption cross sections from a basis-set expansion*. Physical Review A, 12(2):522–525, August 1975.
- [RS75] Reed, M. and B. Simon: *Fourier analysis, self-adjointness*, volume II of *Methods of modern mathematical physics*. Academic Press Limited, London, 1975.
- [RS85] Radzig, A. A. and B. M. Smirnow: *Reference data on atoms, molecules, and ions*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [RW94] Raithel, G. and H. Walther: *Ionization energy of rubidium rydberg atoms in strong crossed electric and magnetic fields*. Physical Review A, 49(3):1646, 1994.
- [Sak85] Sakurai, J. J.: *Modern quantum mechanics*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Menlo Park, California, 1985.
- [Sea83] Seaton, M. J.: *Quantum defect theory*. Reports on Progress in Physics, 46:167–257, 1983.
- [Sta99] Stania, Gernot: *Rydbergatome in starken externen Feldern*. Diplomarbeit, Sektion Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München, Garching, 1999.
- [Sta05] Stania, Gernot: *Messung von Ericson-Fluktuationen*. Dissertation, Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München, 2005.
- [SW05] Stania, Gernot and Herbert Walther: *Quantum chaotic scattering in atomic physics: Ericson fluctuations in photoionization*. Physical Review Letters, 95:194101, November 2005.
- [Urb04] Urbonas, Linas: *persönliche Mitteilung*, 2004.
- [vBEH⁺64] Brentano, P. von, J. Ernst, O. Häusser, T. Mayer-Kuckuk, A. Richter, and W. von Witsch: *Statistical fluctuations in the cross sections of the reactions $Cl^{35}(p, \alpha)S^{32}$ and $Cl^{37}(p, \alpha)S^{34}$* . Physics Letters, 9(1):48–51, March 1964.
- [vRDP79] Regemorter, H. van, Hoang Bing Dy, and M. Prud'homme: *Radial transition integrals involving low or high effective quantum numbers in the coulomb approximation*. Journal of Physics B (Atomic, Molecular and Optical Physics), 12(7):1053–1061, 1979.
- [Wal93] Walter, Wolfgang: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, fünfte Auflage, 1993.
- [Wal95] Walter, Wolfgang: *Analysis 2*. Grundwissen Mathematik. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, vierte, durchgesehene und ergänzte Auflage, 1995.

- [Whi59] White, Guy Kendall: *Experimental techniques in low-temperature physics*. Monographs on the physics and chemistry of materials. Oxford University Press, London, first edition, 1959.
- [Wiz79] Wiza, Joseph Ladislas: *Microchannel plate detectors*. Nuclear Instruments and Methods, 162:587–601, 1979.
- [XE87] Xander, Karl und Hans Hermann Enders: *Regelungstechnik mit elektronischen Bauelementen*, Band 6 der Reihe *Werner-Ingenieur-Texte*. Werner-Verlag GmbH, Düsseldorf, 4., neubearbeitete und erweiterte Auflage, 1987.
- [Yar71] Yariv, Amnon: *Introduction to optical electronics*. Holt, Rinehart and Winston series in electrical engineering, electronics, and systems. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, Chicago, San Francisco, Atlanta, Dallas, Montreal, Toronto, London, Sydney, 1971.
- [Yar75] Yariv, Amnon: *Quantum electronics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chicago, London, Sydney, Toronto, second edition, 1975.
- [Yos80] Yosida, Kôzaku: *Functional Analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, sixth edition, 1980.
- [ZLKK79] Zimmerman, Myron L., Michael G. Littman, Michael M. Kash, and Daniel Kleppner: *Stark structure of the rydberg states of alkali-metal atoms*. Physical Review A, 20(6):2251–2275, December 1979.